Μετρήσεις και Σφάλματα

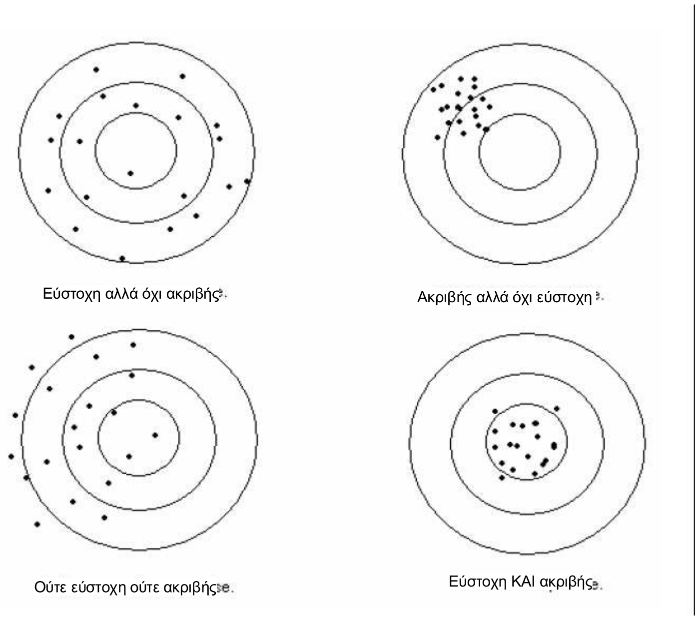
Επιμέλεια : Κ. Καρατάσος

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Χημικών Μηχανικών - Εργαστήριο Φυσικής Χημείας

1 Ευστοχία και Ακρίβεια

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή και τις μεθόδους προσδιορισμού των σφαλμάτων σε πειραματικές μετρήσεις ή υπολογισμούς, είναι καλό να γίνει ο διαχωρισμός 2 εννοιών που ενδέχεται να δημιουργήσουν σύγχυση.

Συχνά για να αναφερθούμε στις έννοιες της ευστοχίας και της ακρίβειας πειραματικών μετρήσεων, χρησιμοποιούμε τον όρο ακρίβεια (στα αγγλικά υπάρχουν διαφορετικοί όροι : Precision και Accuracy αντίστοιχα). Ο όρος ακρίβεια πρέπει να χρησιμοποιείται για να αποδοθεί ο βαθμός της διασποράς μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων. Μικρή διασπορά γύρω από μια τιμή συνιστά μεγαλύτερο βαθμό ακρίβειας (accuracy) σε σχέση με ένα άλλο σύνολο μετρήσεων μεγαλύτερης διασποράς. Η έννοια της ευστοχίας σχετίζεται με το κατά πόσο τα αποτελέσματα των μετρήσεων βρίσκονται κατά μέσο όρο στην "σωστή" περιοχή, την περιοχή δηλαδή της πραγματικής/αναμενόμενης τιμής του μετρούμενου μεγέθους. Το Σχ. 1 δείχνει παραστατικά τις διαφορές μεταξύ των εννοιών αυτών. Το κέντρο του στόχου αντιπροσωπεύει την



Σχήμα 1: Σχηματική Αναπαράσταση για την διευκρίνηση των εννοιών Ακρίβειας και Ευστοχίας των μετρήσεων

σωστή τιμή του μετρούμενου μεγέθους, ενώ κάθε τελεία αντιστοιχεί σε μετρήσεις για τον προσδιορισμό της τιμής αυτής. Οι μετρήσεις στην πάνω αριστερή γωνία χαρακτηρίζονται από μεγάλη διασπορά (άρα μικρή ακρίβεια), όμως η διασπορά αυτή είναι κατά μέσο όρο γύρω από την σωστή τιμή. Το επάνω δεξιά σύνολο μετρήσεων έχει μεν μικρή διασπορά (μεγάλη ακρίβεια), όμως οι μετρήσεις είναι συγκεντρωμένες σε μια περιοχή μακριά από την σωστή τιμή (μικρή ευστοχία). Στην κάτω αριστερά εικόνα, υπάρχει μεγάλη διασπορά (μικρή ακρίβεια) σε μια περιοχή που δεν αντιστοιχεί στην σωστή τιμή (μικρή ευστοχία). Τέλος η κάτω δεξιά εικόνα αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός συνόλου μετρήσεων με μεγάλη ακρίβεια αλλά και μεγάλη ευστοχία.

