5 Ταλαντώσεις

- Ταλάντωση –ορισμός
- Σύστημα μάζας – ελατηρίου
- Απλό εκκρεμές
- Φυσικό εκκρεμές
- Βηματισμός

Μαρία Κατσικίνη
katsiki@auth.gr
users.auth.gr/katsiki

Ταλαντώσεις - κυμάνσεις

Ταλάντωση είναι μια περιοδική κίνηση, δηλαδή επαναλαμβάνεται σε κανονικά χρονικά διαστήματα, γύρω από μια θέση.

Οι ταλαντώσεις είναι πηγές κυμάτων

Τα κύματα είναι περιοδικά φαινόμενα.

- φως — Όραση
- ήχος — Ακοή

Όραση, Ακοή, Γεύση, Αφή, Όσφρηση — Αντίληψη του περιβάλλοντος

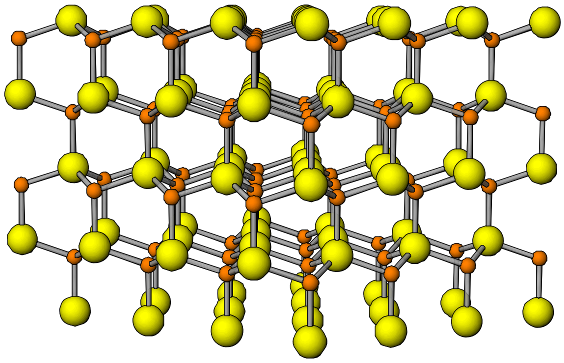
Κύμα
Διαταραχή που μεταφέρει ενέργεια από το ένα σημείο του μέσου σε ένα άλλο χωρίς να μεταφέρει μάζα

Ταλαντώσεις

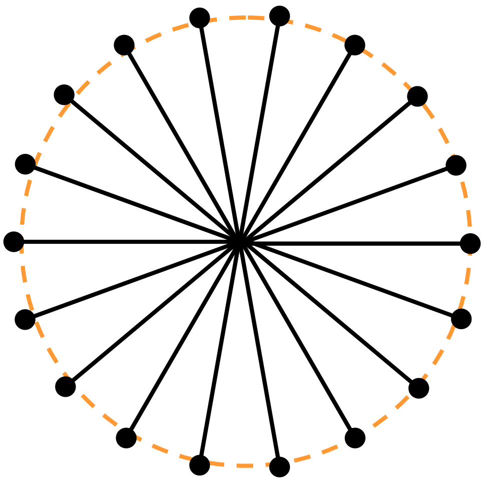
- Ταλάντωση → περιοδική κίνηση πάνω στην ίδια τροχιά, γύρω από κάποιο σημείο

- Αρμονική ταλάντωση → ταλάντωση κατά την οποία η απομάκρυνση του ταλαντούμενου σώματος από συγκεκριμένη θέση περιγράφεται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου

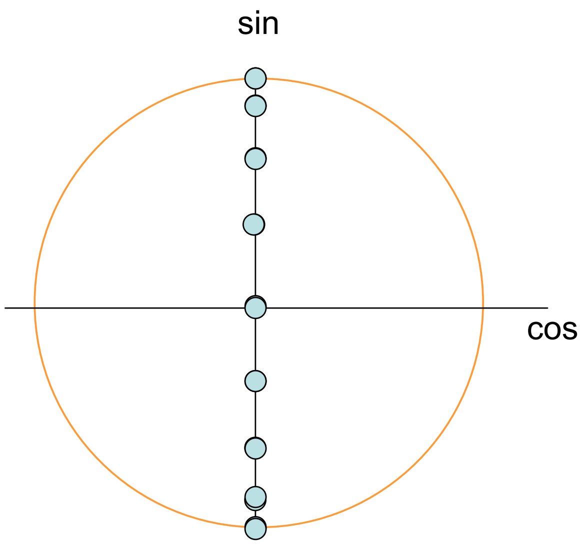
$$y = A\sin(bt)$$



Ταλαντώσεις



Κίνηση σημείου σε περιφέρεια κύκλου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα



Η προβολή του σημείου στον άξονα των ημιτόνων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

Ταλαντώσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

Γωνιακή ταχύτητα

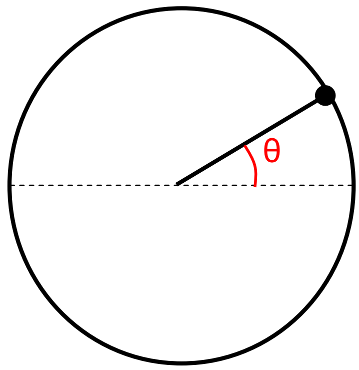
$$\omega = \frac{\vartheta}{t} \Rightarrow \vartheta = \omega \cdot t$$

$$\frac{rad}{s} \rightarrow s^{-1}$$

Γραμμική ταχύτητα

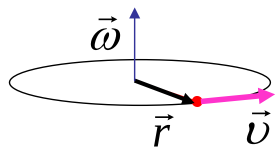
$$\upsilon = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{m}{s}$$

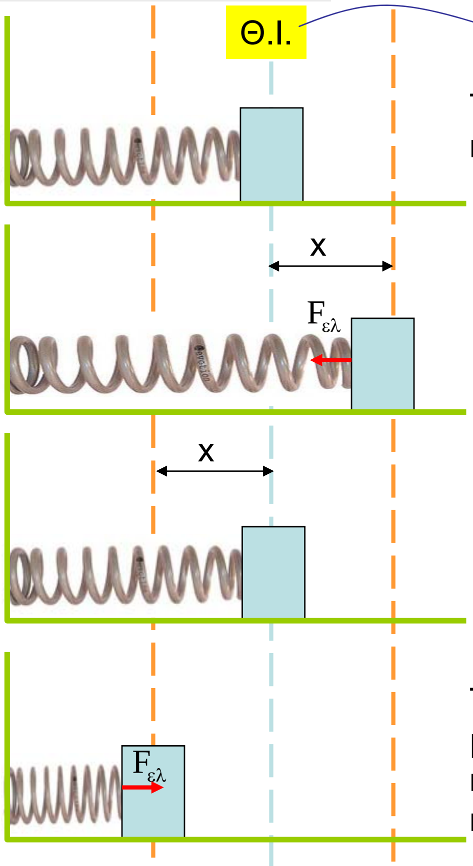


$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Μέτρο της ταχύτητας: $\upsilon = \omega \cdot r$



Ταλαντώσεις



$$\boxed{\sum \vec{F} = 0}$$

Το σώμα ισορροπεί και το ελατήριο δεν δέχεται καμία δύναμη 1

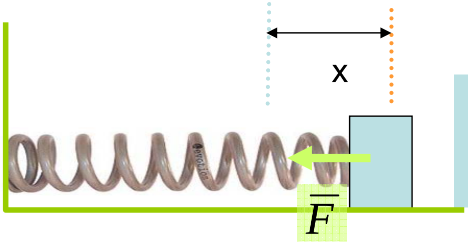
Το σώμα απομακρύνεται κατά x και το ελατήριο επιμηκύνεται 2

