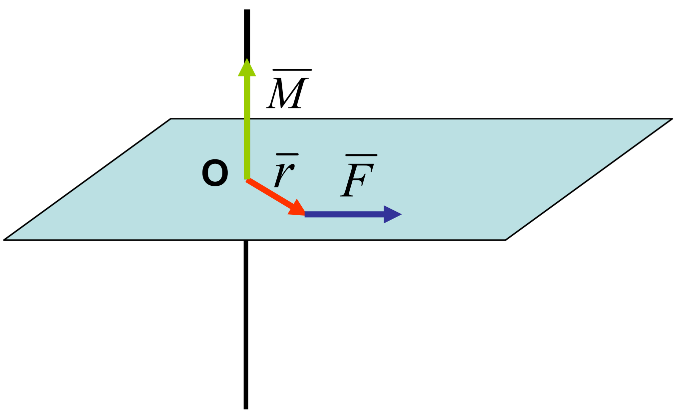
3 Ροπή δύναμης – ισορροπία σωμάτων

- **Ορισμός**
- **Συνθήκες ισορροπίας στερεού**
- **Κέντρο βάρους**
- **Ευσταθής – ασταθής ισορροπία**
- **Μοχλοί**
- **Στατική μελών του σώματος**

Μαρία Κατσικίνη
katsiki@auth.gr
users.auth.gr/katsiki

Ροπή δύναμης - ορισμός

... είναι η αιτία που προκαλεί την περιστροφή ενός σώματος



Ροπή της δύναμης F **ως προς το σημείο O** ονομάζεται το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης με τη δύναμη.

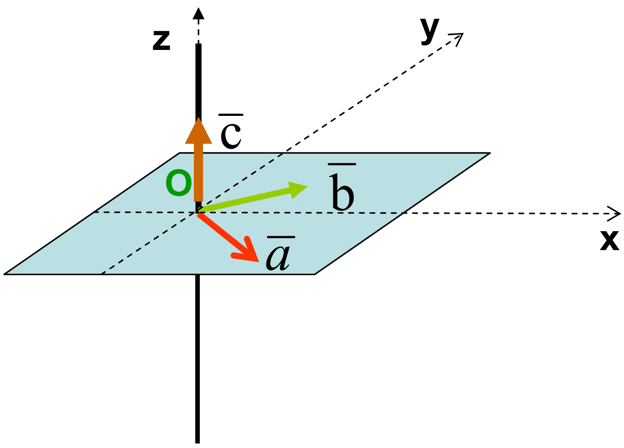
$$\boxed{\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}}$$

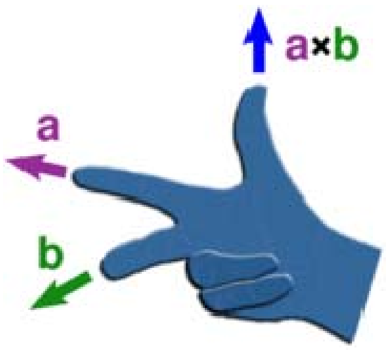
$$\overline{\tau}$$

Η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος ***κάθετο*** *στο επίπεδο που ορίζεται από την F και το r.*

Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$\boxed{\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}}$$





Διάνυσμα $\overline{a}$

$$\overline{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$$

Διάνυσμα $\overline{b}$

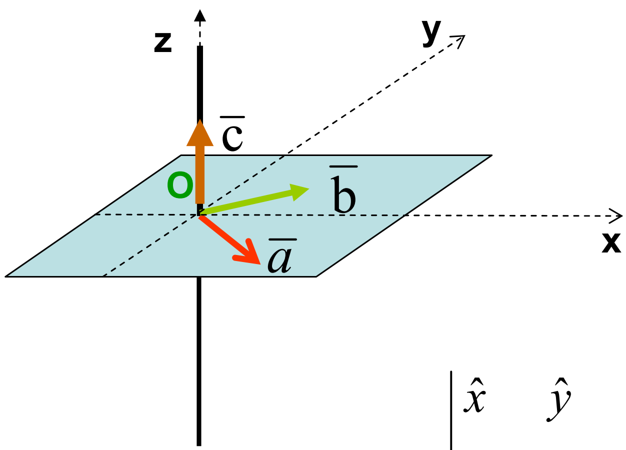
$$\overline{b} = b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}$$

Διάνυσμα $\overline{c}$

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Μέτρο του διανύσματος c : $c = ab\sin\left(\widehat{a, b}\right)$

Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων



Παράδειγμα:

$$\overline{a} = 2\hat{x} - 2\hat{y}$$

$$\overline{b} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$$

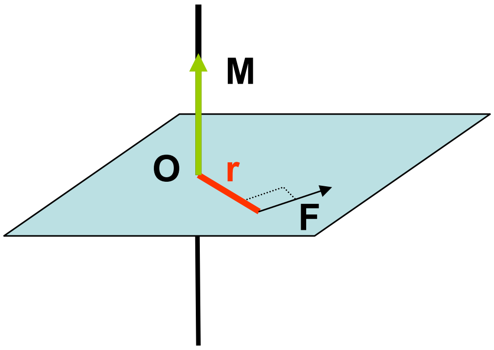
$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2\cdot 0 - 0\cdot 4)\hat{x} - (2\cdot 0 - 0\cdot 3)\hat{y} + (2\cdot 4 + 2\cdot 3)\hat{z} =$$

$$= 14\hat{z}$$

Ροπή δύναμης

Ροπή $\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F}$

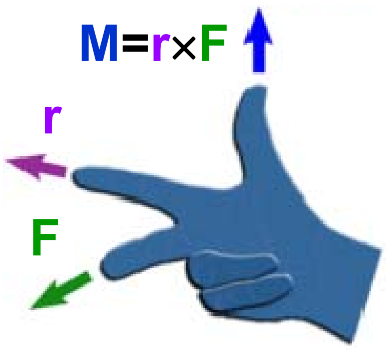


Όταν η **F είναι κάθετη** στην διεύθυνση που ενώνει το σημείο O και το σημείο εφαρμογής της F

$$F \perp r \Rightarrow M = rF$$

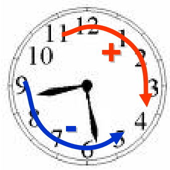
Μονάδα μέτρησης της ροπής
N.m

Σύμβαση για τη φορά της ροπής

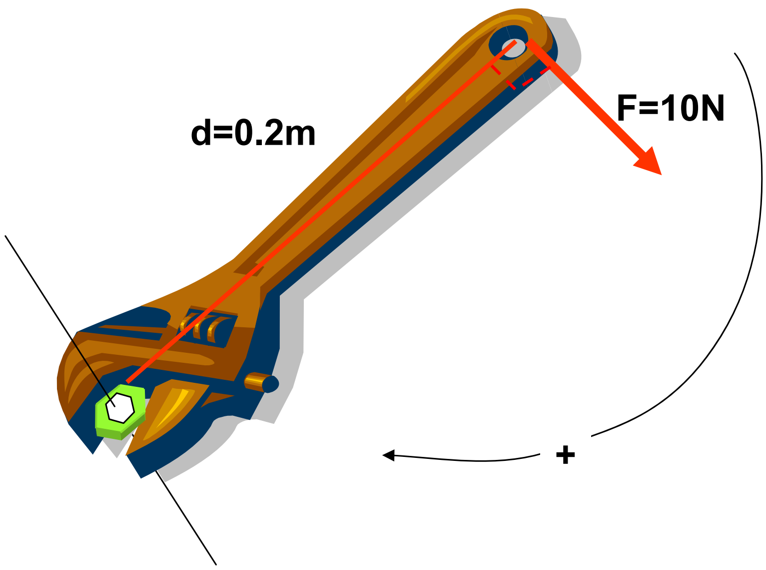


Εναλλακτική σύμβαση για τη φορά της ροπής

- Θετική όταν τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα
- Αρνητική όταν τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα



Ροπή δύναμης

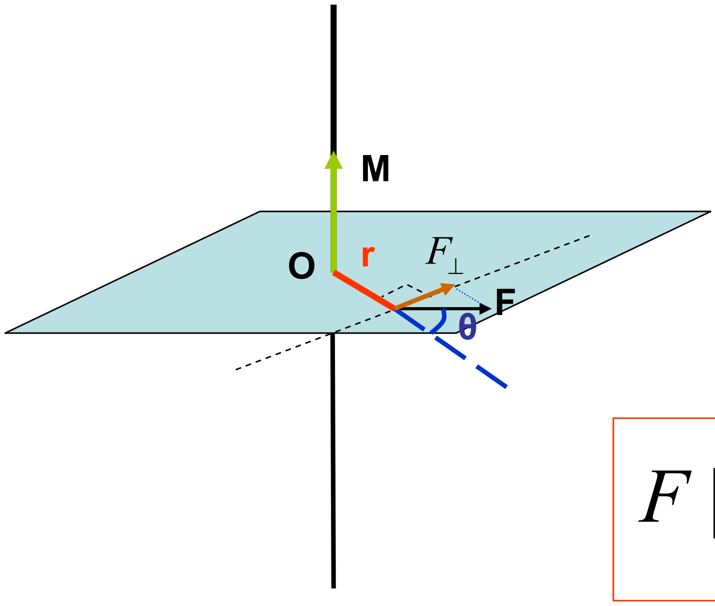


$$M = 0.2 \times 10 = 2N{\cdot}m$$

Ροπή δύναμης

Όταν η F **δεν** είναι κάθετη στην r: $\boxed{M = rF\sin\theta}$

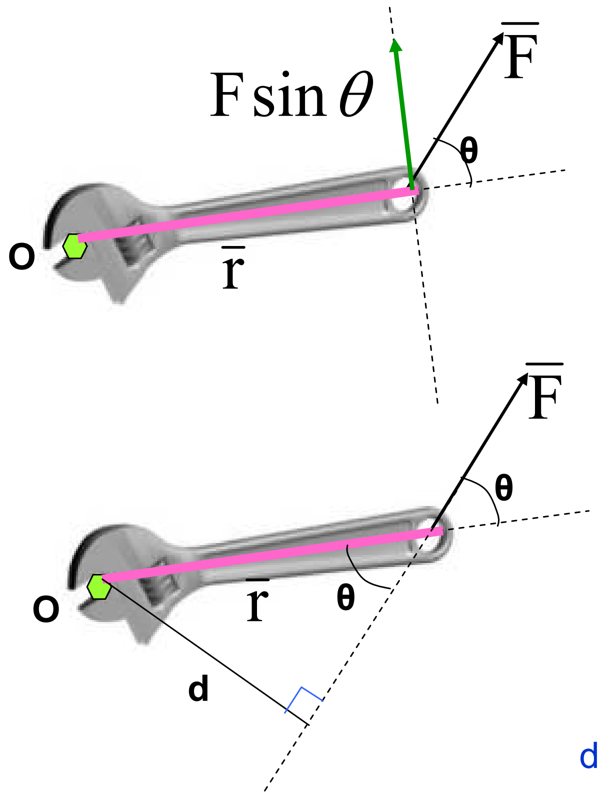
όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι r και F