2 Είδη Πειραματικών Σφαλμάτων

2.1 Ακούσια Σφάλματα ή Λάθη

Αυτά τα σφάλματα προέρχονται από λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή των μετρήσεων. Τέτοια σφάλματα μπορούν να αποφευχθούν αν τηρηθούν οι εξής απλοί κανόνες

- Να γίνεται αξιολόγηση της μέτρησης (πχ η τάξη μεγέθους είναι σε λογικά όρια ;)
- Να γράφονται αμέσως οι μετρήσεις και να αποφεύγει ο φοιτητής να τα θυμάται
- να γίνεται η ίδια μέτρηση χωριστά και από άλλα μέλη της εργαστηριακής ομάδας

2.2 Συστηματικά Σφάλματα

Αυτά σχετίζονται με τις *αβεβαιότητες* που επηρεάζουν κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους. Τέτοια σφάλματα μπορεί να οφείλονται στη βαθμονόμηση ενός οργάνου ή στην κατάσταση μιας συσκευής που χρησιμοποιείται στο πείραμα (π.χ. από εσφαλμένη βαθμολόγηση ενός θερμομέτρου). Πρέπει να ελαχιστοποιούνται είτε με τη διόρθωση της βαθμονόμησης του οργάνου, είτε με την εφαρμογή κάποιων διορθωτικών όρων. Μια άλλη κατηγορία συστηματικών σφαλμάτων είναι αυτά που οφείλονται στις ειδικές συνθήκες περιβάλλοντος (π.χ υγρασία, θερμοκρασία) που επικρατούν κατά τη διάρκεια ενός πειράματος, και μπορεί να επηρεάζουν τις μετρήσεις κατά συγκεκριμένο τρόπο. Επίσης συστηματικά σφάλματα μπορεί να είναι θεωρητικής φύσης και οφείλονται στη χρήση προσεγγιστικών εξισώσεων σε υπολογισμούς.

2.3 Τυχαία ή Στατιστικά Σφάλματα

Για τον προσδιορισμό των τυχαίων σφαλμάτων χρησιμοποιούνται στατιστικές μέθοδοι και τεχνικές που αποτελούν αντικείμενο της Θεωρίας Ανάλυσης Σφαλμάτων. Τα σφάλματα αυτά παραμένουν ακόμη και όταν τα άλλα, ακούσια και συστηματικά έχουν αποφευχθεί ή έχουν ληφθεί υπόψη. Τα τυχαία ή στατιστικά σφάλματα οφείλονται σε συνδυασμό διαφόρων αιτιών π.χ. , ατέλειες των πειραματικών διατάξεων, ατέλειες στις αισθήσεις μας και στα όργανα είτε συσκευές που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις, ακαθόριστες μεταβολές σε διάφορες πειραματικές συνθήκες (γνωστές ή άγνωστες) που υποτίθεται ότι παραμένουν σταθερές ή ότι δεν επηρεάζουν το πείραμα, κ.α. Τα τυχαία σφάλματα είναι κατά βάση αναπόφευκτα και το μέγεθός τους δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Στην περίπτωση που εκτελέσουμε έναν αριθμό n μετρήσεων μιας ποσότητας x, αποδεικνύεται ότι η αριθμητική μέση τιμή

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

που ονομάζεται *μέση τιμή δείγματος*, έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η πραγματική τιμή της υπό μέτρηση φυσικής ποσότητας. Η διαφορά

$$\Delta x = \overline{x} - x_i \tag{2}$$

ονομάζεται *απόκλιση από τη μέση τιμή*, μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, και δίνει ένα μέτρο του σφάλματος της μέτρησης του x_i.

Αν πάρουμε την μέση τιμή των αποκλίσεων των μετρήσεων από τη μέση τιμή, μπορούμε να υπολογίσουμε την *μέση απόκλιση από την μέση τιμή*

$$\bar{\Delta}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

΄Ο πιο συνηθισμένος τρόπος όμως για να προσδιορίσομε την διασπορά ενός συνόλου μετρήσεων, είναι ο υπολογισμός της *τυπικής απόκλισης* (ή τυπικού σφάλματος) σ, η οποία ορίζεται από την εξίσωση

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω έκφραση πρέπει να είναι n$\geq$10. ΄Οπως φαίνεται, πρακτικά το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης σ^2 αντιστοιχεί στην μέση τετραγωνική απόκλιση από την μέση τιμή. Γενικά το στατιστικό σφάλμα που συνδέεται με την μέση τιμή από n μετρήσεις, δίνεται από την *τυπική απόκλιση της μέσης τιμής* που ορίζεται από την εξίσωση

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Το τυπικό σφάλμα είναι μικρότερο από την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής κατά ένα παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η αβεβαιότητα που σχετίζεται με την μέση τιμή, ελαττώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των μετρήσεων. Επειδή είναι καλύτερα να γίνεται υπερεκτίμηση παρά υποεκτίμηση του σφάλματος, συστήνεται η χρησιμοποίηση του τυπικού σφάλματος ιδιαίτερα αν ο αριθμός των μετρήσεων δεν είναι μεγάλος.

2.4 Παραδείγματα περιπτώσεων που υπεισέρχεται σφάλμα

- **Μη ακριβής ορισμός μιας μέτρησης**(συστηματικό ή τυχαίο)
  Ένας λόγος που εμποδίζει την πραγματοποίηση ακριβών μετρήσεων είναι το ότι ενδέχεται η μέτρηση να μην έχει οριστεί ξεκάθαρα. Για παράδειγμα αν 2 διαφορετικοί άνθρωποι κληθούν να μετρήσουν το μήκος ενός σχοινιού, θα βρουν πιθανότατα διαφορετικά αποτελέσματα, γιατί ο καθένας τους μπορεί να τεντώσει το σχοινί με διαφορετική τάση. Ο καλύτερος τρόπος για την ελαχιστοποίηση αυτού του είδους των σφαλμάτων είναι να γίνει προσεκτικός ορισμός των συνθηκών κάτω από τις οποίες πρέπει να γίνει η μέτρηση.