Το σώμα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση υπό την επίδραση της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου F = -k·x 3

Το σώμα σταματά στιγμιαία αφού έχει μετακινηθεί κατά x προς την αντίθετη κατεύθυνση και κινείται προς τη θέση ισορροπίας. 4

Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου



Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

Κίνηση που γίνεται υπό την επίδραση δύναμης (επαναφοράς) που είναι ανάλογη της μετατόπισης

Β' νόμος Newton

$$\overline{F} = m\overline{a}$$

Κίνηση στον x άξονα

$$-kx = m\overline{a} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Δοκιμάζω λύσεις της μορφής: $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Ταλαντώσεις

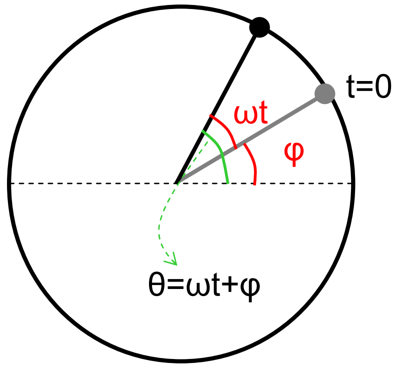
Σύστημα μάζας - ελατηρίου

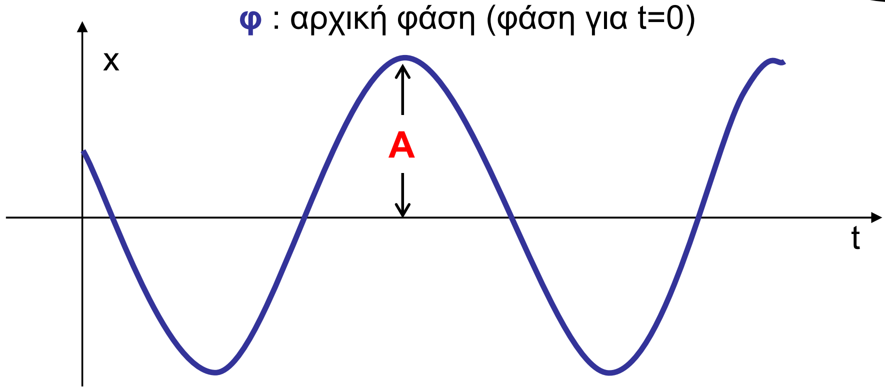
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A : πλάτος ταλάντωσης (μέγιστη τιμή του cos(ωt+φ) = 1→ μέγιστη τιμή x=A)

ωt+φ : φάση

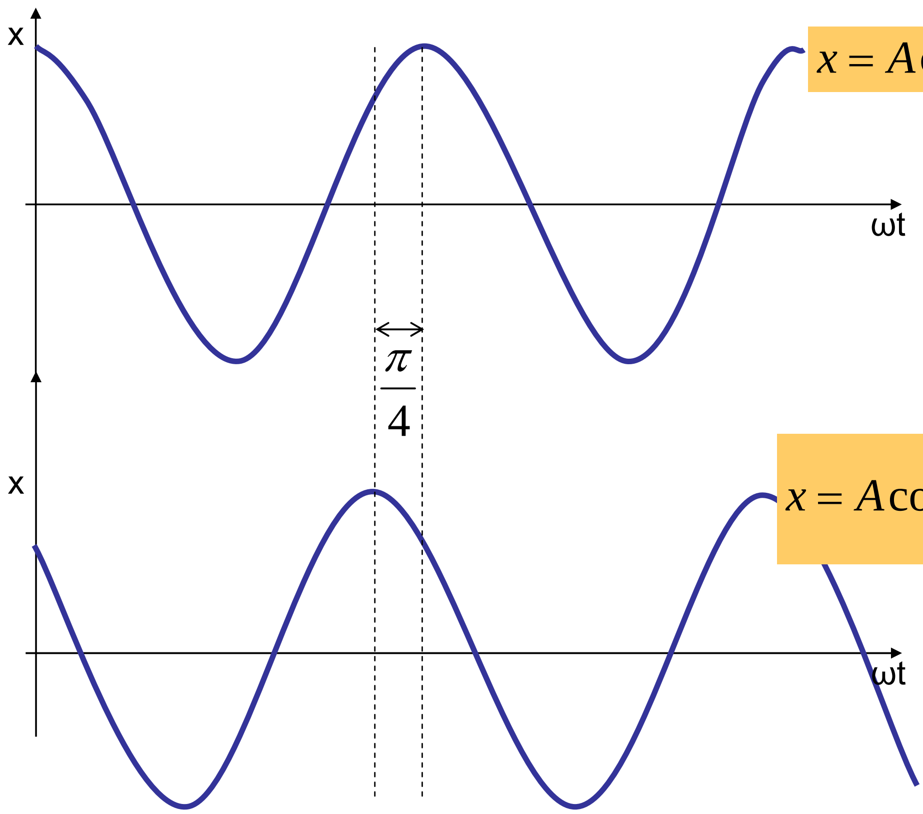
φ : αρχική φάση (φάση για t=0)





Ταλαντώσεις

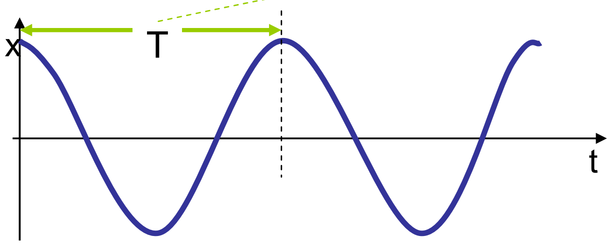
Σύστημα μάζας - ελατηρίου



$$x = A\cos(\omega t)$$

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ταλαντώσεις



T: περίοδος της ταλάντωσης (χρονικό διάστημα επανάληψης της μορφής της συνάρτησης)

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\omega(t+T)+\varphi = \omega t + \varphi + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Η μορφή της συνάρτησης επαναλαμβάνεται κάθε φορά που στη φάση προστίθεται 2π.