Ροπή προκαλεί μόνο η συνιστώσα της F που είναι κάθετη στην r

$$F \parallel r \Rightarrow M = 0$$

Ροπή δύναμης



$$M = r(F\sin\vartheta)$$

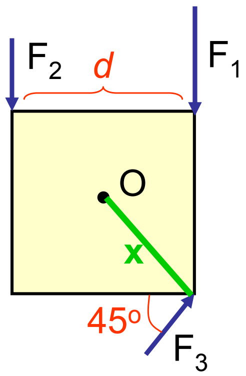
$$M = F(r\sin\vartheta)$$

$$\sin\theta = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r\sin\theta$$

d: απόσταση O από το φορέα της F

Παράδειγμα

Μία τετράγωνη μεταλλική πλάκα πλευράς 0.18m περιστρέφεται γύρω από άξονα O που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στην πλάκα. Να υπολογιστεί η συνολική ροπή ως προς το σημείο O που οφείλεται στις τρεις δυνάμεις F_1=24N, F_2=16N και F_3=18N.



$$x^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{2\left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\frac{d}{2}$$

$$\left|\sum \overline{M}\right| = \left|\overline{M}_1\right| - \left|\overline{M}_2\right| - \left|\overline{M}_3\right| =$$
$$= +F_1\frac{d}{2} - F_2\frac{d}{2} - F_3\sqrt{2\left(\frac{d}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{d}{2}(F_1 - F_2 - F_3\sqrt{2}) =$$
$$= \frac{0.18}{2}(24 - 16 - 18\cdot 1.41) = -1.57\text{Nm}$$

Ισορροπία σώματος

Ένα σώμα ισορροπεί όταν:

$$\sum \overline{F} = 0 \qquad \textbf{και} \qquad \sum \overline{M} = 0$$

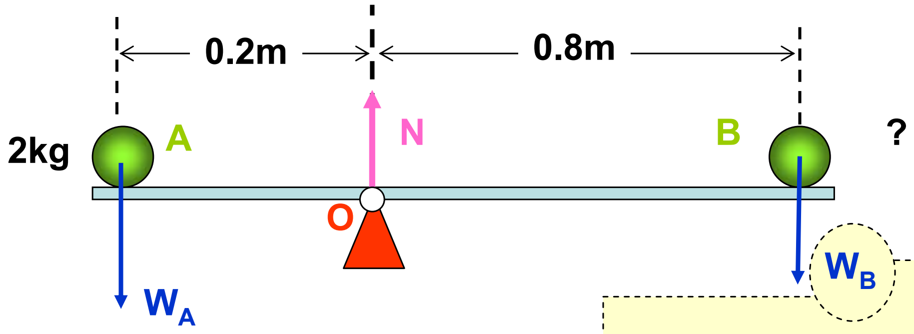
Η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στο σώμα είναι ίση με μηδέν

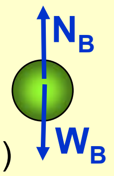
Η συνισταμένη των ροπών όλων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι ίση με μηδέν

Και οι δύο συνθήκες είναι <u>απαραίτητες</u> για ένα σώμα που δεν μπορεί να θεωρηθεί σημειακό (όταν όλες οι δυνάμεις δεν έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής)

Παράδειγμα

Πόση πρέπει να είναι η μάζα του σώματος Β για να ισορροπεί η (αβαρής) δοκός;





α) Συνθήκη ισορροπίας για το σώμα Β: $N_B=W_B$
β) $N'_B=N_B$ (δράση – αντίδραση)
γ) N'_B : δύναμη που ασκείται από το σώμα Β στη δοκό

Για να ισορροπεί η δοκός θα πρέπει :

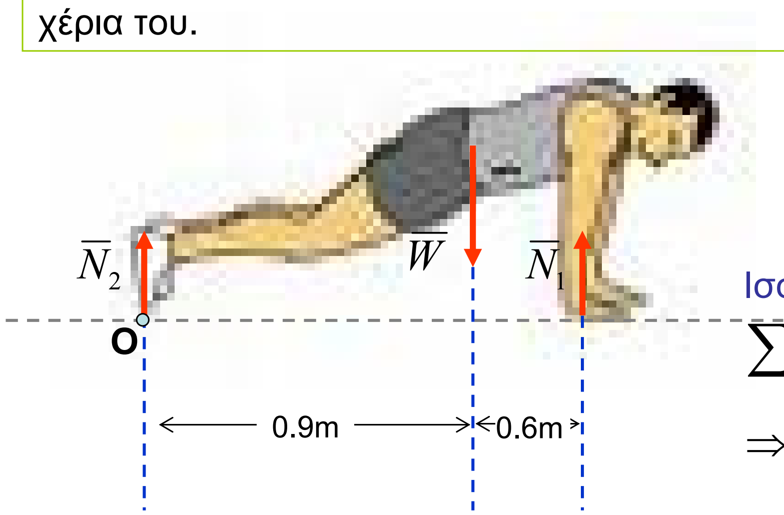
$$\sum \overline{F}=0 \Rightarrow W_A+W_B=N$$

$$\sum \overline{M}=0 \Rightarrow -W_A\cdot d_A+W_B\cdot d_B+N\cdot 0=0 \Rightarrow W_A\cdot d_A=W_B\cdot d_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_B=W_A\frac{d_A}{d_B} \Rightarrow m_B g=m_A g\frac{d_A}{d_B} \Rightarrow m_B=m_A\frac{d_A}{d_B} \Rightarrow m_B=2\frac{0.2}{0.8}=0.5kg$$

Άσκηση

Ένας αθλητής βάρους 900N έχει τη στάση του σχήματος. Αν η προβολή του κέντρου μάζας του σώματός του στο έδαφος απέχει 60cm από τα χέρια και 90cm από το σημείο στήριξης να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται στα πόδια και τα χέρια του.



Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y=0 \Rightarrow N_1+N_2=W \quad (1)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο:

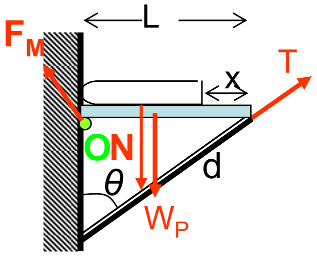
$$\sum \overline{M}=0 \Rightarrow W\cdot 0.9=N_1\cdot(0.9+0.6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1=900\frac{0.9}{1.5} \Rightarrow N_1=540N \quad (2)$$

$$(1),(2) \quad N_2=W-N_1=900-540 \Rightarrow N_2=360N$$

Άσκηση

Ένα ράφι πλάτους 0.4m στηρίζεται στον τοίχο με ένα μεντεσέ και κρατιέται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια μιας ράβδου μήκους 0.5m. Το βάρος του ραφιού είναι 10N. Ένα βιβλίο βάρους 50N είναι τοποθετημένο στο ράφι έτσι ώστε να αφήνει 0.1m καθαρή απόσταση από το άκρο του ραφιού. Να υπολογιστεί η τάση στη ράβδο (*η ράβδος ασκεί δύναμη κατά μήκος της).*



$$\sin\theta = \frac{L}{d} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \Rightarrow \theta = 53.1^\circ$$

Δυνάμεις που ασκούνται στο ράφι

Βάρος του ραφιού	Αντίδραση του βιβλίου
Τάση της ράβδου	Αντίδραση στο μεντεσέ

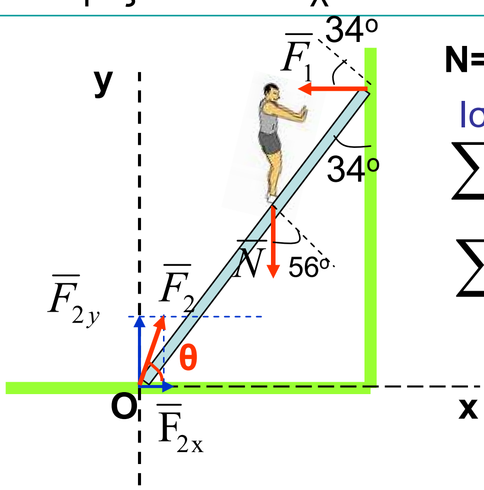
Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο

$$\sum \overline{M}_0 = 0 \Rightarrow W_P \frac{L}{2} + N\frac{L-x}{2} = T\cos\theta \cdot L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot 0.2 + 50\cdot 0.15 = T\cdot 0.6\cdot 0.4 \Rightarrow T = 39.6N$$

Άσκηση

Ένας εργάτης βάρους 1000N βρίσκεται πάνω σε μία σκάλα μήκους 3.6m, η οποία στηρίζεται σε τοίχο με τον οποίο σχηματίζει γωνία 34°. Ο εργάτης απέχει 0.9m από την κορυφή της σκάλας. Το βάρος της σκάλας και η τριβή με τον τοίχο είναι αμελητέα. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη σκάλα από το έδαφος και τον τοίχο.



N=W

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow N = F_2\sin\theta \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2\cos\theta \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow N\cos 56\cdot(3.6-0.9) = F_1\cos 34\cdot 3.6$$

$$\Rightarrow F_1 = 506N \quad (3)$$

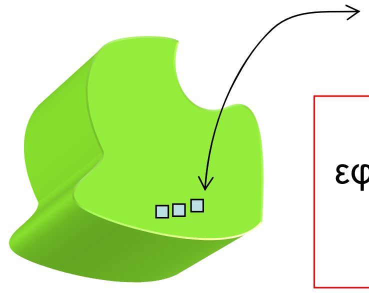
(1) & (2) $\dfrac{N}{F_1} = \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = 1.98 \Rightarrow \theta = 63.2^\circ$

(2) $F_2 = \dfrac{F_1}{\cos\theta} = \dfrac{506}{0.45} = 1122N$ **(κάθετη αντίδραση εδάφους & τριβή)**

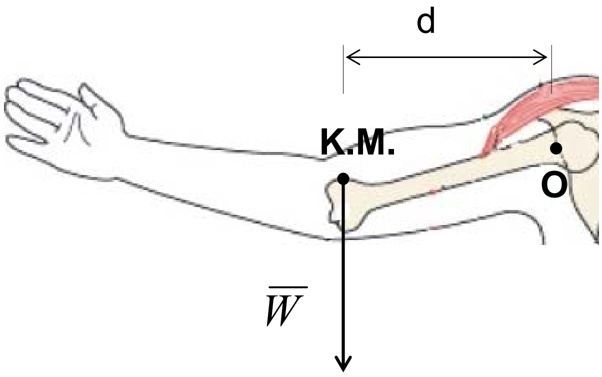
Κέντρο μάζας

Κέντρο μάζας είναι το σημείο εκείνο του σώματος στο οποίο θεωρούμε ότι συγκεντρώνεται όλη η μάζα του σώματος.

Κάθε στοιχειώδης μάζα δέχεται τη δύναμη της βαρύτητας



Κέντρο μάζας (ή κέντρο βάρους) είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων βαρύτητας που ασκούνται σε κάθε σωματίδιο από το οποίο αποτελείται το σώμα.



Ροπή του βάρους του χεριού:
Wd

Κέντρο μάζας

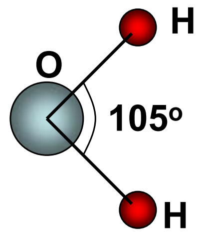
Μαθηματικός ορισμός:

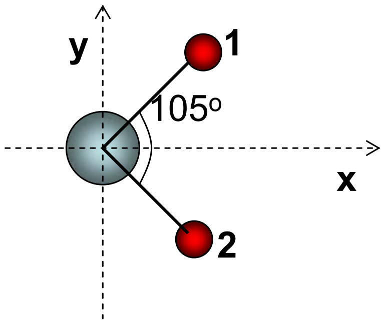
Έστω αριθμός σωματιδίων μάζας m_i με συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i). Το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ένα σημείο με συντεταγμένες:

$$x_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{KM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{KM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Άσκηση

Στο σχήμα φαίνεται η απλοποιημένη εικόνα της δομής του μορίου του νερού. Να βρείτε το κέντρο μάζας του μορίου αν το μήκος του δεσμού H-O είναι d=0.957Å. Θεωρήστε ότι η μάζα του H και του O είναι αντίστοιχα 1 και 16 u ($1u=1.66\times10^{-27}$kg).