- **Παράλειψη συνυπολογισμού κάποιου παράγοντα**(συνήθως συστηματικό)
  Το ποιο ενδιαφέρον κομμάτι στον σχεδιασμό ενός πειράματος είναι η προσπάθεια να ληφθούν υπόψη ή να ελεγχθούν όλοι οι πιθανοί παράγοντες πέραν του ανεξάρτητου μεγέθους που πρέπει να μετρηθεί. Για παράδειγμα μπορεί εκ παραδρομής να ανγοηθεί η αντίσταση του αέρα σε μια μέτρηση της επιτάχυνσης σε ένα πείραμα ελεύθερης πτώσης, ή να μην ληφθεί υπόψη το μαγνητικό πεδίο της Γης κατά την μέτρηση του μαγνητικού περίου ενός ασθενούς μαγνήτη. Ο μόνος τρόπος να αποφευχθούν τέτοιου είδους σφάλματα, είναι είναι να γίνει λεπτομερής θεώρηση όλων των παραγόντων που μπορούν να υπεισέλθουν κατά την διάρκεια μιας μέτρησης *πριν* την πραγματοποίηση αυτής. Μερικές φορές στην περίπτωση διαπίστωσης ενός τέτοιου σφάλματος κατόπιν της μετρήσεων, είναι δυνατόν να γίνει μια εκ των υστέρων κατάλληλη διόρθωση των δεδομένων

- **Περιβαλλοντικοί παράγοντες**(συστηματικό ή τυχαίο)
  Πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή σε σφάλματα που εισάγονται από τις περιβαλλοντικές συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται το πείραμα. Για παράδειγμα πρέπει να ληφθούν υπόψη (ή να ληφθούν μέτρα για την αποφυγή τους) η πιθανή μεταβολή της θερμοκρασίας κατά την διάρκεια εκτέλεσης του πειράματος, ο πιθανή ύπαρξη ηλεκτρονικού θορύβου από κοντινά όργανα, η

ύπαρξη κραδασμών, χημικών αναθυμιάσεων με αποτέλεσμα την μόλυνση των δειγμάτων, κλπ.

- **Αποτυχία σωστής βαθμονόμησης οργάνων** (συστηματικό)
Η βαθμονόμηση των οργάνων πρέπει να ελέγχεται πριν την λήψη μετρήσεων, όποτε αυτό είναι δυνατόν. Αν δεν υπάρχουν κάποια σταθμά αναφοράς για την βαθμονόμηση, η ακρίβεια ενός οργάνου θα πρέπει να ελέγχεται με σύγκριση με κάποιο άλλο όργανο ίδιας η μεγαλύτερης ακρίβειας , ή να ανατρέχουμε στις τεχνικές προδιαγραφές του κατασκευαστή. Πριν την εκτέλεση μιας μέτρησης με μικρόμετρο, με ηλεκτρονική ζυγαριά ή με άλλο ηλεκτρονικό μέσο, πρέπει να γίνεται πάντα έλεγχος για την τιμή αναφοράς. Πχ μπορεί να χρειαστεί να μηδενιστεί εκ νέου η ένδειξη αναφοράς ενός οργάνου ή να μετρηθεί η απόκλιση από αυτήν και να γίνει κατάλληλη διόρθωση των μετρήσεων. Γενικά είναι καλή ιδέα να ελέγχεται η βαθμονόμηση του οργάνου και κατά την διάρκεια του πειράματος.

- **Σφάλμα Παράλλαξης**(συστηματικό ή τυχαίο)
Το σφάλμα αυτό μπορεί να υπεισέλθει στις μετρήσεις στην περίπτωση που υπάρχει κάποια απόσταση μεταξύ των τιμών της κλίμακας πάνω στο όργανο, με τον δείκτη του οργάνου. Αν το μάτι του παρατηρητή δεν είναι σωστά ευθυγραμισμένο με την κλίμακα και τον δείκτη του οργάνου, η μέτρηση μπορεί να δώσει τιμή μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πραγματική.

- **Φαινόμενα καθυστέρησης χρόνου και υστέρησης**(συστηματικό)
Σε μερικά όργανα μέτρησης, απαιτείται κάποιος χρόνος για την επίτευξη ισορροπίας με το περιβάλλον, με συνέπεια αν γίνει λήψη μέτρησης πριν να σταθεροποιηθεί το όργανο, να υπάρχει σφάλμα. Το πιο κοινό παράδειγμα είναι η λήψη μετρήσεων θερμοκρασίας από ένα θερμόμετρο, το οποίο όμως ακόμα δεν έχει έλθει σε θερμική ισορροπία με τον περιβάλλοντα χώρο. Μια παρόμοια περίπτωση είναι η *υστέρηση*, όπου η ένδειξη ενός οργάνου φαίνεται να "αργοπορεί" να αλλάξει από την προηγούμενη τιμή. Τέτοια φαινόμενα υστέρησης συνήθως παρατηρούνται σε υλικά τα οποία μαγνητίζονται κατά την εφαρμογή ενός μεταβαλόμενου μαγνητικού πεδίου.