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

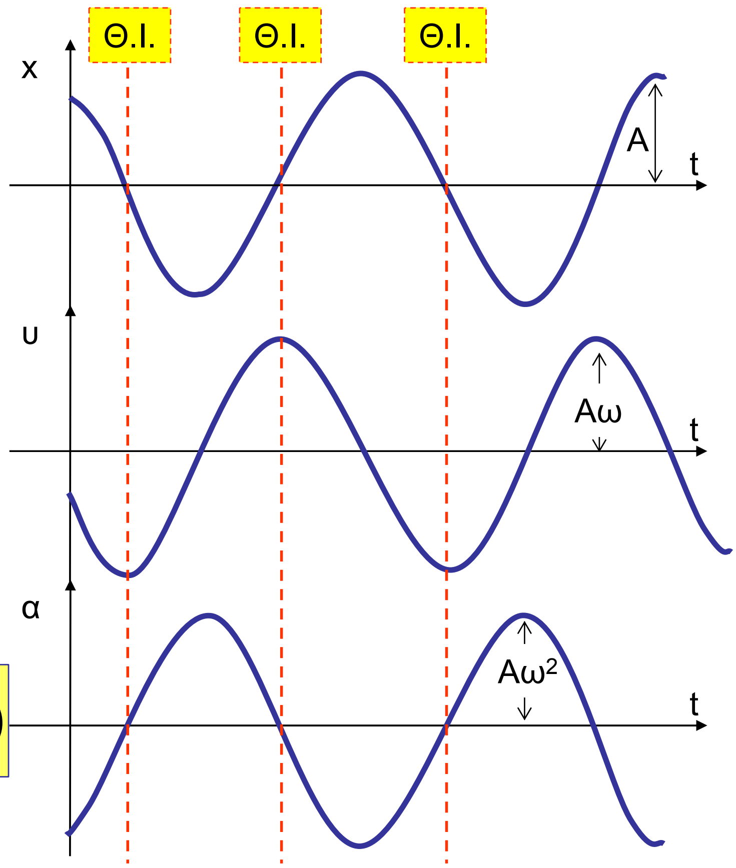
Συχνότητα (Hz): αριθμός ταλαντώσεων στη μονάδα του χρόνου

Ταλαντώσεις

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$



Ταλαντώσεις

Για σύστημα ελατήριο - μάζα

Κυκλική συχνότητα: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Περίοδος: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Συχνότητα: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Εξίσωση κίνησης: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Μέγιστη ταχύτητα: $\upsilon_{max} = A\omega$

Μέγιστη επιτάχυνση: $a_{max} = A\omega^2$

$\boxed{a = -\omega^2 x}$ *έχει απαλειφθεί ο χρόνος*

Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου

Ενέργεια

Κινητική ενέργεια: ενέργεια λόγω κίνησης $\quad K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$

Δυναμική ενέργεια: ενέργεια λόγω παραμόρφωσης του ελατηρίου $\quad U_{\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2}kx^2$

παραμόρφωση του ελατηρίου

Ολική ενέργεια

$$E = K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου

Μέγιστη κινητική ενέργεια

$$K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2$$

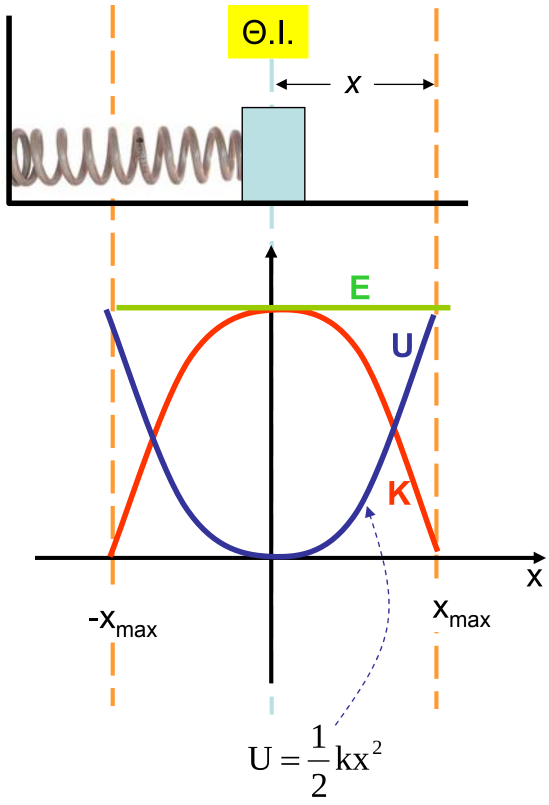
$$= \frac{1}{2} mA^2 \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{K_{max} = \frac{1}{2} kA^2}$$

Σε θέσεις μέγιστης ταχύτητας → Θ.Ι. (x=0)

Μέγιστη δυναμική ενέργεια

$$U_{max} = \frac{1}{2} kx_{max}^2 \Rightarrow \boxed{U_{max} = \frac{1}{2} kA^2}$$

Σε θέσεις μέγιστης παραμόρφωσης → $x=x_{max}$



Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου

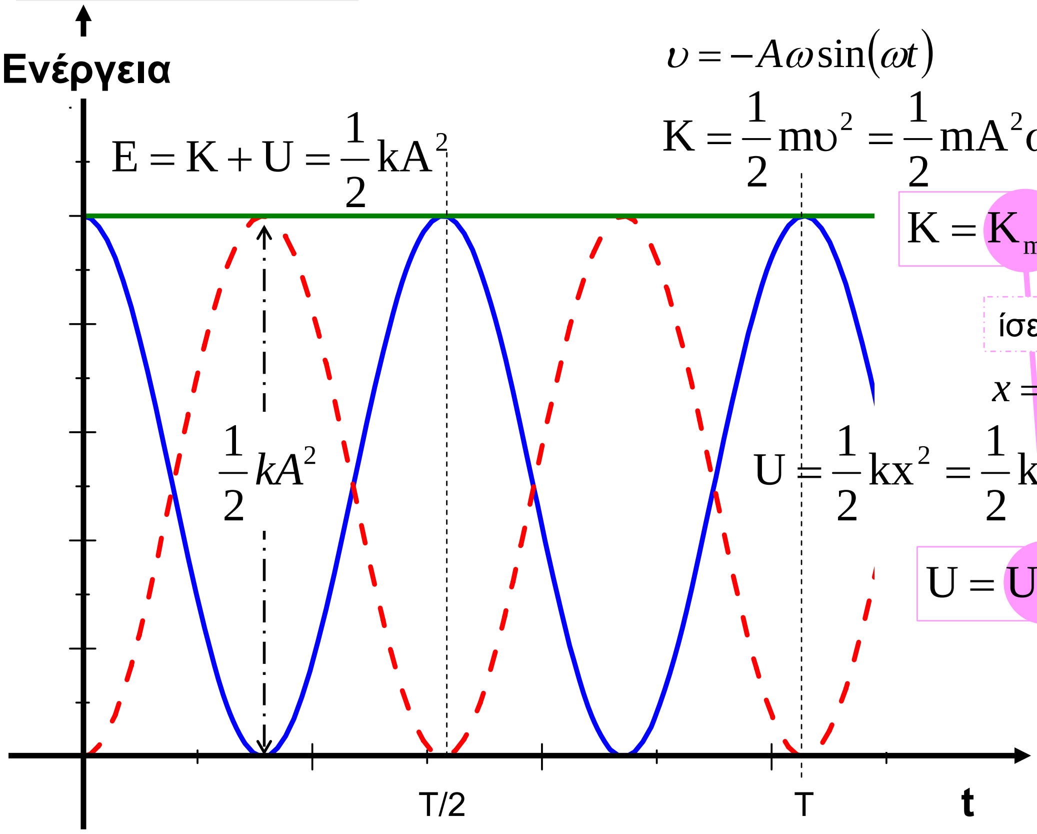
$$E = K + U$$

$$\frac{1}{2} kA^2 \qquad \frac{1}{2} m\upsilon^2 \qquad \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}}$$

$$\boxed{\upsilon = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}}$$

Ταλαντώσεις



$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$$K = K_{max}\sin^2\omega t$$