Συντεταγμένες ατόμων

Οξυγόνο → $(0,0)$

Υδρογόνο [1] → $\left(d\cos\frac{105^\circ}{2}, d\sin\frac{105^\circ}{2}\right) = (0.583, 0.759)$

Υδρογόνο [2] → $(0.583, -0.759)$

$$x_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{16u\cdot 0 + 1u\cdot 0.583 + 1u\cdot 0.583}{16u + 1u + 1u} = 0.0648Å$$

$$y_{KM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{16u\cdot 0 + 1u\cdot 0.759 - 1u\cdot 0.759}{16u + 1u + 1u} = 0$$

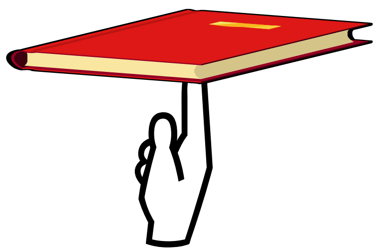
Κ.Μ. πολύ κοντά στο Ο, πάνω στον άξονα των x

Κέντρο μάζας

Ιδιότητες

1 Η ροπή του βάρους του σώματος ως προς το Κ.Μ. είναι πάντα μηδέν.

2 Το Κ.Μ. είναι το σημείο που πρέπει να στηριχθεί ένα σώμα για να ισορροπήσει (εμπειρική μέθοδος προσδιορισμού του Κ.Μ.)

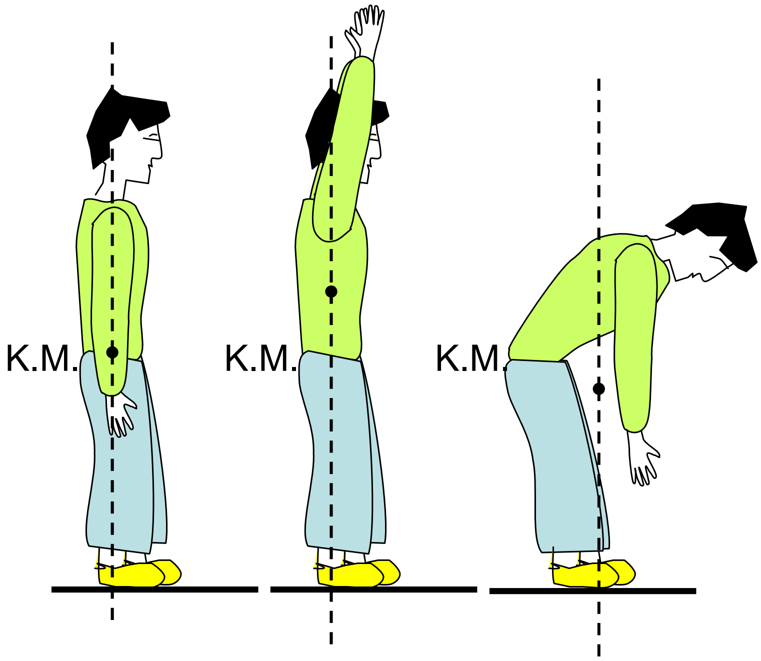


3 Στα στερεά σώματα το Κ.Μ. είναι απόλυτα καθορισμένο και δε μεταβάλλεται με την κίνηση του σώματος.

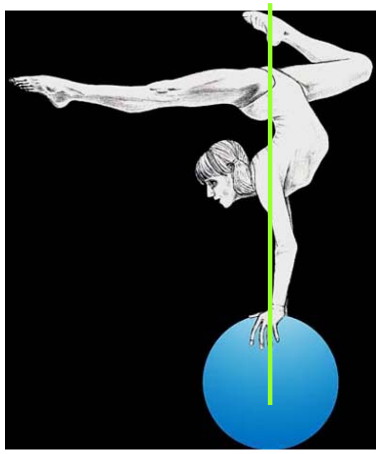
4 Στην περίπτωση εύκαμπτων αντικειμένων (όπως το ανθρώπινο σώμα) το Κ.Μ. αλλάζει με τη στάση του σώματος

Κέντρο μάζας

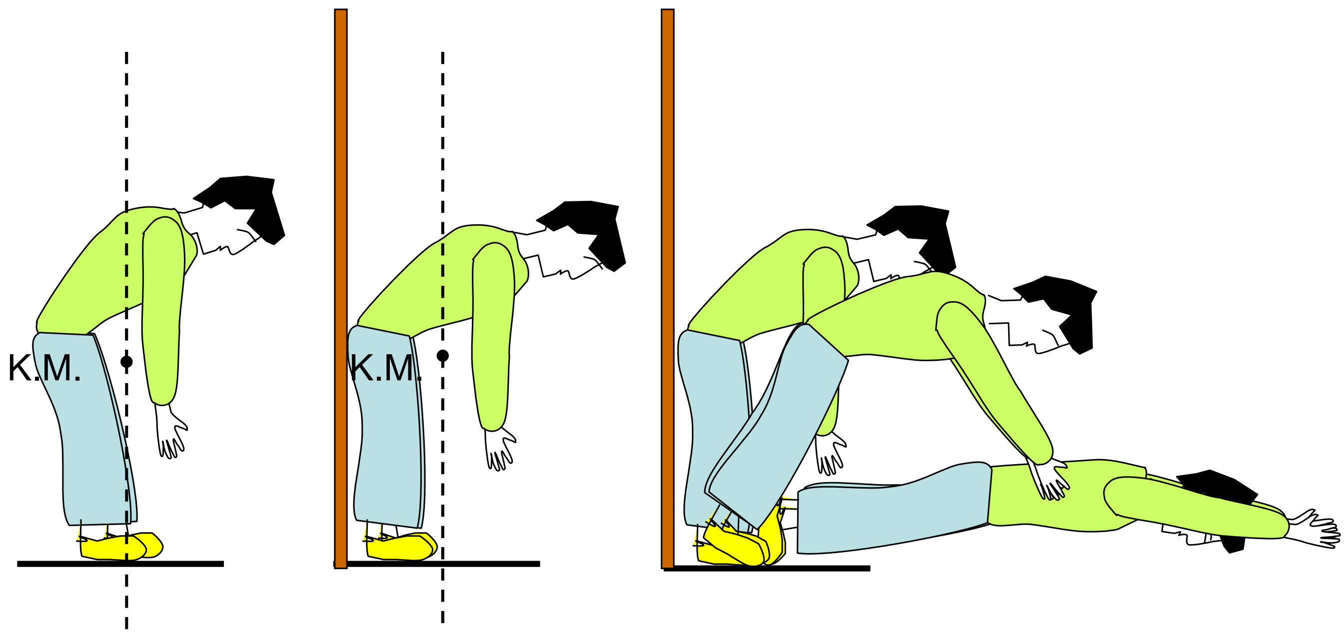
...στην περίπτωση εύκαμπτων αντικειμένων (όπως το ανθρώπινο σώμα) το Κ.Μ. μετατοπίζεται ανάλογα με τη στάση του σώματος.



Για να ισορροπεί και να μην πέφτει ο σκυμμένος άνθρωπος, θα πρέπει η κατακόρυφος που περνά από το Κ.Μ. να περνά και από τη βάση στήριξης.

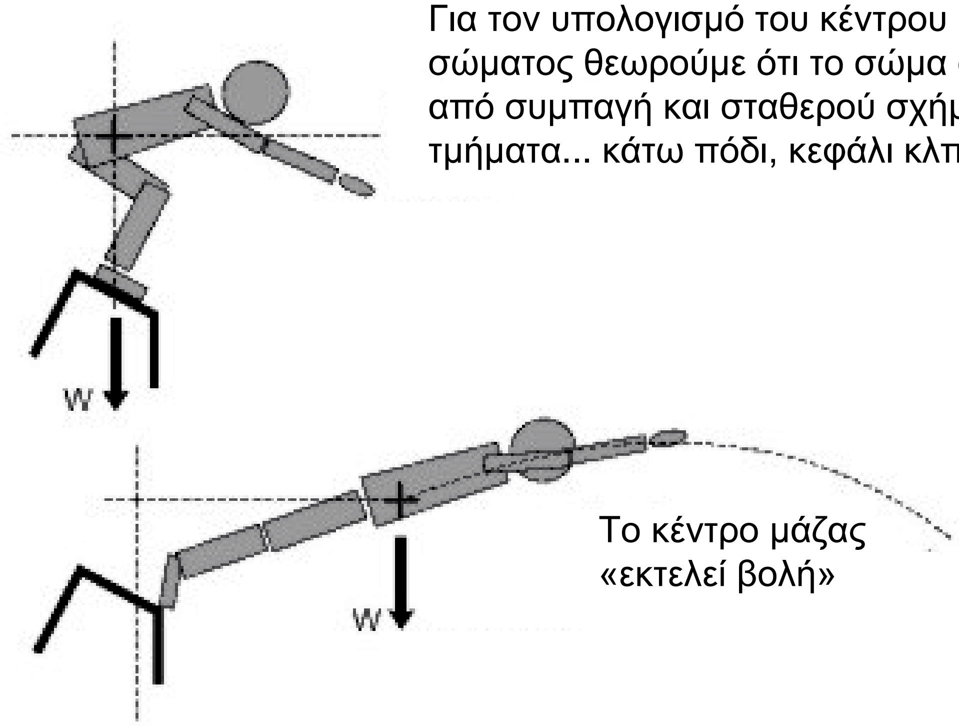


Ασταθής ισορροπία



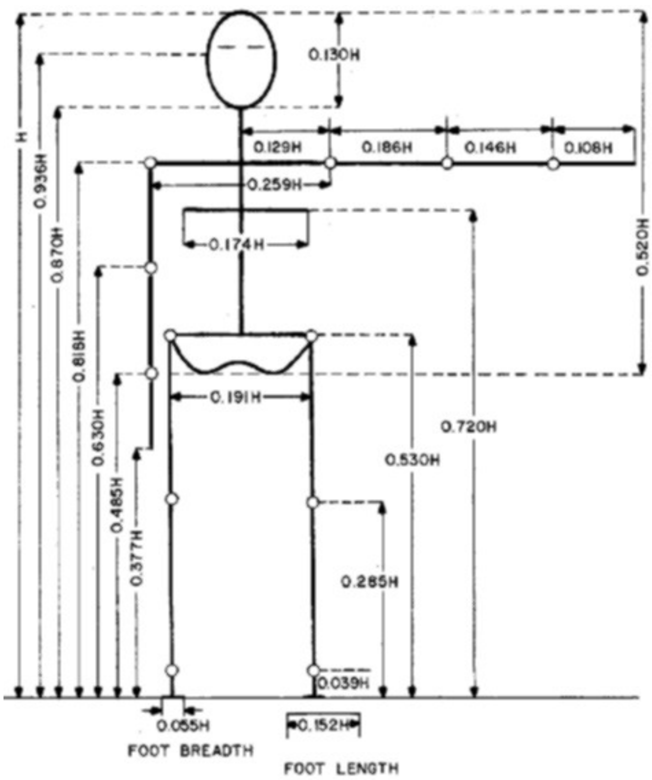
Κέντρο μάζας του σώματος - ισορροπία

Για τον υπολογισμό του κέντρου μάζας του σώματος θεωρούμε ότι το σώμα αποτελείται από συμπαγή και σταθερού σχήματος τμήματα... κάτω πόδι, κεφάλι κλπ



Sports and exercise biomechanics, P. Grimshaw & A. Burden (Taylor & Francis 2006)

Κέντρο μάζας του σώματος



Physics of the human body, Irving P. Herman

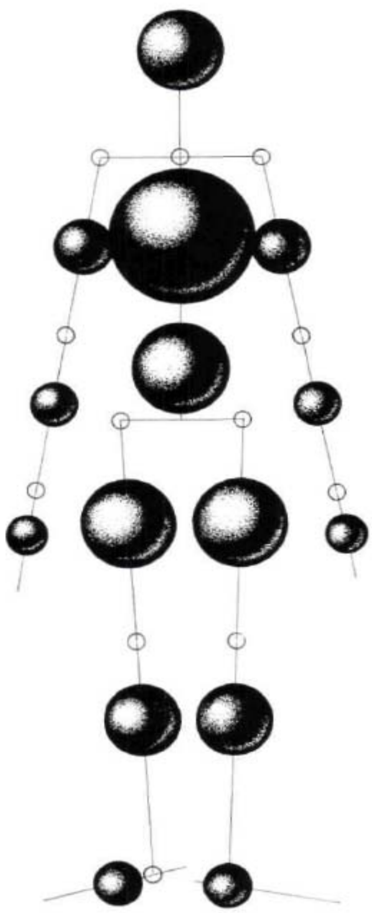


Fig. 3. Body mass distribution (After E. Harless).