- **Προσωπικά σφάλματα**
Αυτά τα σφάλματα συμβαίνουν λόγω απροσεξίας, κακού χειρισμού, ή και μεροληψίας εκ μέρους του εκτελούντος το πείραμα. Εναπόκειται στον πειραματιστή να μην υφίστανται τέτοια σφάλματα. Η επίκληση τέτοιου είδους σφαλμάτων κατά την ανάλυση των δεδομένων καλό είναι να αποφεύγεται μιας και δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί η επίδρασή τους στις μετρήσεις.

3 Απόλυτο και Σχετικό Σφάλμα-Σημαντικά Ψηφία

Αν και μαθηματικά οι αναπαραστάσεις ενός πραγματικού αριθμού με 1, 2 ή και περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι ισοδύναμες, εντούτοις για κάποιον που εκτελεί ένα πείραμα, οι αναπαραστάσεις αυτές μπορεί να περιέχουν επιπλέον πληροφορία. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μετράμε κάποιο μήκος με μια μετρητική ταινία που έχει ακρίβεια 0.1 cm. Τότε μια μέτρηση πχ 30.0 cm πρέπει να ερμηνευτεί ως μια τιμή μεταξύ 29.9 και 30.1 cm και να γραφεί ως 30.0 cm $\pm$0.1 cm. Αν διαθέταμε περισσότερη ακρίβεια στη μέτρηση (πχ 0.05cm) τότε θα έπρεπε να γραφεί ως 30.00 cm $\pm$0.05 cm. Το σφάλμα αυτό που καθορίζεται από την ακρίβεια του οργάνου μέτρησης ονομάζεται *Απόλυτο Σφάλμα* (ΑΣ), και η μέτρηση παριστάνεται ως x$\pm\Delta$x. Η *Σχετική Αβεβαιότητα* της μέτρησης (ΣΑ) ορίζεται από το λόγο $\frac{\Delta x}{x}$ και συνήθως εκφράζεται με τη μορφή εκατοστιαίου ποσοστού (%). Μετρήσεις με το ίδιο Απόλυτο Σφάλμα, μπορεί να έχουν *διαφορετική* Σχετική Αβεβαιότητα. Για παράδειγμα, οι μετρήσεις 20 cm $\pm$ 1 cm και 121 $\pm$ 1 cm έχουν το ίδιο ΑΣ αλλά οι ΣΑ είναι αντίστοιχα 5% και ~0.8%. Γενικά η ΣΑ μιας μέτρησης εκφράζει καλύτερα την αβεβαιότητα που υπεισέρχεται σε αυτήν από το ΑΣ. Σε περίπτωση που σε κάποια μέτρηση διαθέτουμε κάποια αναμενόμενη τιμή αυτής (πχ από βιβλιογραφικά δεδομένα ή από κάποιο θεωρητικό μοντέλο), μπορούμε να υπολογίσουμε το *Σχετικό Σφάλμα* (ΣΦ) μεταξύ αυτών από τον λόγο

$$\frac{\Mu\epsilon\tau\rho o\upsilon\mu\epsilon\nu\eta \quad \Pi o\sigma o\tau\eta\tau\alpha - \mathrm{A}\nu\alpha\mu\epsilon\nu o\mu\epsilon\nu\eta \quad \mathrm{T}\iota\mu\eta}{\mathrm{A}\nu\alpha\mu\epsilon\nu o\mu\epsilon\nu\eta \quad \mathrm{T}\iota\mu\eta} \tag{4}$$

και να εκφράσουμε το αποτέλεσμα στη μορφή εκατοστιαίου ποσοστού.

Τα ψηφία μιας αριθμητικής ποσότητας είναι *σημαντικά* μόνον όταν είναι αποτέλεσμα μέτρησης ή υπολογισμού που βασίζεται σε μετρήσεις. Αν πχ μετρούσαμε την πίεση σε ένα πείραμα με ακρίβεια $\pm$0.1 mbar και τη βρίσκαμε μεταξύ 1.05 και 1.15 mbar τότε θα γράφαμε την μέτρηση ως 1.1 mbar και όχι 1.10 mbar, γιατί το τελευταίο μηδενικό θα συνιστούσε ακρίβεια 0.01 mbar πράγμα που δεν είναι σωστό.