ίσες

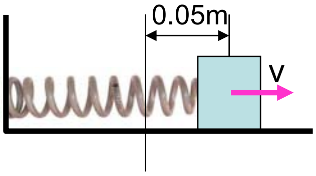
$$x = A\cos(\omega t)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$U = U_{max}\cos^2\omega t$$

Άσκηση

Ένα ελατήριο με σταθερά k=200N/m είναι στερεωμένο σε σώμα μάζας 0.50kg. Δίνουμε στο σώμα αρχική μετατόπιση 0.050m και αρχική ταχύτητα 3.0m/s.
α) Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης, την ολική ενέργεια και την αρχική φάση του συστήματος.
β) Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20\frac{rad}{\sec}$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Για αρχική μετατόπιση $x=x_0$ το σώμα έχει ταχύτητα $u=u_0$

$$\upsilon_0 = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x_0^2\right)} \Rightarrow \left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2 = A^2 - x_0^2 \Rightarrow \left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x_0^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2 + 0.05^2} = 0.158m$$

πλάτος

Άσκηση

Ολική ενέργεια της κίνησης: $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0.158^2 = 2.5J$ ενέργεια

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{t=0} x_0 = A\cos\varphi \quad 1$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \xrightarrow{t=0} \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{\omega} = -A\sin\varphi \quad 2$$

$$2 \div 1 \quad \frac{\upsilon_0}{\omega x_0} = -\tan\varphi \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{3}{20 \cdot 0.05} = -3 \Rightarrow \varphi = -71.6°$$

$$\varphi = -71.6° = -71.6\frac{\pi}{180} = -0.4\pi \text{ rad}$$

αρχική φάση

Εξισώσεις κίνησης

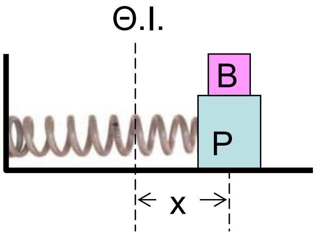
$$x = 0.158 \cdot \cos(20t - 0.4\pi)$$

$$\upsilon = -0.158 \cdot 20 \cdot \sin(20t - 0.4\pi) = -3.16\sin(20t - 0.4\pi)$$

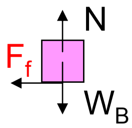
$$a = -0.158 \cdot 20^2 \cdot \cos(20t - 0.4\pi) = -63.2\cos(20t - 0.4\pi)$$

Άσκηση

Το σώμα P εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας f =1.50Hz καθώς ολισθαίνει πάνω σε λεία επιφάνεια. Το σώμα B κινείται μαζί με το P. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο επιφανειών (των P και B) είναι μ_s=0.6. Ποιό είναι το μέγιστο δυνατό πλάτος της ταλάντωσης ώστε το σώμα B να μην ολισθαίνει πάνω στο P; (g=9.81m/s²)



Σώμα B:



2ος N. Newton: $\sum F_x = m_B a \Rightarrow F_f = m_B a \Rightarrow \mu_s N = m_B a$

Μέγιστη επιτάχυνση για να μην ολισθαίνει το σώμα B:

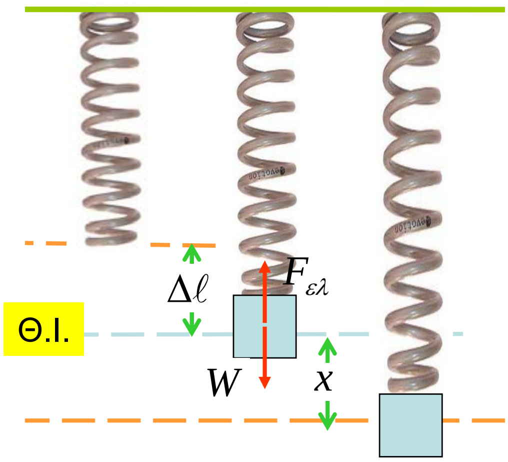
$$a^{\max} = \frac{\mu_s N}{m_B} = \frac{\mu_s m_B g}{m_B} = \mu_s g = 0.6 \cdot 9.81 = 5.89\frac{m}{s^2}$$

Η επιτάχυνση του συστήματος σωμάτων P και B γίνεται μέγιστη σε σημεία μέγιστης απομάκρυνσης:

$$a^{\max} = A\omega^2 \Rightarrow A = \frac{a^{\max}}{\omega^2} = \frac{a^{\max}}{(2\pi f)^2} = \frac{5.89}{(2 \cdot 3.14 \cdot 1.5)^2} = 0.0663 = 6.63cm$$

Ταλαντώσεις

Κατακόρυφο ελατήριο



1 Το σώμα προσδένεται στο ελατήριο και αφήνεται να ηρεμήσει

$$W = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\Delta\ell$$

2 Το σώμα απομακρύνεται κατά x από τη θέση ισορροπίας και το ελατήριο επιμηκύνεται
Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου ισούται με: $F_{\varepsilon\lambda} = -k(\Delta\ell + x)$

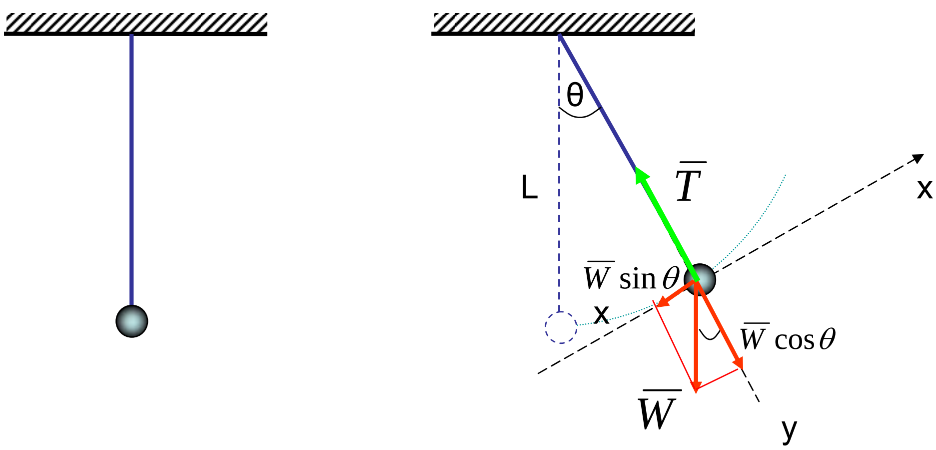
3 Το σώμα δέχεται συνολική δύναμη

$$\sum F = -k(\Delta\ell + x) + mg = -k\Delta\ell - kx + mg \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum F = -kx$$