Κέντρο μάζας του σώματος

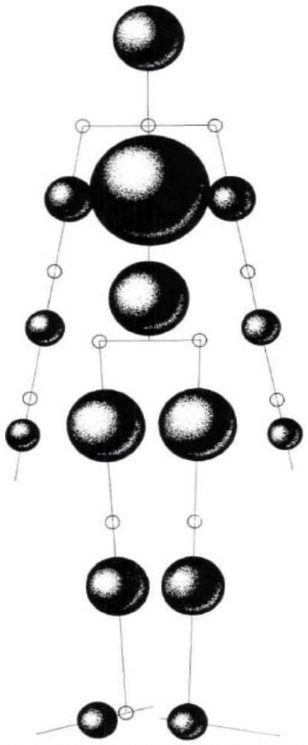


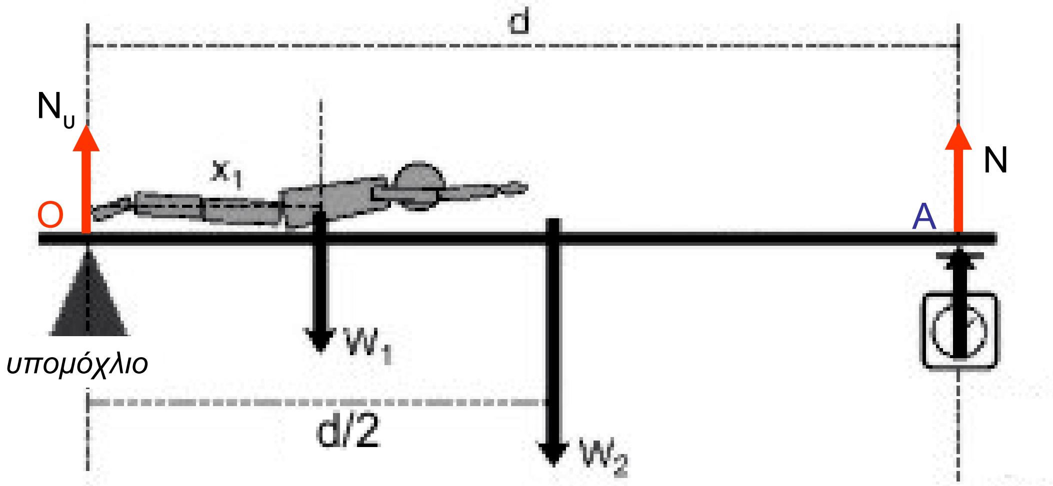
Fig. 3. Body mass distribution (After E. Harless).

Τμήμα του σώματος	Μάζα (M: μάζα όλου του σώματος)	Κέντρο μάζας του τμήματος (L: μήκος τμήματος)	
		Proximal	Distal
χέρι	$0.006\times M$	$0.506\times L$	$0.494\times L$
αντοβραχίονας	$0.016\times M$	$0.430\times L$	$0.570\times L$
βραχίονας	$0.028\times M$	$0.436\times L$	$0.564\times L$
πόδι (κάτω)	$0.0145\times M$	$0.50\times L$	$0.50\times L$
κνήμη	$0.0465\times M$	$0.433\times L$	$0.567\times L$
μηρός	$0.1\times M$	$0.433\times L$	$0.567\times L$
κεφάλι και λαιμός	$0.081\times M$	$1\times L$	$1\times L$
θώρακας	$0.497\times M$	$0.50\times L$	$0.50\times L$

Distal/ proximal (μακριά / κοντά στο κέντρο του σώματος)

- Physics of the human body, Irving P. Herman
- Body Segment Parameters: A Survey of Measurement Techniques, R. Drillis, R. Contini, M. Bluestein,

Εμπειρική μέθοδος υπολογισμού του Κ.Μ.



Ένδειξη ζυγαριάς = δύναμη που ασκεί η σανίδα στη ζυγαριά → ζεύγος δράσης – αντίδρασης με τη N

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow W_1 \cdot x_1 + W_2 \cdot \frac{d}{2} = N \cdot d \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{N}{W_1}\cdot d - \frac{W_2}{W_1}\cdot\frac{d}{2}}$$

- N = ένδειξη ζυγαριάς
- W_2=βάρος ομοιογενούς σανίδας
- W_1= βάρος ανθρώπου
- d = μήκος σανίδας

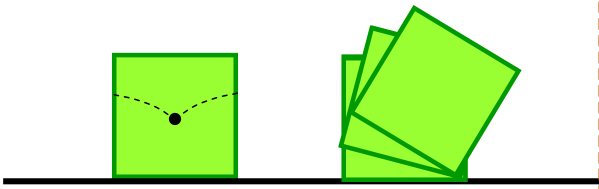
Sports and exercise biomechanics, P. Grimshaw & A. Burden (Taylor & Francis 2006)

Ισορροπία (Ευσταθής – Ασταθής)

Ευσταθής ισορροπία

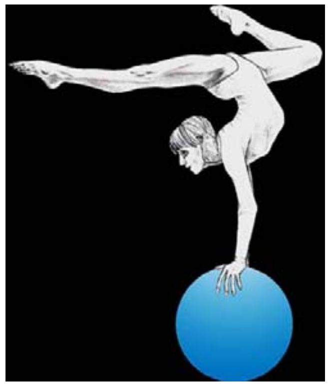
Εάν σώμα **εκτραπεί** από τη θέση ισορροπίας του έτσι ώστε το κέντρο βάρους του να **ανυψωθεί**, το σώμα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία

επανέρχεται στην αρχική του θέση μόλις αφεθεί ελεύθερο

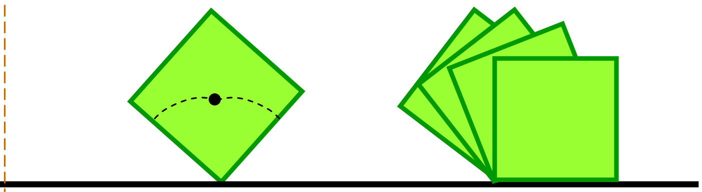


Ασταθής ισορροπία

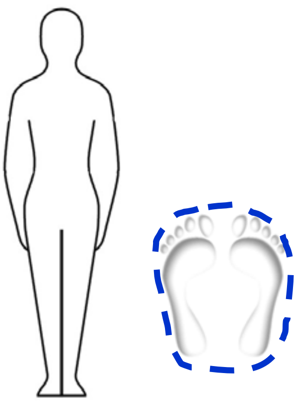
Εάν σώμα **εκτραπεί** από τη θέση ισορροπίας του έτσι ώστε το κέντρο βάρους του να **χαμηλώσει**, το σώμα βρίσκεται σε ασταθή ισορροπία



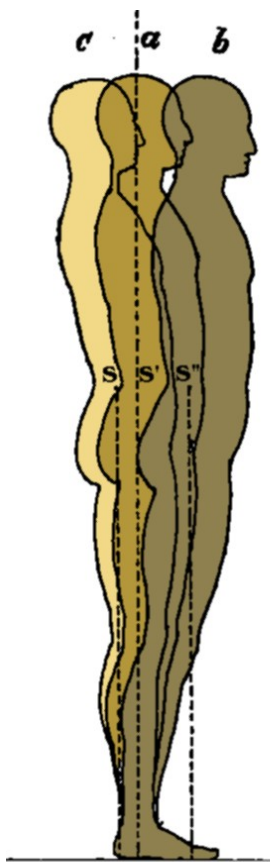
δεν επανέρχεται στην αρχική του θέση μόλις αφεθεί ελεύθερο



Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος



Όταν στεκόμαστε με ανοιχτά πόδια η βάση στήριξης είναι μεγαλύτερη



Lehrbuch der plastischen Anatomie
E. Harless (1856)

Κατά το βάδισμα, το Κ.Μ. μετατοπίζεται συνεχώς έτσι ώστε η κατακόρυφος που περνά από αυτό να περνά διαδοχικά από το δεξί ή το αριστερό πόδι

Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος

1 Πόση είναι η δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί για να πέσει άνθρωπος μάζας 75kg;

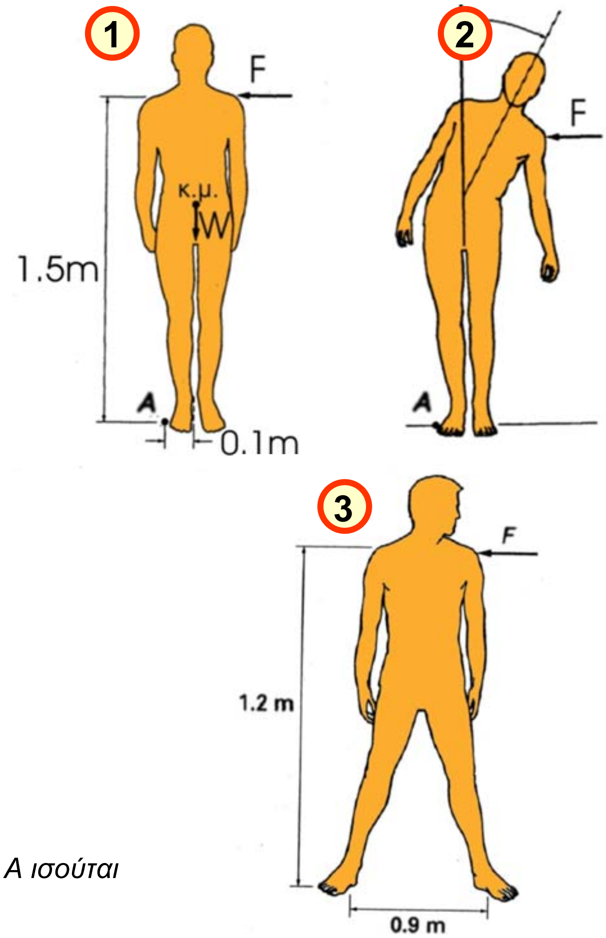
$$F \cdot 1.5 = W \cdot 0.1 = 0.1 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{0.1 \cdot m \cdot g}{1.5} = \frac{0.1 \cdot 75 \cdot 9.81}{1.5} = 49N$$

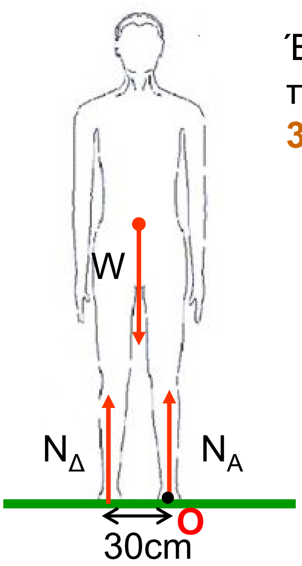
2 Ο άνθρωπος γέρνει προς τη μεριά άσκησης της δύναμης → το κ.μ. απομακρύνεται από το σημείο Α → είναι πιο δύσκολο να αναποδογυρίσει το σώμα

3 Ο άνθρωπος ανοίγει τα πόδια → το κ.μ. μετατοπίζεται προς τα κάτω + μεγαλώνει η βάση στήριξης

Η ροπή της τριβής και της κάθετης δύναμης στο σημείο Α ισούται με μηδέν για άξονα περιστροφής που περνά από το Α



Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος



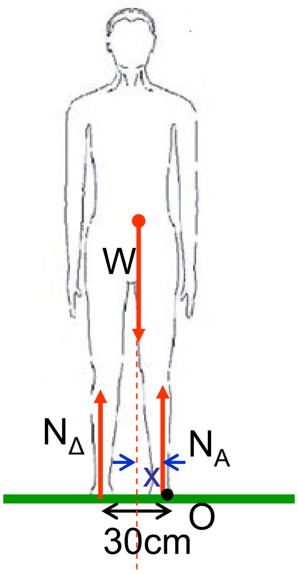
Έστω άνθρωπος βάρους **900N** που στηρίζεται στα δύο πόδια του με την απόσταση μεταξύ των πελμάτων να είναι **30cm**.