3.1 Χρήση των σημαντικών ψηφίων στους υπολογισμούς

Αν στους υπολογισμούς μας υπεισέρχονται πράξεις μεταξύ μετρήσεων με διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων, τότε το αποτέλεσμα δεν έχει περισσότερα σημαντικά ψηφία από τον *αριθμό που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία*. Δηλ., το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού δεν έχει ποτέ μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτήν του λιγότερου ακριβούς αριθμού. Στους υπολογισμούς που γίνονται στις εργαστηριακές ασκήσεις καλά είναι να στρογγυλεύονται οι αριθμοί με τα περισσότερα σημαντικά ψηφία, έτσι ώστε όλοι οι αριθμοί που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς, να έχουν τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Τα πειραματικά σφάλματα θα πρέπει να στρογγυλεύονται σε ένα ή το πολύ σε 2 σημαντικά ψηφία. Όταν χρησιμοποιούνται υπολογιστές τσέπης, τα αποτελέσματα υπολογισμών δεν θα πρέπει να αντιγράφονται όπως εμφανίζονται στην οθόνη, αλλά να στρογγυλεύονται κατάλληλα.

4 Προσδιορισμός Απόλυτων Σφαλμάτων

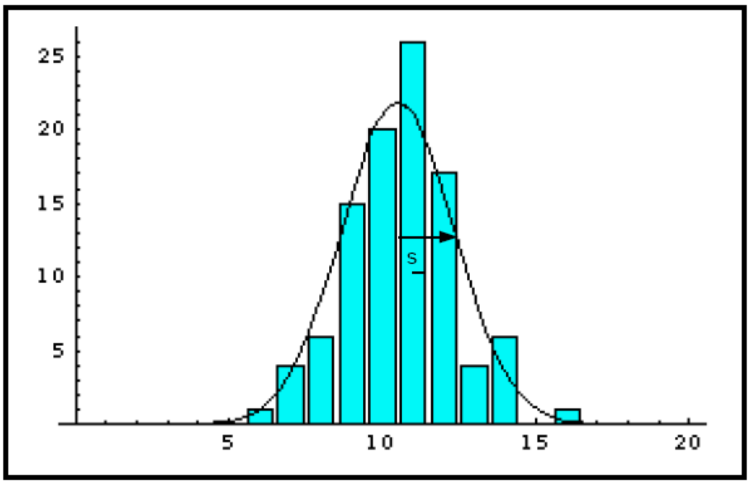
Όταν ένα φυσικό μέγεθος μετρείται μόνο μια φορά, τότε το απόλυτο σφάλμα προσδιορίζεται από το μέγιστο σφάλμα (ακρίβεια) του οργάνου (ΜΣΟ). Το ΜΣΟ είναι συνήθως η μικρότερη τιμή που μπορεί να μετρηθεί με το συγκεκριμένο όργανο (δηλ. η μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακάς του). Σε μερικές περιπτώσεις το ΜΣΟ εκτιμάται ότι είναι ίσο με κάποιο κλάσμα της μικρότερης υποδιαίρεσής του (συνήθως το μισό) εφόσον το κλάσμα αυτό μπορεί να προσδιορισθεί με βεβαιότητα.

Στην περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα περισσοτέρων μετρήσεων, το τυχαίο (ή στατιστικό) σφάλμα μπορεί να προσδιορισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια. Αποτέλεσμα των τυχαίων σφαλμάτων είναι οι μετρήσεις να κατανέμονται σύμφωνα με το νόμο της *κανονικής* κατανομής, που ονομάζεται και κατανομή *Gauss*. Για παράδειγμα θεωρείστε την περίπτωση όπου έλαβαν χώρα 100 μετρήσεις μιας φυσικής ποσότητας. Η μέση τιμή του μετρηθέντος μεγέθους σε κάποιες μονάδες ήταν 10.5 και η τυπική απόκλιση σ=1.83. Η παρακάτω εικόνα δείχνει το ιστόγραμμα των 100 μετρήσεων, το οποίο μας δείχνει την συχνότητα εμφάνισης κάποιων διαστημάτων τιμών κατά τις μετρήσεις.

Πχ, σε 20 από τις μετρήσεις η τιμή βρέθηκε μεταξύ 9.5 και 10.5, ενώ οι περισσότερες από τις μετρήσεις ήταν κοντά στην μέση τιμή 10.5. Η τυπική απόκλιση σ για το σύνολο αυτό των μετρήσεων, μας δείχνει κατά προσέγγιση πόσο μακρυά από την μέση τιμή βρέθηκαν οι περισσότερες από τις μετρήσεις. Για ένα μεγάλο δείγμα μετρήσεων, περίπου το 68% των τιμών θα βρίσκονται μέσα στα όρια μιας τυπικής απόκλισης, 95% θα βρίσκονται στο διάστημα $\bar{x} \pm 2\sigma$, ενώ σχεδόν το σύνολο αυτών (97%) θα βρίσκεται σε διάστημα 3 τυπικών αποκλίσεων από την μέση τιμή. Όσο περισσότερες μετρήσεις γίνουν, τόσο περισσότερο το ιστόγραμμα θα προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Τα παραπάνω ποσοστά συχνά αναφέρονται και ως *στάθμες εμπιστοσύνης*. Έτσι πχ η στάθμη εμπιστοσύνης για μια νέα μέτρηση να πέσει στο διάστημα $x \pm \sigma$ είναι 68%. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέση απόκλιση από τη μέση τιμή που αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι περίπου το 80% της τυπικής απόκλισης σ και άρα η στάθμη εμπιστοσύνης είναι περίπου 55%.