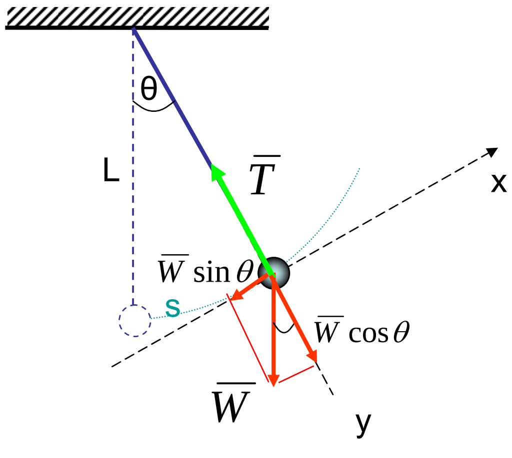
δύναμη ανάλογη της απομάκρυνσης

Απλό εκκρεμές

Σώμα που μπορεί να θεωρηθεί σημειακό προσδεδεμένο σε αβαρές νήμα.



Απλό εκκρεμές



- δύναμη επαναφοράς

$$-\overline{W}\sin\theta$$

- Για μικρές τιμές της γωνίας θ

$$\sin\theta = \frac{s}{L}$$

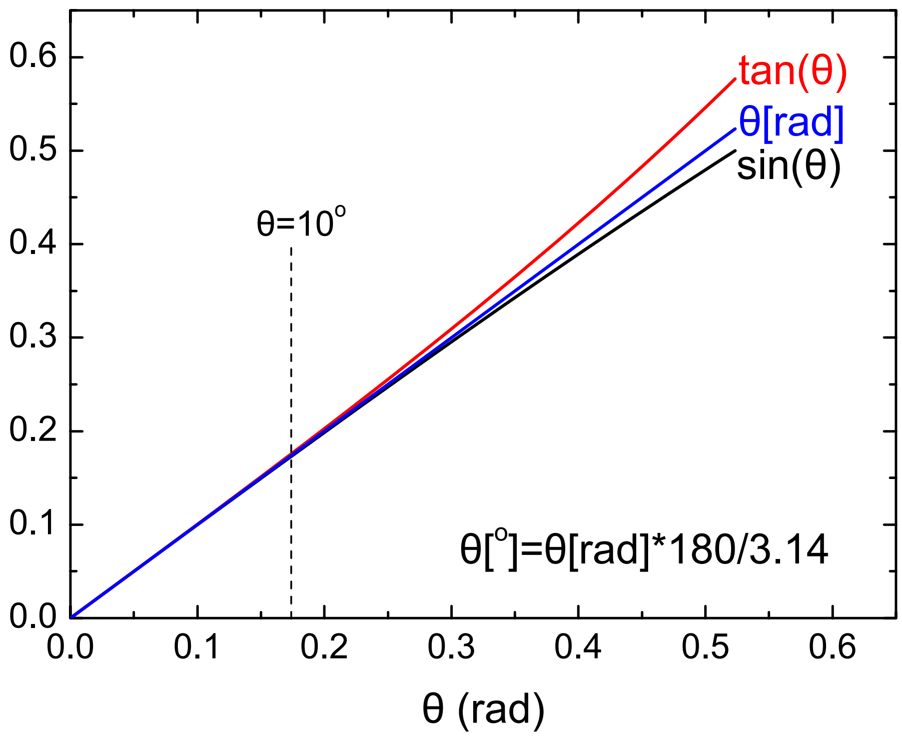
- ... άρα δύναμη επαναφοράς

$$F = -W\frac{s}{L} \Rightarrow \boxed{F = -\frac{mg}{L}s}$$

s : μήκος τόξου το οποίο για μικρές γωνίες θ μπορεί να θεωρηθεί ως απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (κατακόρυφος)

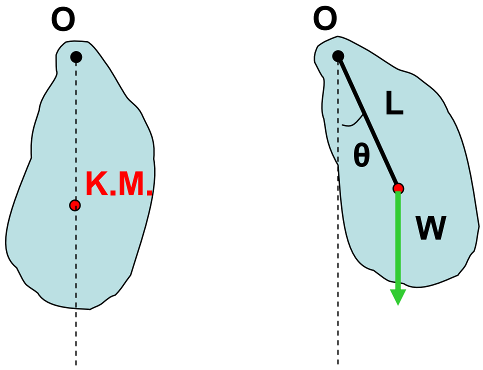
$$\left.\begin{array}{l} F = -\dfrac{mg}{L}s \\ F = -kx \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{mg}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$



Το φυσικό εκκρεμές

Σώμα πεπερασμένου μεγέθους που περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα κάθετο σε ένα σημείο του <u>που δεν περνά από το κέντρο μάζας του</u>.



Ροπή του βάρους: $M_O = W \cdot L \sin\theta$

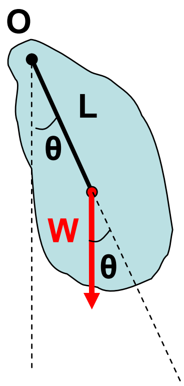
τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}}$$

Ροπή αδράνειας του στερεού σώματος

Το φυσικό εκκρεμές (απόδειξη)



Ροπή του βάρους: $M_O = W \cdot L \sin\theta$

Το σώμα περιστρέφεται γύρω από το σημείο O υπό την επίδραση της ροπής του βάρους του.

Αποκτά γωνιακή επιτάχυνση : $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Η σχέση που συνδέει τη ροπή με τη γωνιακή επιτάχυνση είναι: $\sum M = I \cdot \alpha$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας

Άρα: $-WL\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ και για μικρές γωνίες: $-WL\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{WL\theta}{I}$ (1)

το μείον υποδηλώνει ότι το βάρος τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

Για λύσεις της μορφής: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$, όπου θ_0 είναι η μέγιστη γωνία, προκύπτει:

$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ και $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

οπότε με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει: $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$

Συνεπώς: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$

Ροπή αδράνειας

Εκφράζει: ... την αντίσταση ενός σώματος που τείνει να περιστραφεί

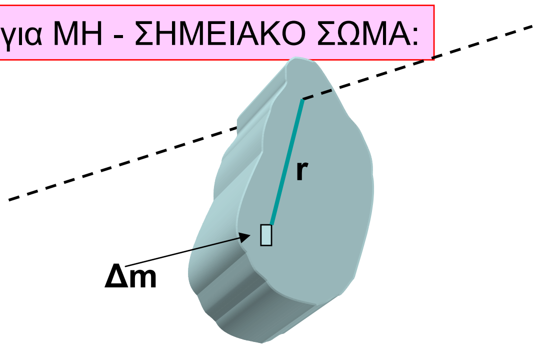
Αντιστοιχεί: ... στη μάζα ενός σώματος που εκφράζει την αντίσταση ενός σώματος που τείνει να κινηθεί