Ισορροπία δυνάμεων: $W = N_A + N_\Delta$

Ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο Ο:

$$W\frac{d}{2} = N_\Delta d \Rightarrow N_\Delta = \frac{W}{2} = 450N$$

Ισορροπία του ανθρώπινου σώματος



Αν λόγω τραυματισμού στο δεξί πόδι η N_Δ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 250N πόσο πρέπει να μετατοπιστεί το κέντρο βάρους του σώματος;

Ισορροπία δυνάμεων: $W = N_A + N_\Delta$

Ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο O:

$$Wx = N_\Delta d \Rightarrow Wx = N_\Delta d \Rightarrow$$

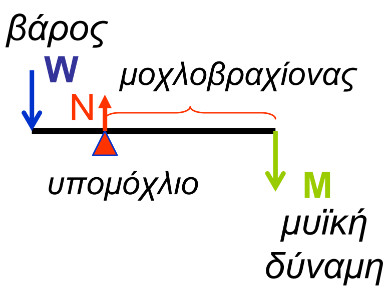
$$\Rightarrow x = \frac{N_\Delta}{W} d = \frac{250}{900} 30 = 8.3cm$$

Το Κ.Μ. μετατοπίστηκε κατά: 15-8.3=6.7cm

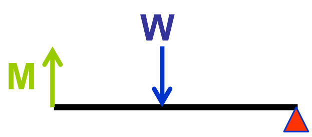
Μοχλοί

Συμπαγής δοκός ελεύθερη να περιστραφεί γύρω από σταθερό σημείο (υπομόχλιο)

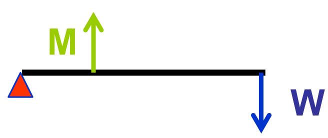
1ου είδους

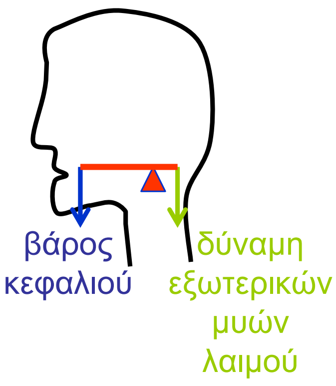


2ου είδους

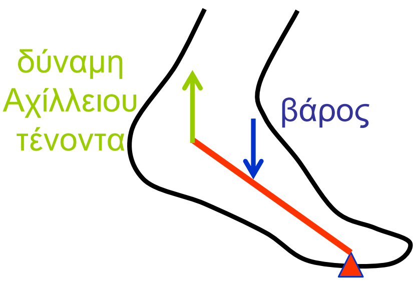


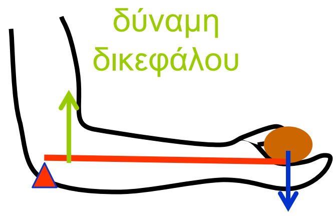
3ου είδους





Κοινοί στη μηχανική





Κοινοί στο σώμα

- Απαιτείται μεγαλύτερη μυϊκή δύναμη

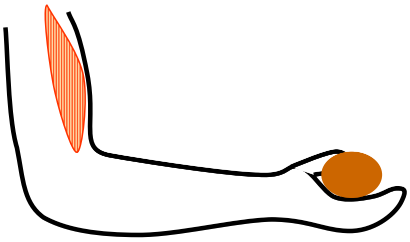
αλλά

- Ο μυς συστέλλεται λιγότερο
- Τα άκρα μπορούν να είναι λεπτά και περισσότερο ευκίνητα

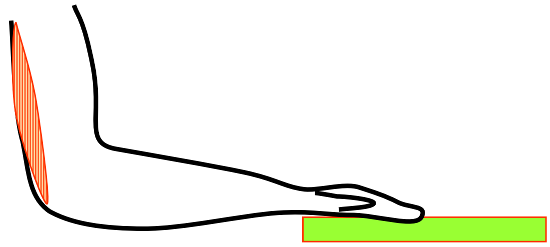
Σκελετικοί μύες

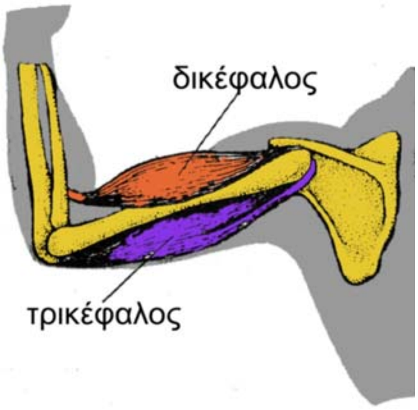
Επειδή οι μύες παράγουν έργο μόνο όταν συστέλλονται υπάρχουν συνήθως κατά ζεύγη

Δικέφαλος: βοηθά στο να ανασηκώνεται προς τα πάνω ο αντιβραχίονας

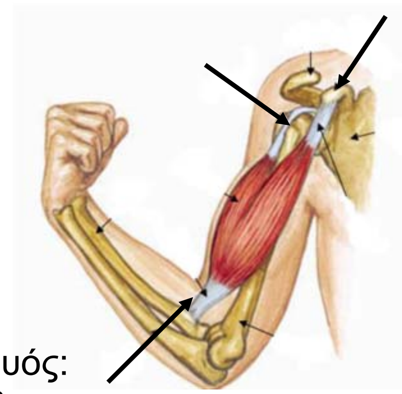


Τρικέφαλος : βοηθά στο να ασκεί δύναμη προς τα κάτω ο αντιβραχίονας





Οι μύες απολήγουν σε τένοντες, ο καθένας εκ των οποίων συνδέεται με διαφορετικό οστό



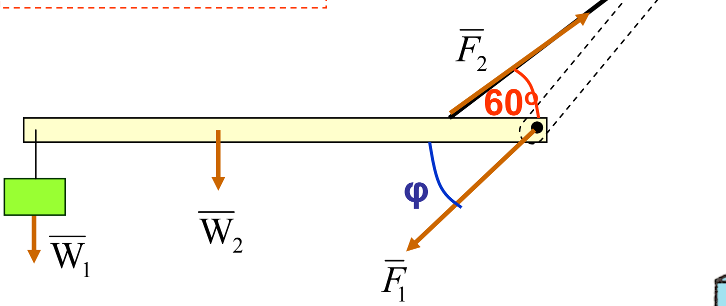
Μέγιστη δύναμη μυός: ~40 N ανά cm^2 του εμβαδού διατομής του

Άσκηση

Να υπολογιστεί η **συμπιεστική δύναμη που ασκείται στην άρθρωση του αγκώνα** και η **εκτατική δύναμη που ασκείται στον τένοντα** όταν κρατάμε στην παλάμη μάζα 6kg (βάρος = 60N). Το βάρος του αντιβραχίονα είναι 30N και η γωνία που σχηματίζει ο δικέφαλος με τον οριζόντιο άξονα είναι 60^o.

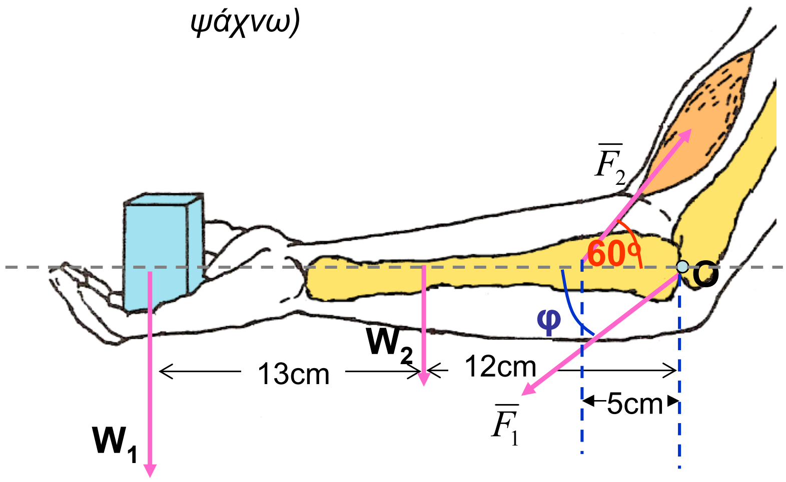
Μηχανικό ανάλογο:

Μοχλός 3ου είδους



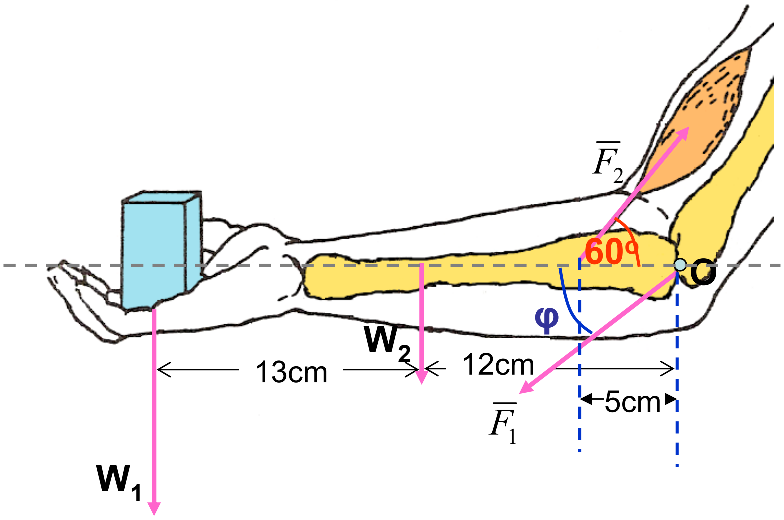
$\overline{F}_1$ *: δύναμη αντίδρασης από τον αγκώνα (κάθετη δύναμη) = ζεύγος δράσης – αντίδρασης με τη συμπιεστική δύναμη που ασκείται στην άρθρωση του αγκώνα (αυτή που ψάχνω)*

$\overline{F}_2$ *: δύναμη με την οποία ο τένοντας συγκρατεί τον αντιβραχίονα (~ τάση νήματος) = ζεύγος δράσης-αντίδρασης με την εκτατική δύναμη που ασκείται από τον αντιβραχίονα στον τένοντα (αυτή που ψάχνω).*



Άσκηση

Να υπολογιστεί η συμπιεστική τάση που ασκείται στην άρθρωση του αγκώνα και η εκτατική τάση που ασκείται από τον τένοντα στον αντιβραχίονα όταν κρατάμε στην παλάμη βάρος 60N. Το βάρος του αντιβραχίονα είναι 30N και η γωνία που σχηματίζει ο δικέφαλος με τον οριζόντιο άξονα είναι 60°.



Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow$$

$$W_1 + W_2 + F_1 \sin\varphi = F_2 \sin 60 \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow$$

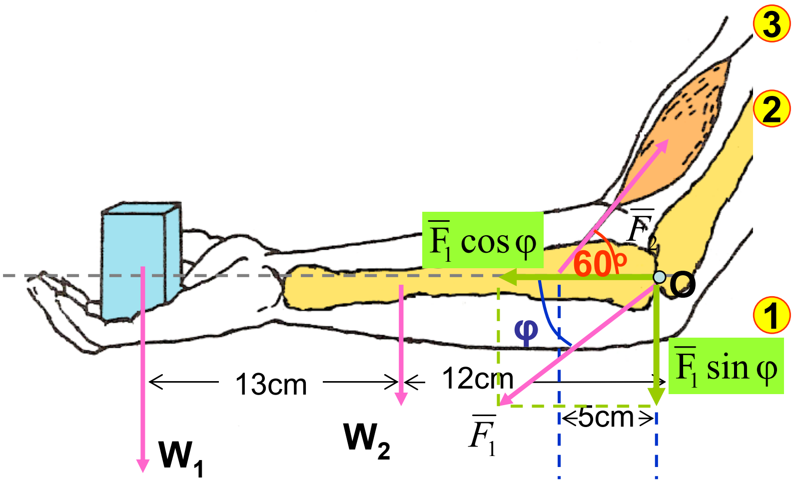
$$F_1 \cos\varphi = F_2 \cos 60 \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow -W_1(0.13+0.12) - W_2 \cdot 0.12 + F_2 \sin 60 \cdot 0.05 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.25W_1 + 0.12W_2 = F_2 \sin 60 \cdot 0.05 \Rightarrow F_2 = \frac{0.25W_1 + 0.12W_2}{0.866 \cdot 0.05} = 430N \quad (3)$$

Άσκηση



$$(3) \quad F_2 = 430N$$

$$(2) \quad F_1 \cos\varphi = F_2 \cos 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 \cos\varphi = 430 \cdot \frac{1}{2} = 215N$$

$$(1) \quad W_1 + W_2 + F_1 \sin\varphi = F_2 \sin 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 + F_1 \sin\varphi = 430 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 \sin\varphi = 282N$$

$$(1) \div (2) \quad \frac{F_1 \sin\varphi}{F_1 \cos\varphi} = \tan\varphi = 1.31 \Rightarrow \varphi = 52.7°$$

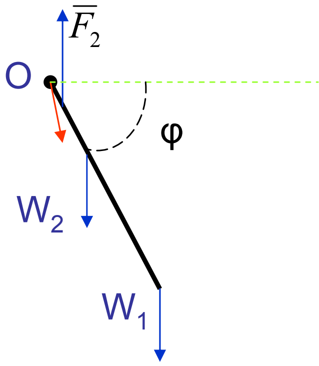
$$(1) \;\&\; (2) \quad F_1 = \sqrt{(F_1 \sin\varphi)^2 + (F_1 \cos\varphi)^2} = 355N$$

Άσκηση

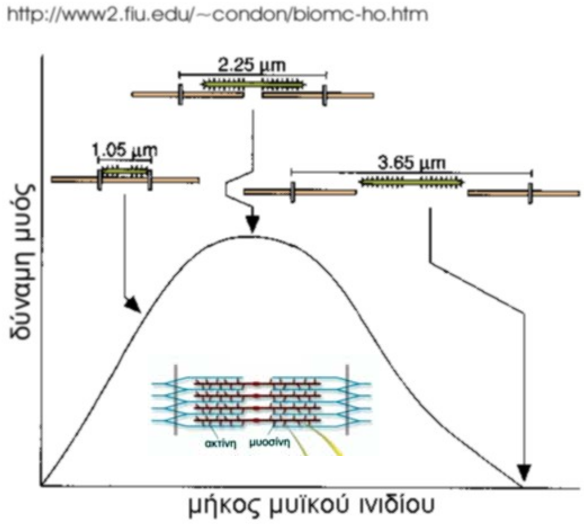
Απαιτείται μεγαλύτερη ή μικρότερη δύναμη για να σηκώσουμε ένα βάρος όταν η γωνία α είναι μεγάλη; Εξηγήστε.

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow$$

$$W_1(0.13+0.12)\cos\varphi + W_2 \cdot 0.12\cos\varphi - F_2\cos\varphi \cdot 0.05 = 0$$



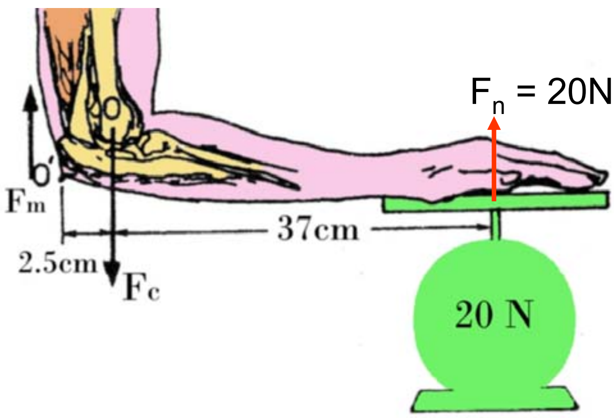
F_2 ανεξάρτητη της φ



Η δύναμη που ασκεί ο μυς ελαττώνεται σημαντικά όταν έχει εκταθεί ή συμπιεστεί πολύ.

Άσκηση

Αν ο αντιβραχίονας βρίσκεται σε οριζόντια θέση και η παλάμη ασκεί δύναμη 20N στο ζυγό, να υπολογιστεί η μυϊκή δύναμη F_m και η δύναμη αντίδρασης στον αγκώνα (βάρος χεριού = 0).



Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο΄:

$$\sum \overline{M}_{O'} = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot F_C = 39.5 \cdot F_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_C = 316N$$

Ισορροπία δυνάμεων:

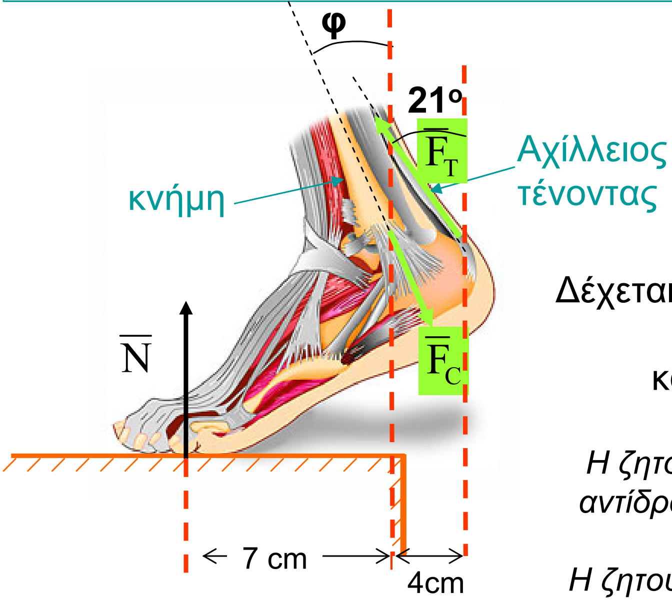
$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow F_m + F_n = F_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_m = F_C - F_n = 316 - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_m = 296N$$

Άσκηση

Δυνάμεις που αναπτύσσονται στον Αχίλλειο τένοντα και στον αστράγαλο καθώς ανεβαίνουμε τις σκάλες. Να υπολογιστεί το μέτρο της συμπιεστικής δύναμης στην κνήμη και της δύναμης έκτασης στον Αχίλλειο τένοντα μόλις ένα άτομο βάρους 850N πατάει στο σκαλοπάτι και όλο το βάρος του μεταφέρεται στο ένα πόδι. Θεώρησε το βάρος του ποδιού κάτω από τον αστράγαλο αμελητέο.

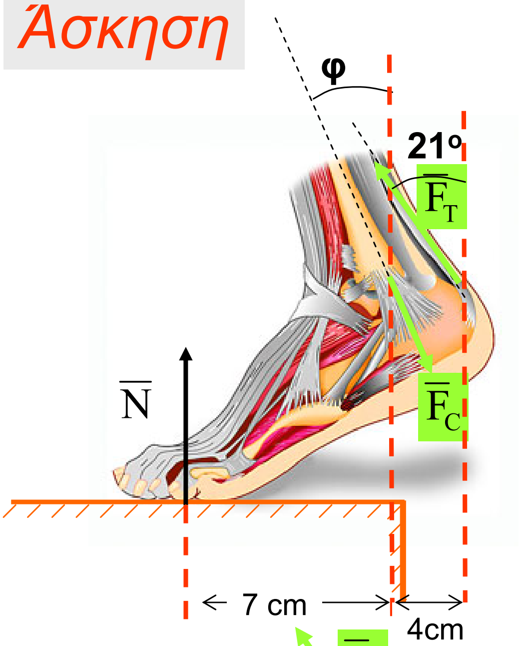


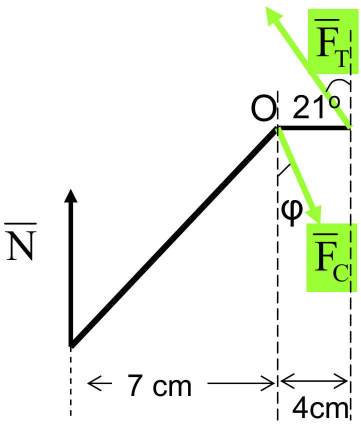
Άνθρωπος που στέκεται στο ένα πόδι:
N=W=850N (ισορροπία δυνάμεων που ασκούνται στον άνθρωπο)

Πόδι ως απομονωμένο σώμα:
Δέχεται την κάθετη αντίδραση του δαπέδου (N), τη δύναμη από την κνήμη (F_C) και τη δύναμη από τον τένοντα (F_T).

Η ζητούμενη εκτατική δύναμη στον τένοντα είναι η αντίδραση της F_T (ίση και αντίθετη της F_T με σημείο εφαρμογής στον τένοντα).
Η ζητούμενη συμπιεστική δύναμη στην κνήμη είναι η αντίδραση της F_C (ίση και αντίθετη της F_C με σημείο εφαρμογής στην κνήμη).