Γενικά για τους σκοπούς των εργαστηριακών ασκήσεων, συνίσταται ο υπολογισμός του στατιστικού σφάλματος να γίνεται με την μέθοδο του τυπικού σφάλματος (σ) και εάν αυτό είναι πολύ μικρό μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέση απόκλιση από την μέση τιμή $\bar{\Delta}_x$. Σε περίπτωση που οι εκτιμήσεις αυτές είναι μικρότερες από το μέγι-



$\leftarrow \bar{x} \pm 1s \rightarrow$

$\leftarrow \quad \bar{x} \pm 2s \quad \rightarrow$

$\leftarrow \qquad \bar{x} \pm 3s \qquad \rightarrow$

στο σφάλμα του οργάνου, τότε ενδείκνυται να χρησιμοποιείται το ΜΣΟ ως απόλυτο σφάλμα των μετρήσεων.

5 Διάδοση των σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς

Πολύ συχνά είναι αναγκαίο να γίνει αριθμητικός συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων μετρουμένων ποσοτήτων, για τον υπολογισμό των επιθυμητών μεγεθών. Πχ χρειάζεται η διαίρεση μάζας με τον όγκο για να υπολογιστεί η πυκνότητα. Αφού έχουν εξεταστεί πλέον οι μέθοδοι υπολογισμού των σφαλμάτων από άμμεσα μετρούμενες ποσότητες, μπορεί κανείς να προχωρήσει και στον υπολογισμό του σφάλματος για *έμμεσα* υπολογιζόμενες ποσόσητες οι οποίες είναι συναρτήσεις των απευθείας μετρουμένων μεγεθών. Με άλλα λόγια, χρειάζεται να εξεταστεί ο *τρόπος διάδοσης* των σφαλμάτων μέσω των αριθμητικών πράξεων για την εκτίμηση του σφάλματος στο αποτέλεσμά τους. Τα σφάλματα αυτά ονομάζονται *Έμμεσα Σφάλματα* (ΕΣ). Υπάρχουν περισσότεροι του ενός γενικές μέθοδοι υπολογισμού τέτοιου είδους σφαλμάτων. Δύο εξ'αυτών περιγράφονται στη συνέχεια (σε όλες τις παρακάτω εκφράσεις έχει υποτεθεί ότι τα σφάλματα των διαφόρων μεταβλητών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους)

5.1 Μέγιστο Δυνατό Σφάλμα

5.1.1 Πρόσθεση και αφαίρεση ποσοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσθέσουμε δυο ποσότητες A και B, οι οποίες έχουν σφάλματα ΔA και ΔB αντίστοιχα. Τότε αν τις προσθέσουμε μαζί με τα σφάλματά τους παίρνουμε

$$(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = (A + B) \pm (\Delta A + \Delta B)$$

Δηλ το σφάλμα στο άθροισμα είναι το άθροισμα των σφαλμάτων. Το σφάλμα αυτό ονομάζεται *Μέγιστο Δυνατό Σφάλμα* (ΜΔΣ). Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και το ΜΔΣ στην περίπτωση πρόσθεσης περισσοτέρων των 2 ποσοτήτων. Μπορεί με τον ίδιο τρόπο να δειχθεί ότι ακριβώς το ίδιο ισχύει και για το σφάλμα κατά την αφαίρεση 2 ή περισσοτέρων ποστήτων. Δηλ το ΜΔΣ στην αφαίρεση είναι και πάλι το άθροισμα των σφαλμάτων.

5.1.2 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ποσοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του εμβαδού E ενός ορθογωνίου με μήκη πλευρών A±ΔA και B±ΔB. τότε

$$\begin{aligned} E \pm \Delta E &= (A \pm \Delta A) \cdot (B \pm \Delta B) = AB\left(1 + \frac{\Delta A}{A}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta B}{B}\right) \\ &= AB\left[1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right) \pm \left(\frac{\Delta A}{A}\right) \cdot \left(\frac{\Delta B}{B}\right)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Επειδή ο όρος $\left(\frac{\Delta A}{A}\right) \cdot \left(\frac{\Delta B}{B}\right)$ είναι μικρός σε σχέση με τους άλλους, μπορεί να παραληφθεί ώστε

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$$

Γενικά αν $P = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdots Q_n$ μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέγιστο σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta P = \pm P\left(\frac{\Delta Q_1}{Q_1} + \frac{\Delta Q_2}{Q_2} + \cdots \frac{\Delta Q_n}{Q_n}\right)$$

Αν εξετάσουμε και την περίπτωση της διαίρεσης δύο ποσοτήτων A και B, χρησιμοποιήσουμε διωνυμική ανάπτυξη για τον όρο $(1 \pm \Delta B/B)$ και αγνοήσουμε όρους δεύτερης τάξης και άνω καταλήγουμε και πάλι στην **ίδια έκφραση του σφάλματος** που προέκυψε από τον πολλαπλασιασμό των ποσοτήτων A και B.