Μαθηματικός ορισμός για ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΣΩΜΑ:

Ροπή αδράνειας σημειακής μάζας m που περιστρέφεται γύρω από ορισμένο άξονα από τον οποίο απέχει απόσταση r $\Rightarrow$ $\boxed{I = mr^2}$

Μαθηματικός ορισμός για ΜΗ - ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΣΩΜΑ:

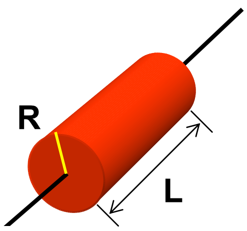
$$\boxed{I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2}$$



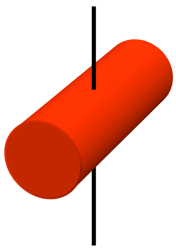
Μονάδα μέτρησης
$kg \cdot m^2$

Ροπή αδράνειας

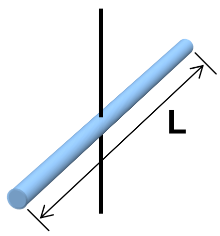
Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από το **σχήμα** του σώματος και από τον **άξονα** ως προς τον οποίο γίνεται η περιστροφή



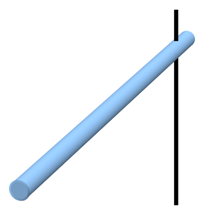
$$I = \frac{MR^2}{2}$$



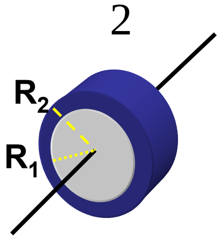
$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$$



$$I = \frac{ML^2}{12}$$

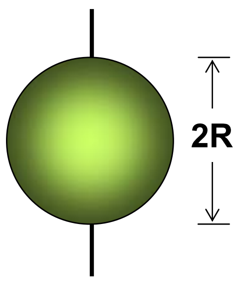


$$I = \frac{ML^2}{3}$$



$$I = \frac{M\left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2}$$

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$



Άσκηση

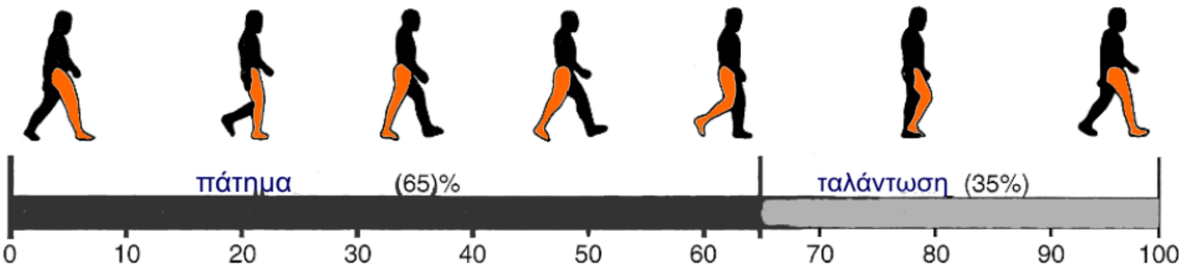
Μια μπάλα Χριστουγεννιάτικου δέντρου ακτίνας 5cm και μάζας 15gr είναι κρεμασμένη σε ένα κλαδί του δέντρου και εκτρέπεται κατά μικρή γωνία από τη θέση ισορροπίας της. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης ($g=9.81 m/s^2$, ροπή αδράνειας = $(7/5)MR^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{7MR^2}{5}\frac{1}{MgR}} =$$

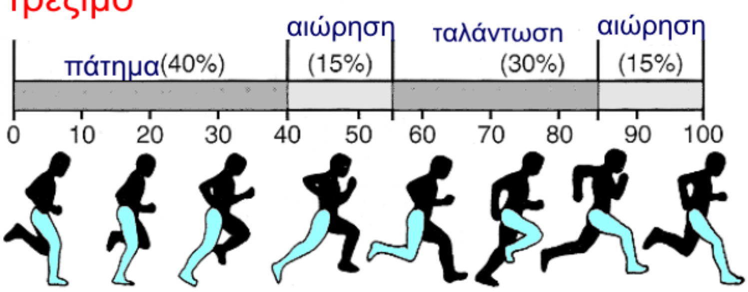
$$= 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}} = 2\pi\sqrt{\frac{7\cdot 0.05}{5\cdot 9.81}} = 0.53\text{sec}$$

Ο φυσικός βηματισμός

βάδισμα

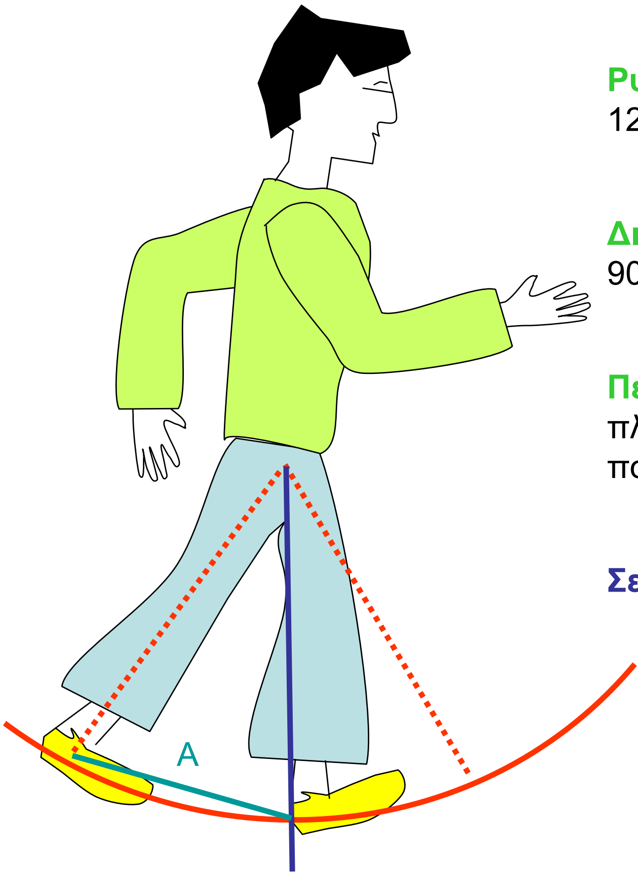


τρέξιμο



Ο φυσικός βηματισμός

Μελέτη με ισοδύναμο μαθηματικού εκκρεμούς



Ρυθμός βηματισμού
120 βήματα / min = 2 βημ / sec

Διασκελισμός
90 **cm**

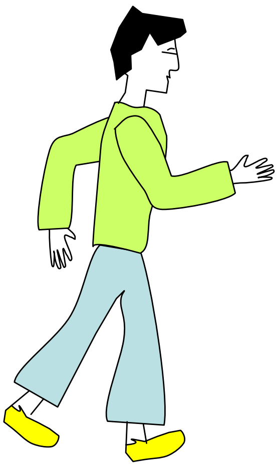
Περίοδος
πλήρης κίνηση μπρος – πίσω του ποδιού = 2 βήματα