Άσκηση





Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow \underset{W}{\cancel{N}} + F_T \cos 21 = F_C \cos\varphi \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F_T \sin 21 = F_C \sin\varphi \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M}_O = 0 \Rightarrow 4 \cdot F_T \cos 21 = 7 \cdot W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_T = \frac{7W}{4\cos 21} = \frac{7 \cdot 850}{4 \cdot 0.933} = 1594\text{N} \quad (3)$$

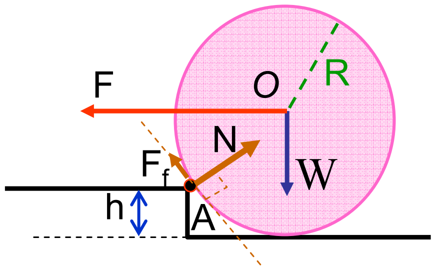
(2) $F_C \sin\varphi = 1594 \cdot \sin 21 = 571\text{N}$

(1) $F_C \cos\varphi = 850 + 1594 \cos 21 = 2338\text{N}$

F_T=1594N **φ=14°** **F_c=2407N**

Άσκηση

Ποια είναι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί πάνω στον τροχό μάζας m και ακτίνας R για να ανέβει το σκαλοπάτι;

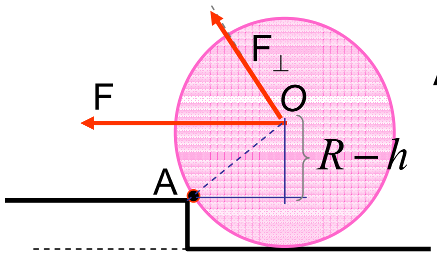


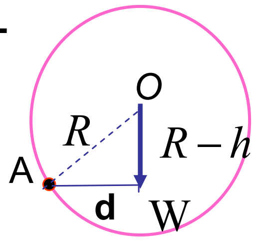
Για να ανέβει το σκαλοπάτι θα πρέπει να στραφεί γύρω από το A

Θα πρέπει:
$M_F \geq M_W$

Ροπή της δύναμης F→ $M_F = F(R-h)$

$M_{Ff}=M_N=0$, γύρω από το σημείο A





$$d^2 + (R-h)^2 = R^2 \Rightarrow d^2 =$$

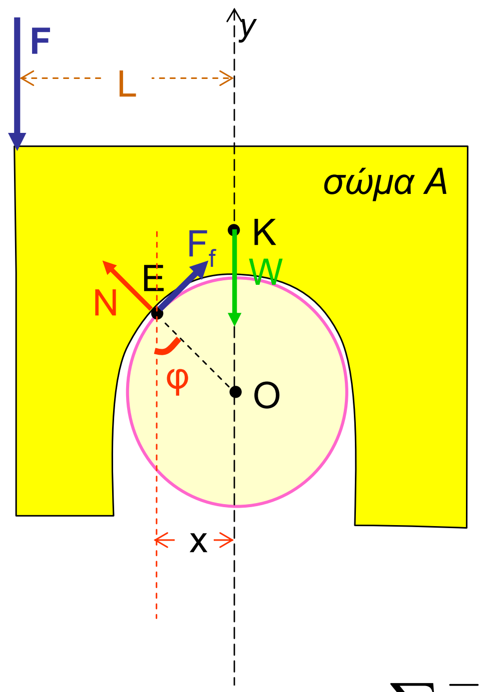
$$= R^2 - R^2 - h^2 + 2Rh \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{2Rh - h^2}}$$

Ροπή του βάρους → $M_W = W \cdot d = W\sqrt{2Rh - h^2}$

Θα πρέπει: $F(R-h) \geq W\sqrt{h(2R-h)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F \geq W \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

Άσκηση



Το σώμα A βάρους W (το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο K) ισορροπεί πάνω σε ακλόνητο κύλινδρο. Ο συντελεστής στατικής τριβής στην επιφάνεια επαφής είναι μ. Πόση πρέπει να είναι η F ώστε να ολισθαίνει το σώμα A πάνω στον κύλινδρο;

Αυξανόμενης της F το σημείο επαφής E μετατοπίζεται προς τ' αριστερά

(η συνισταμένη των N και F_f εξισορροπείται από τη συνισταμένη των F και W).

Δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα A:

Τριβή: F_f — Κάθετη αντίδραση: N

Δύναμη F — Βάρος W

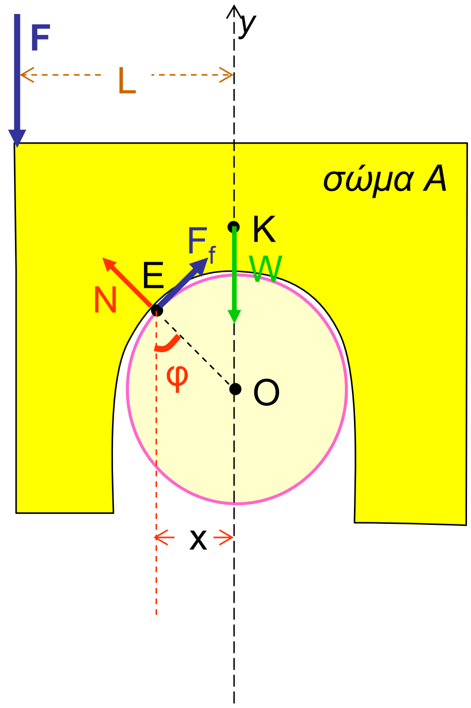
Ισορροπία δυνάμεων: $\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow W + F = N\cos\varphi + F_f \sin\varphi$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow N\sin\varphi = F_f \cos\varphi$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O: $\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow FL = F_f R$

Η ροπή του βάρους του σώματος A είναι μηδέν όσο το σώμα δεν κινείται

Άσκηση



$$W + F = N\cos\varphi + F_f \sin\varphi \quad (1)$$

$$N\sin\varphi = F_f\cos\varphi \Rightarrow N = F_f \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad (2)$$

$$FL = F_f R \quad (3)$$

$$(1)\; W + F = F_f\left(\overset{(2)}{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}\cos\varphi + \sin\varphi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi(W+F) = F_f \Rightarrow \frac{x}{R}(W+F) = \overset{(3)}{\frac{FL}{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{FL}{W+F} = \frac{L}{1+\dfrac{W}{F}}} \qquad \sin\varphi = \frac{x}{R}$$

$$(2)\quad \begin{matrix} F_f = N\tan\varphi \\ F_f = N\mu \end{matrix} \Bigg\} \quad \boxed{\mu = \tan\varphi}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{x}{R}}$$

Όσο αυξάνει η F τόσο αυξάνει το x και η γωνία φ
Για $\varphi > \varphi_{κρισιμη}$ → $\tan\varphi > \mu$ → αρχίζει ολίσθηση

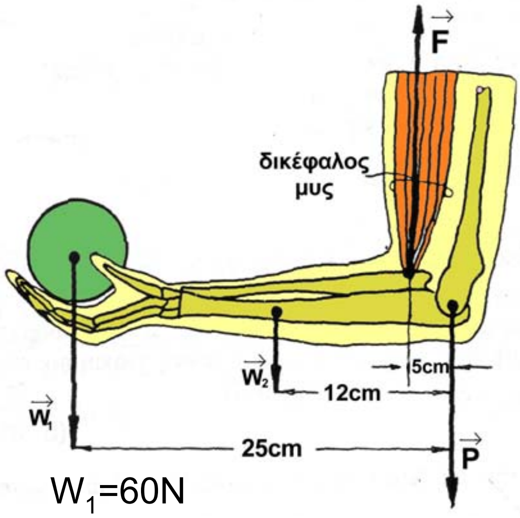
Ισορροπία χεριού (90^o-χωρίς τριβές)

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow 0.25W_1 + 0.12W_2 = 0.05F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 372N$$

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + P = F \Rightarrow$$

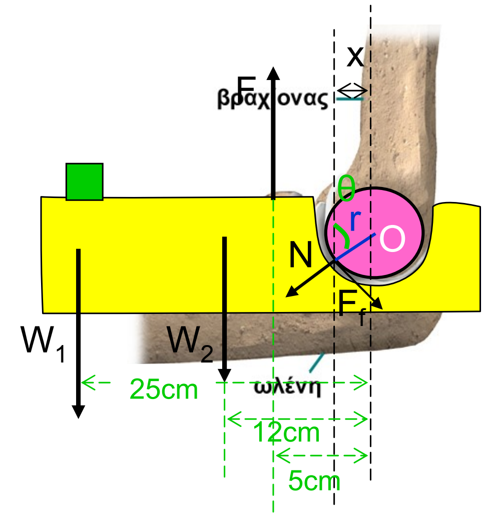
$$\Rightarrow P = 282N$$



W_1=60N
W_2=30N

Πόση είναι η ελάχιστη δύναμη F που είναι απαραίτητη για να αρχίσει να κινείται η άρθρωση του αγκώνα (κίνηση του αντιβραχίονα προς τα πάνω). Η ακτίνα καμπυλότητας του άκρου του βραχίονα είναι r=1.9cm, το βάρος του αντιβραχιόνιου είναι 30N και ο συντελεστής τριβής στην άρθρωση είναι 0.015.

Ισορροπία χεριού (90°-με τριβές)



Ισορροπία δυνάμεων (x άξονας)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N\sin\theta = F_f\cos\theta =$$
$$= \mu_s N\cos\theta \Rightarrow \mu_s = \tan\theta \quad (1)$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r}$$

Ισορροπία δυνάμεων (y άξονας)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + N\cos\theta + F_f\sin\theta = F \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N\cos\theta + F_f\sin\theta = F - W_1 - W_2 = F - 90 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_f\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + F_f\sin\theta = F - 90 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_f\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = (F-90)\sin\theta \Rightarrow F_f r = (F-90)x \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών (γύρω από το O)

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow 0.25\cdot W_1 + 0.12\cdot W_2 + F_f r = 0.05\cdot F \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.25\cdot 60 + 0.12\cdot 30 + x\cdot(F-90) = 0.05\cdot F \Rightarrow F = \frac{18.6 - 90x}{0.05 - x} \quad (3)$$

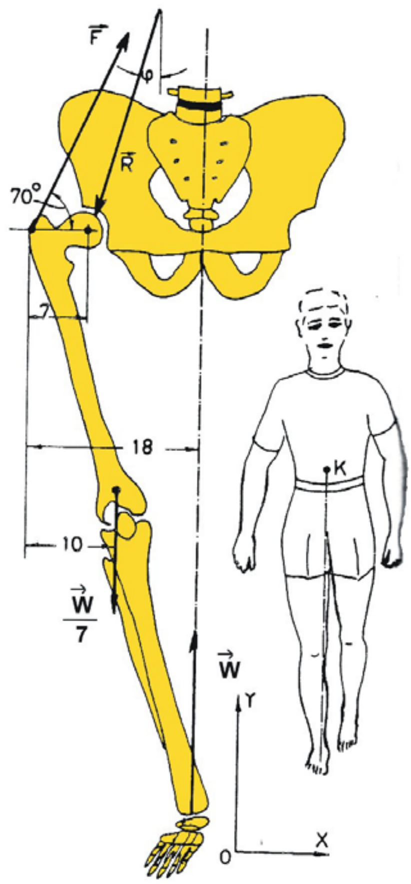
Για να υπερνικηθεί η τριβή θα πρέπει: $\tan\theta > \mu_s \Rightarrow \theta > 0.86° \rightarrow x = r\sin\theta = 0.0285\text{cm}$

** Η συνισταμένη δύναμη των N και F_f αντιστοιχεί στην P του προηγούμενου παραδείγματος*

$$(3)\quad F = \frac{18.6 - 90\cdot 0.000285}{0.05 - 0.000285} = 373.6\text{N}$$

Στατική του ισχίου

- Άνθρωπος στηρίζεται στο ένα πόδι
  Ισορροπία σώματος : W=N
- Η κεφαλή του μηριαίου οστού εφαρμόζει και κινείται σε εσοχή της λεκάνης.
- Στο σημείο επαφής δέχεται δύναμη αντίστασης R
- Μείζων τροχαντήρας: εξωτερική εξοχή από την οποία καταφύονται απαγωγοί μύες (γλουτιαίοι): δύναμη F
- Στο κέντρο βάρους του ποδιού ασκείται το βάρος του που είναι ~ίσο με το 1/7 του βάρους του ανθρώπου.