5.1.3 Δυνάμεις και ρίζες

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το έμμεσο σφάλμα στην ποσότητα $P = Q^m$ γνωρίζοντας το σφάλμα ΔQ της μετρηθείσας ποσότητας Q, ενώ m είναι ένας ακέραιος ή κλασματικός (θετικός ή αρνητικός αριθμός). Για τον υπολογισμό του σφάλματος αυτού θεωρούμε τη σχέση

$$P \pm \Delta P = (Q \pm \Delta Q)^m = Q^m \left(1 + \Delta Q/Q\right)^m$$

Ακολούθως μετά από δυωνυμική ανάπτυξη για τον όρο στην τελευταία παρένθεση παίρνουμε

$$P \pm \Delta P = Q^m \left(1 + \frac{m}{1!}\frac{\Delta Q}{Q} + \frac{m\,(m-1)}{2!}\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)^2 + \cdots\right)$$

Παραλείποντας τις δυνάμεις του ΔQ που είναι μεγαλύτερες του 1, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\frac{\Delta P}{P} = m\frac{\Delta Q}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta P = m\frac{\Delta Q}{Q}P$$

Για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα στην ποσότητα X που δίνεται από τη σχέση

$$X = \left(AB^4\right) / \left(CD^{1/2}\right)$$

όπου A,B,C,D άμμεσες μετρήσεις με σφάλματα ΔA,ΔB,ΔC,ΔD σύμφωνα με την παραπάνω σχέση παίρνομε

$$\Delta X = \pm X \left(\frac{\Delta A}{A} + 4\frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D}\right)$$

Όπως γίνεται φανερό, το σφάλμα της υπολογισθείσας ποσότητας X επηρεάζεται περισσότερο από αυτό της μετρούμενης ποσότητας η οποία είναι υφωμένη στην μεγαλύτερη δύναμη και συνεπώς πρέπει το σφάλμα αυτής να υπολογισθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια.

5.2 Πιθανό Σφάλμα

Γενικά η μέθοδος του ΜΔΣ οδηγεί σε υπερεκτίμηση των σφαλμάτων στις έμμεσα υπολογιζόμενες ποσότητες. Μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση υπολογισμού έμμεσου σφάλματος, βασίζεται στον απειροστικό λογισμό και στη θεωρία ανάλυσης σφαλμάτων. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή ονομάζεται *Πιθανό Σφάλμα* (ΠΣ). Παρακάτω δίνονται κάποια βασικά στοιχεία για τον υπολογισμό του ΠΣ παραλείποντας τις αποδείξεις (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αντρέξει στην παρατιθέμενη στο τέλος βιβλιογραφία).

Ας υποθέσουμε ότι μια φυσική ποσότητα P εκφράζεται συναρτήσει των μετρουμένων μεγεθών Q_1,Q_2,Q_3 κοκ, δηλ $P = f(Q_1, Q_2, Q_3, ...)$. Το *ολικό διαφορικό* της που δίνεται από την έκφραση

$$dP = \frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 + \frac{\partial f}{\partial Q_3} dQ_3 + \cdots$$

παρέχει ένα μέτρο του σφάλματος της ποσότητας P, εφόσον τα dQ_1,dQ_2,dQ_3... ταυτίζονται με τα απόλυτα σφάλματα ΔQ_1,ΔQ_2,ΔQ_3... των μεγεθών Q_1,Q_2,Q_3...
Τότε αν πχ $P = Q_1 + Q_2 + Q_3$ σύμφωνα με την έκφραση του ολικού διαφορικού $\Delta P = \pm (\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3)$ που αντιστοιχεί στο ΜΔΣ της P. Επειδή όμως τα σφάλματα μπορούν να προστίθενται ή να αφαιρούνται μιας και είναι τυχαία, σύμφωνα με την θεωρία σφαλμάτων το ΠΣ ορίζεται ως

$$\Delta P = \pm \left[\left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} dQ_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Q_2} dQ_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Q_3} dQ_3 \right)^2 + \cdots \right]^{\frac{1}{2}}$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις του ολικού διαφορικού και του πιθανού σφάλματος, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ΠΣ είναι μικρότερο. Με βάση την προηγούμενη εξίσωση μπορεί κανείς να αποδείξει πχ ότι

- στην περίπτωση της πρόσθεσης αν $P = Q_1 + Q_2 + Q_3$ τότε
$$\Delta P = \pm \left[(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2 + (\Delta Q_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
- στην περίπτωση της αφαίρεσης αν $P = Q_1 - Q_2$ τότε
$$\Delta P = \pm \left[(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
- στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού αν $P = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$ τότε
$$\frac{\Delta P}{P} = \pm \left[\left(\frac{\Delta Q_1}{Q_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Q_2}{Q_2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Q_3}{Q_3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
- στην περίπτωση της διαίρεσης αν $P = Q_1/Q_2$ τότε
$$\frac{\Delta P}{P} = \pm \left[\left(\frac{\Delta Q_1}{Q_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Q_2}{Q_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
- στην περίπτωση της ποσότητας $X = (AB^4) / \left(CD^{1/2}\right)$
$$\frac{\Delta X}{X} = \pm \left[\left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + \left(4\frac{\Delta B}{B} \right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Γενικά συστήνεται η μέθοδος του πιθανού σφάλματος σαν πιο ακριβής.