Σε μία περίοδο γίνονται δύο βήματα

$\boxed{T=1sec}$

Ο φυσικός βηματισμός

Μελέτη με ισοδύναμο μαθηματικού εκκρεμούς



Μέση ταχύτητα διασκελισμού

Μήκος διασκελισμού

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{0.9}{0.5} = 1.8\frac{m}{s}$$

Χρόνος που αντιστοιχεί σε ένα βήμα

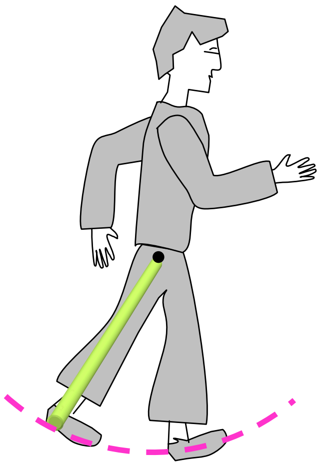
Μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_{\max} = A\omega = \frac{0.9}{2}\frac{2\pi}{T} = \frac{0.9}{2}\frac{2\pi}{1} = 2.83\frac{m}{s}$$

Μέγιστη επιτάχυνση

$$a_{\max} = A\omega^2 = \frac{0.9}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 17.7\frac{m}{s^2} \sim 1.8g$$

Ο φυσικός βηματισμός



Το πόδι μπορεί να θεωρηθεί ως μία ράβδος η οποία κινείται γύρω από άξονα που βρίσκεται στο ισχίο

Μήκος ποδιού: L~0.9m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Ροπή αδράνειας $\quad I = \frac{mL^2}{3}$

Απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής

Θέση κ.μ. ποδιού: L/2

Περίοδος: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mL^2}{3}}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 1.55\sec$

Ο ρυθμός βηματισμού εξαρτάται από το μήκος του ποδιού και είναι διαφορετικός για κάθε άνθρωπο

$$T \propto L^{1/2}$$

Ο φυσικός βηματισμός

Ταχύτητα βαδίσματος ∝ μήκος διασκελισμού × συχνότητα

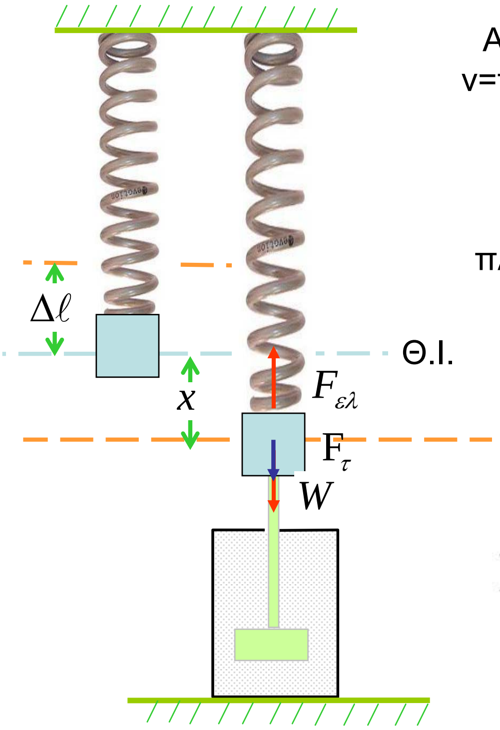
$$\upsilon \propto d \times \frac{1}{T}$$

$$d \propto L \qquad \frac{1}{T} \propto \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\upsilon \propto \sqrt{L}}$$

Η ταχύτητα του βαδίσματος εξαρτάται από το μήκος του ποδιού και είναι διαφορετική για κάθε άνθρωπο

Φθίνουσα ταλάντωση με μικρή απόσβεση

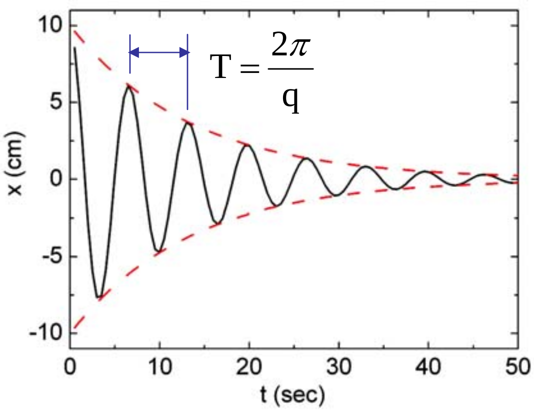


Από το υγρό ασκειται δύναμη F_T =(-)βv όπου v=ταχύτητα και β ένας συντελεστής απόσβεσης

$$x = x_0 e^{-\frac{\beta t}{2m}} \cos(qt + \varphi)$$

πλάτος της ταλάντωσης → $x_n = x_0 e^{-\frac{\beta t}{2m}}$

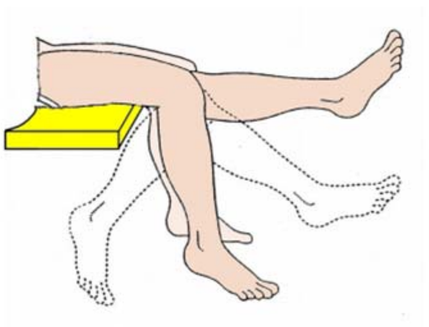
Για μικρή απόσβεση (0<β<β_κ) $\beta_\kappa \equiv 2\sqrt{mk}$