Στατική του ισχίου

Ισορροπία δυνάμεων:

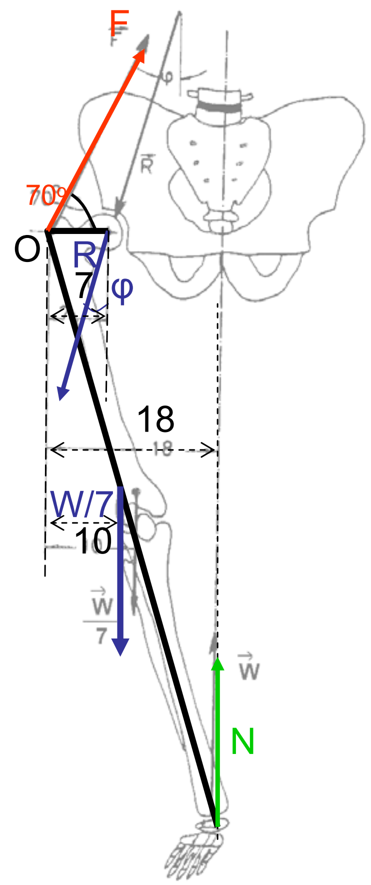
$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F\cos 70 = R\sin\varphi$$

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow F\sin 70 + \underset{W}{\cancel{N}} = R\cos\varphi + \frac{W}{7}$$

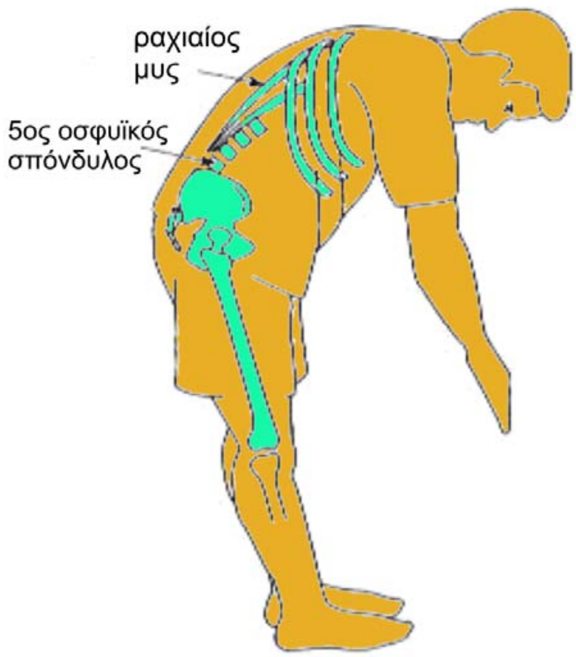
Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow R\cos\varphi\cdot 7 + \frac{W}{7}10 = W18$$

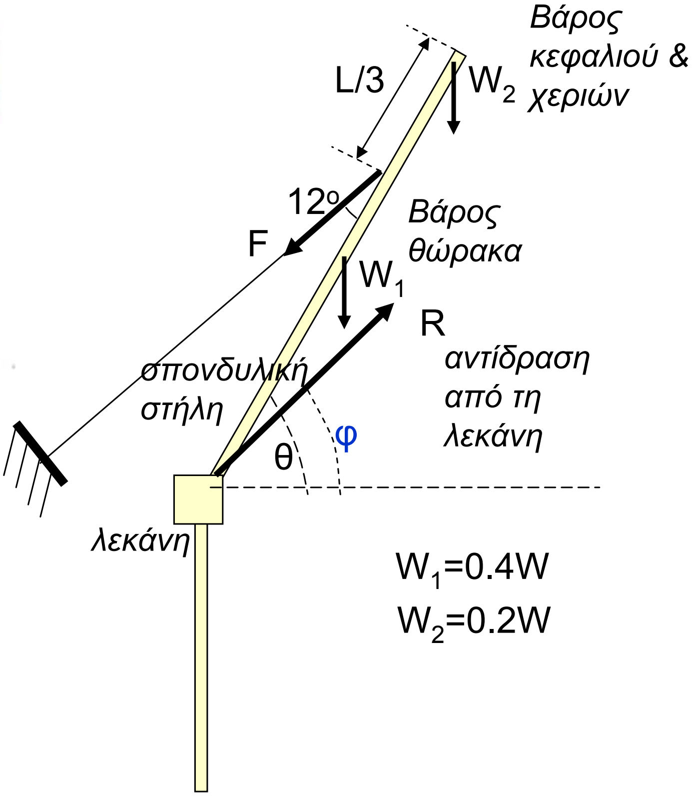
$$\left.\begin{aligned} 0.342\mathrm{F} &= \mathrm{R}\sin\varphi \\ 0.937\mathrm{F} + 0.857\mathrm{W} &= \mathrm{R}\cos\varphi \\ 7\mathrm{R}\cos\varphi &= 16.57\mathrm{W} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathrm{F} &= 1.6\mathrm{W} \\ \varphi &= 13^\circ \\ \mathrm{R} &= 2.4\mathrm{W} \end{aligned}}$$



Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη



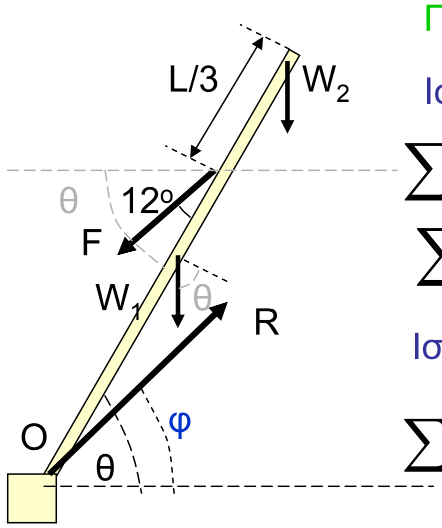
Μηχανικό ανάλογο:



W_1=0.4W

W_2=0.2W

Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη



W_1=0.4W

W_2=0.2W

Πόση είναι η R και η F για θ=30ο ;

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow F\cos(\theta - 12) = R\cos\varphi \quad (1)$$

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow F\sin(\theta - 12) + W_1 + W_2 = R\sin\varphi \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Ο:

$$\sum \overline{M} = 0 \Rightarrow W_1\frac{L}{2}\cos\theta + W_2 L\cos\theta = F\sin 12 \cdot \frac{2L}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0.4W\frac{1}{2} + 0.2W\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}F0.21 \Rightarrow \boxed{F = 2.47W} \quad (3)$$

Δυνάμεις στη σπονδυλική στήλη

(1) $$2.47W\cos(30-12) = R\cos\varphi \Rightarrow 2.35W = R\cos\varphi$$

(2) $$2.47W\sin(30-12) + 0.4W + 0.2W = R\sin\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1.36W = R\sin\varphi$$

(2)^2+(1)^2 $$R^2 = 2.35^2W^2 + 1.36^2W^2 = 7.37W^2 \Rightarrow \boxed{R = 2.71W}$$

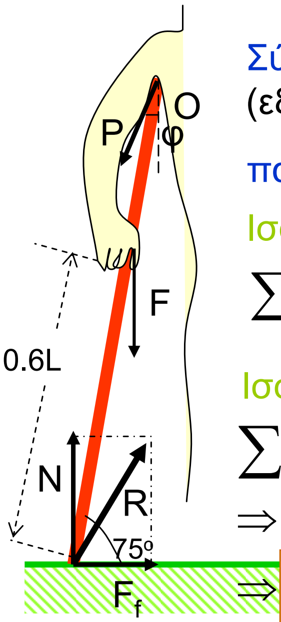
(2) ÷ (1) $$\tan\varphi = \frac{1.36}{2.35} = 0.58 \Rightarrow \boxed{\varphi = 30^\circ}$$

Για θ=60ο: $$\boxed{\begin{gathered} F = 1.42W \\ \varphi = 60.15^\circ \\ R = 1.91W \end{gathered}}$$

δοκιμάστε λύσεις για διαφορετικές γωνίες θ και για την περίπτωση που ο άνθρωπος σηκώνει βάρος π.χ. 0.2W, 0.5W

Άσκηση

Άνθρωπος βάρους 800N στηρίζει όλο του το βάρος συμμετρικά σε δύο πατερίτσες που σχηματίζουν γωνία 75° με το έδαφος. Η παλάμη κάθε χεριού ασκεί στην (αβαρή) πατερίτσα δύναμη F =100N. Να υπολογιστεί η δύναμη R που ασκεί το δάπεδο στην πατερίτσα και η δύναμη P' που ασκείται από την πατερίτσα στη μασχάλη. Αν ο συντελεστής τριβής στατικής πατερίτσας – δαπέδου είναι μ=0.7 θα γλιστρήσει η πατερίτσα;



Σύστημα άνθρωπος – πατερίτσες $W = 2N \Rightarrow N = \frac{W}{2} = 400N$
(εξωτερικές δυνάμεις W, N)

πατερίτσα (ως απομονωμένο σώμα):

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow P\sin\varphi = F_f \quad (1) \qquad \sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow P\cos\varphi + F = N \quad (2)$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το O:

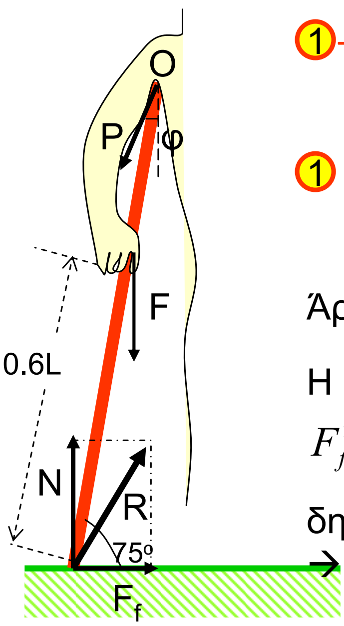
$$\sum \overline{M}_O = 0 \Rightarrow F\sin(90-75)\cdot 0.4L + F_f\cos 15\cdot L = N\sin 15\cdot L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 15(0.4F - N)L = -F_f L\cos 15 \Rightarrow F_f = \tan 15\cdot(400 - 0.4\cdot 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_f = 96.5N} \quad (3)$$

Άσκηση

Άνθρωπος βάρους 800N στηρίζει όλο του το βάρος συμμετρικά σε δύο πατερίτσες που σχηματίζουν γωνία 75° με το έδαφος. Η παλάμη κάθε χεριού ασκεί στην (αβαρή) πατερίτσα δύναμη F =100N. Να υπολογιστεί η δύναμη R που ασκεί το δάπεδο στην πατερίτσα και η δύναμη P' που ασκείται από την πατερίτσα στη μασχάλη. Αν ο συντελεστής τριβής στατικής πατερίτσας – δαπέδου είναι μ=0.7 θα γλιστρήσει η πατερίτσα;



$$1 \div 2 \qquad \tan\varphi = \frac{F_f}{N-F} = \frac{96.5}{400-100} = 0.32 \Rightarrow \boxed{\varphi = 17.8^\circ}$$

$$1 \qquad P = \frac{F_f}{\sin\varphi} = \frac{96.5}{0.379} \Rightarrow \boxed{P = 316N}$$

Άρα: $R = \sqrt{F_f^2 + N^2} = \sqrt{96.5^2 + 400^2} = 411N$

Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι:

$$F_f^{max} = \mu N = 0.7\cdot 400 = 280N$$

δηλαδή μεγαλύτερη της τριβής που αναπτύσσεται στην πατερίτσα → η πατερίτσα δεν γλιστράει.