6 "Ανώμαλα" Σημεία

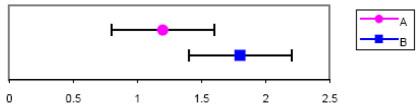
Το πρώτο βήμα για την ανάλυση (ή ακόμα και κατά τη διάρκεια της συλλογής) πειραματικών δεδομένων είναι να εξετάσουμε τα σημεία ως σύνολο και να προσπαθήσουμε να διακρίνουμε την ύπαρξη κάποιας συστηματικής συμπεριφοράς αλλά και για την ύπαρξη "ανώμαλων" σημείων, τα οποία φαίνεται να απέχουν αισθητά από τη μέση τάση των υπολοίπων δεδομένων. Τέτοια σημεία που βρίσκονται εκτός γενικού μοτίβου συμπεριφοράς είναι πιθανόν να υποδυκνείουν την ύπαρξη ενός σημαντικού φυσικού φαινομένου, ή απλά να είναι αποτέλεσμα σφάλματος κατά τη μέτρηση, ή αποτέλεσμα τυχαίων διακυμάνσεων. Σε κάθε περίπτωση, τέτοια σημεία αξίζουν περισσότερης διερεύνησης για τον καθορισμό της αιτίας της μη αναμενόμενης συμπεριφοράς. Δεν θα πρέπει ποτέ να εξαιρούνται αβασάνιστα γιατί υπάρχει πιθανότητα να αγνοήσει κανείς τα πιο σημαντικά μέρη της έρευνάς του! Εντούτοις, αν κάποιος μπορεί με βεβαιότητα να δικαιολογήσει την εξαίρεση κάποιων "ασύμβατων" με την γενική συμπεριφορά σημείων, τότε αυτό μπορεί να γίνει ώστε να μην επηρεαστεί η μέση τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

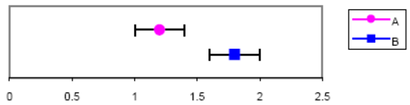
7 Πότε υπάρχει συμφωνία μεταξύ μετρήσεων;

Ένας από τους κύριους σκοπούς της θεωρίας υπολογισμού σφαλμάτων είναι να γίνει δυνατή η σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με αυτά άλλων πειραμάτων ή κάποιας θεωρίας. Γενικά μιλώντας, μια πειραματική μέτρηση συμφωνεί με μια θεωρητική πρόβλεψη αν η τελευταία κείται στα όρια της πειραματικής αβεβαιότητας. Όμοια, αν δύο πειραματικά μετρούμενες ποσότητες έχουν διαστήματα αβεβαιότητας με κάποιο βαθμό επικάλυψης, τότε οι πειραματικές μετρήσεις χαρακτηρίζονται ως συμβατές (ή σύμφωνες). Αν δεν υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα αβεβαιότητας, τότε λέμε ότι υπάρχει ασυφωνία μεταξύ των μετρήσεων. Εντούτοις πρέπει να αναγνωριστεί ότι τα κριτήρια για την συμφωνία ή όχι, μπορούν να δώσουν δυο αντίθετες απαντήσεις που εξαρτώνται από τη στάθμη εμπιστοσύνης και την αβεβαιότητα των μετρήσεων. Θα ήταν αντιδεοντολογικό να αυξήσει κανείς αυθαίρετα τα όρια λάθους με μόνο σκοπό να επιτευχθεί "συμφωνία" με κάποια αναμενόμενη τιμή. Μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν να εξετασθεί το μέγεθος της διαφοράς μεταξύ της μετρουμένης και της αναμενόμενης τιμής στα πραγματικά πλαίσια της πειραματικής αβεβαιότητας, και να γίνει προσπάθεια εύρεσης των αιτιών της διαφοράς, αν αυτή είναι πραγματικά σημαντική.

Στην εικόνα που ακολουθεί, αριστερά φαίνονται 2 μετρήσεις $A=1.2\pm0.4$ και $B=1.8\pm0.4$ με τα όρια των σφαλμάτων τους, οι οποίες *συμφωνούν* μέσα στα όρια αυτά, παρόλο που η εκατοστιαία διαφορά μεταξύ των κεντρικών τους τιμών κυμαίνεται στο 40%.

Στην δεξιά εικόνα οι μετρήσεις *δεν συμφωνούν* μιας και δεν υπάρχει επικάλυψη στα





διαστήματα λάθους. Στην περίπτωση αυτή θα χρειαζόταν επιπλέον έρευνα για την κατανόηση αυτής της διαφοράς. Ίσως να υπήρξε υποεκτίμηση των σφαλμάτων, ή κάποιο συστηματικό σφάλμα, ή η διαφορά είναι πραγματική και μόλις έχει γίνει μια νέα ανακάλυψη!!!

Αναφορές

[1] Χαλδούπης Χ. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής.* Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο, (1987).

[2] Taylor J. *An introduction to error analysis.* 2^{nd} ed. University Science Books, Sausalitop, (1997).

[3] Bevington P. R. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.* McGraw-Hill, New York, (1999).