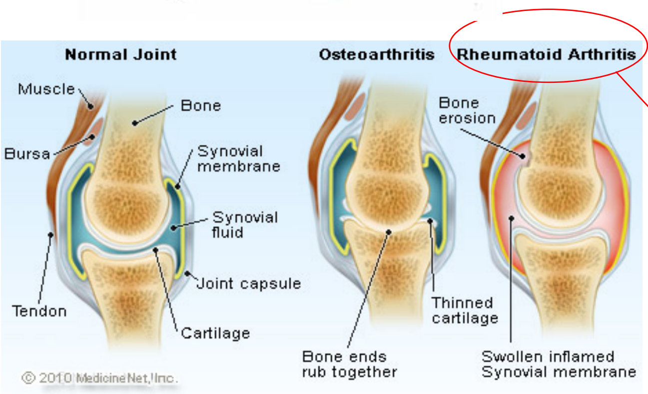


$$q = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$$

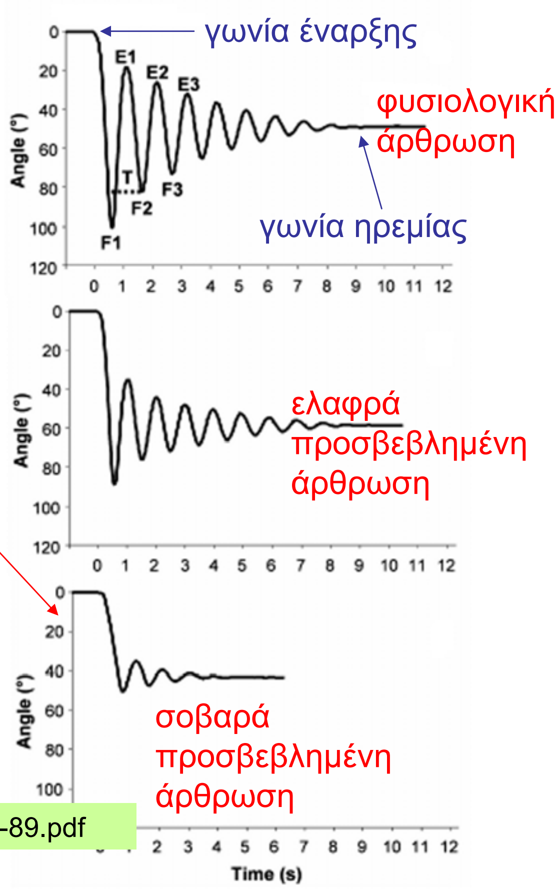
Φθίνουσα ταλάντωση με μικρή απόσβεση

κνήμη εκτελέσει ταλάντωση →μπορεί να εκτιμηθεί ποσοτικά η τριβή στο γόνατο





http://www.biomedcentral.com/content/pdf/1471-2474-7-89.pdf



Άσκηση

Ένα απλό εκκρεμές έχει περίοδο 1.2sec στη Γη ($g=9.8 m/s^2$).
Πόση είναι η περίοδος του στην επιφάνεια της Σελήνης όπου $g=1.62 m/s^2$.

$$T_\Gamma = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\Gamma}} \qquad T_\Sigma = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\Sigma}}$$

$$\frac{T_\Gamma}{T_\Sigma} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\Gamma}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\Sigma}}} = \sqrt{\frac{g_\Sigma}{g_\Gamma}} = \sqrt{\frac{1.62}{9.8}} = 0.406 \Rightarrow T_\Sigma = \frac{1.20}{0.406} = 2.95\sec$$

Άσκηση

Να βρεθεί το μήκος ενός απλού εκκρεμούς που ολοκληρώνει 100 πλήρεις ταλαντώσεις σε 75 sec σε μία περιοχή όπου $g=9.80 m/s^2$.

Υπολογισμός συχνότητας (ταλαντώσεις / sec)

$$\frac{100}{75} = 1.33Hz$$

Υπολογισμός περιόδου

$$T = \frac{1}{f} = \frac{75}{100} = 0.75\sec$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g = \left(\frac{0.75}{6.28}\right)^2 9.8 = 0.140m$$

Άσκηση

Ένα παιδάκι κάνει κούνια με μέγιστη απομάκρυνση 2m από τη θέση ισορροπίας. Αν η μέγιστη επιτάχυνση είναι $0.5 m/s^2$ να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

$$a_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{0.5}{2}} = 0.5 \sec$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi \sec$$

Άσκηση

Ένα οριζόντιο ελατήριο έχει σταθερά k=20N/m. Στην άκρη του ελατηρίου δένεται σώμα βάρους 8N, συμπιέζεται κατά 4cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβές.
α) Ποια είναι η περίοδος και το πλάτος της ταλάντωσης;
β) Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση;
γ) Να βρεθεί η ολική ενέργεια του συστήματος και η εξίσωση της κίνησης.
($g=10m/s^2$)

α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.8}} = 5\frac{rad}{\sec} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{5} = 1.26 \sec$

β) $\upsilon_{max} = A\omega = 0.04 \cdot 5 = 0.2 \frac{m}{s}$

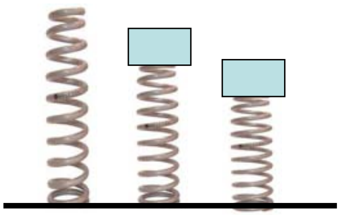
$$a_{max} = A\omega^2 = 0.04 \cdot 5^2 = 1\frac{m}{s^2}$$

γ) $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}20 \cdot 0.04^2 = 0.016J = 16mJ$

Εξίσωση κίνησης
$x = 0.04 \cdot \cos(5t)$

Άσκηση

Τα αμορτισέρ ενός παλιού αυτοκινήτου μάζας 1000kg είναι εντελώς φθαρμένα. Όταν άτομο με βάρος 980N μπαίνει αργά στο αυτοκίνητο (στο κέντρο βάρους του) το αυτοκίνητο χαμηλώνει κατά 2.8cm. Όταν το αυτοκίνητο περνά από ένα «σαμαράκι» αρχίζει να ταλαντώνεται πάνω – κάτω εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρήστε ότι το αυτοκίνητο και ο άνθρωπος αποτελούν ενιαίο σώμα στερεωμένο σε ένα μόνο ελατήριο και βρείτε τη συχνότητα και την περίοδο της ταλάντωσης. (* ελατήρια παράλληλα $k=k_1+k_2$, $g=9.8m/s^2$)



$$w = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{980}{0.028} = 3.5\times10^4 \frac{N}{m}$$

Μάζα που ταλαντώνεται: $\frac{w}{g} + M = \frac{980}{9.8} + 1000 = 1100kg$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.5\times10^4}{1100}} = 5.64\frac{rad}{\sec}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{5.64} = 1.11\sec$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.11} = 0.9Hz$$

Άσκηση

Μία μάζα ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $x[cm] = 6\cdot\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
Να βρεθούν, για t=2sec:
α) η φάση, η συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης
β) η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση

- Φάση: $6\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3} = 60°$
- $\omega = 3\pi\frac{rad}{\sec}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\sec$
- $f = \frac{1}{T} = \frac{3}{2}Hz$

Άσκηση

Μία μάζα ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $x[cm] = 6 \cdot \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
Να βρεθούν, για t=2sec:
α) η φάση, η συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης
β) η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση

- $x = 6 \cdot \cos\left(3\pi 2 + \frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot 0.5 = 3cm$
- $\upsilon = -A\omega \cdot \sin\left(3\pi 2 + \frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot 3\pi \cdot \sin\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -18\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

  $= -18\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -9\sqrt{3}\pi \frac{cm}{s}$
- $a = -A\omega^2 \cdot \cos\left(3\pi 2 + \frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot (3\pi)^2 \cdot \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -54\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

  $= -54\pi^2 \cdot \frac{1}{2} = -27\pi^2 \frac{cm}{s^2}$