Αριστοτελείο Πανεπιστημίο Θεσσαλονικής Σχολή Γεωτεχνικών Επιστήμων – Τμήμα Γεωπονίας Προγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Ειδικεύση Εγγείων Βελτιώσεων

«Στοχαστική Μελετή Του Υδατικού Ισοζύγιου, Στην Ακορέστη Ζώνη Του Εδαφούσ»

Διπλωματική Μεταπτυχιακή Διατριβή Του Γεωργούση Χαραλαμπου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Χ. ΜΠΑΜΠΑΤΖΙΜΟΠΟΥΛΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Προλογος

Το υδατικό ισοζύγιο της ακόρεστης ζώνης του εδάφους αποτελεί σημαντικό αντικείμενο μελέτης για το Γεωπόνο Εγγείων Βελτιώσεων. Με την ακριβέστερη κατανόηση των φυσικών διαδικασιών που το επηρεάζουν, ο Γεωπόνος Εγγείων Βελτιώσεων θα παρέχει τις καταλληλότερες συμβουλές στον παραγωγό με σκοπό τη μεγιστοποίηση της παραγωγής. Επίσης η μελέτη του υδατικού ισοζυγίου συμβάλλει και στην ορθολογική διαχείριση των υδατικών πόρων, των οποίων οι διαθέσιμες ποσότητες βρίσκονται παγκοσμίως σε καθοδική πορεία. Αυτό οφείλεται στην αύξηση με αλματώδεις ρυθμούς της ζήτησης νερού για οικιακή, βιομηχανική και αρδευτική χρήση.

Οι αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης κίνησης του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους, που ξεκίνησαν να χρησιμοποιούνται τη δεκαετία του 1960, έδωσαν τη θέση τους σε πιο εξελιγμένα μαθηματικά μοντέλα. Τα μοντέλα αυτά καλούνται να περιγράψουν το υδατικό ισοζύγιο του εδάφους λαμβάνοντας υπόψη παραμέτρους όπως: οι αρδεύσεις, οι βροχοπτώσεις, οι κλιματικές συνθήκες και τα χαρακτηριστικά του εδάφους, οι οποίες καλούνται παράμετροι εισόδου του μοντέλου.

Τα περισσότερα από αυτά τα μαθηματικά μοντέλα δεν λαμβάνουν υπόψη τους τις μεταβολές των παραμέτρων εισόδου μέσα σε μεγάλες περιοχές μελέτης και ως εκ τούτου περιορίζονται σε εφαρμογές αγρού.

Η μεταπτυχιακή αυτή διατριβή συμβάλλει προς την κάλυψη αυτής της αδυναμίας χρησιμοποιώντας τρία εργαλεία: **το μοντέλο nearest neighbor** για να περιγράψει τις μεταβολές των παραμέτρων εισόδου στο χώρο, **το μαθηματικό μοντέλο S.W.BA.CRO.S.** για την περιγραφή της κίνησης του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους και τη **μέθοδο Monte Carlo** για να περιγράψει στοχαστικά το υδατικό ισοζύγιο μιας περιοχής.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Χρήστος Μπαμπατζιμόπουλος τον οποίο ευχαριστώ ιδιαιτέρως για την καθοδήγηση και την αμέριστη συμπαράστασή του σε όλα τα στάδια της εκπόνησης της διατριβής μου. Επίσης ευχαριστώ τους αναπληρωτές καθηγητές του Εργαστηρίου Γενικής και Γεωργικής Υδραυλικής και Βελτιώσεων, κ.κ. **Δημήτρη** Παπαμιχαήλ και Βασίλη Αντωνόπουλο για τις συμβουλές τους, όποτε τις είχα ανάγκη.

Τέλος ευχαριστώ όλους τους διδάσκοντες της Ειδίκευσης Εγγείων Βελτιώσεων, για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Γεωπονίας, οι οποίες διεύρυναν σημαντικά την επιστημονική μου κατάρτιση.

> Γεωργούσης Χαράλαμπος Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2000

Περιεχόμενα

Σελίδα

εφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά	1
1.2 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας	3
<u>1.2.1 Κίνηση του νερού σε πορώδη μέσα</u>	3
<u>1.2.2 Χωρική μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του εδάφους</u>	6
ζεφάλαιο 2. Το μοντέλο nearest neighbor	14
2.1 Γενικά.	14
2.2 Μοντέλα Markov	15
2.3 Περιγραφή του μοντέλου nearest neighbor	16
2.4 Το πρόβλημα των οριακών υποπεριοχών	20
<u>2.4.1 Περιγραφή – αντιμετώπιση</u>	20
<u>2.4.2 Σχόλια</u>	25
2.5 Προσαρμογή του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης δύο διαστάσεων σε	
δεδομένα	25
<u>2.5.1 Βασικοί υπολογισμοί</u>	25
<u>2.5.2 Η μέθοδος του Ord</u>	30
2.5.3 Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method)	32
<u>2.5.4 Η μορφή του σταθμιστικού πίνακα W και οι ιδιοτιμές του</u>	34
2.6 Βήματα για την προσαρμογή του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης δύο	
διαστάσεων σε δεδομένα.	36
2.7 Δημιουργία δεδομένων με χρήση του πρώτης τάξης nearest neighbor μοντέλου	37
εφάλαιο 3. Τυχαίοι αριθμοί	39
3.1 Γενικά	39
3.2 Επιθυμητά χαρακτηριστικά τυχαίων αριθμών	40
3.3 Ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί (uniformly distributed random numbers)	41
3.4 Αλγόριθμοι παραγωγής ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών	42
3.5 Δομή πλέγματος των LCG's.	44
3.6 Н ипороитіva ran1	48
3.6 Κανονικά κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί	50
3.6.1. Εισαγωγικά	50
3.6.2. Μετατροπή ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών σε κανονικά κατανεμημένους	51
ζεφάλαιο 4. Η μέθοδος Monte Carlo	54
4.1. Εισαγγωνή στις μεθόδους Monte Carlo	54
ייד בוסמישיון טווג ווכטטטטטג ויוטוונג כמווט	т

Κεφάλαιο 5. Μαθηματική προσομοίωση της μονοδιάστατης κίνησης του νερού
στο ἑδαφος, με το μοντέλο S.W.BA.CRO.S58
5.1 Εισαγωγή
5.2 Το μοντἑλο S.W.BA.CRO.S
<u>5.2.1 Γενικά</u>
5.2.2 Περιγραφή της ακόρεστης υδραυλικής αγωγιμότητας και της υδραυλικής
χωρητικότητας του εδάφους61
<u>5.2.3 Αριθμητική επίλυση</u>
<u>5.2.4 Οριακές συνθήκες</u>
Κεφάλαιο 6. Εφαρμογές – Αποτελέσματα74
6.1 Γενικά
6.2 Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo, στη μελέτη της ροής του νερού στην ακόρεστη
ζώνη του εδάφους
6.3 Ανάλυση ευαισθησίας της μεθόδου Monte Carlo
<u>6.3.1 Ανάλυση ευαισθησίας της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α</u>
<u>6.3.2</u> Ανάλυση ευαισθησίας της τυπικής απόκλισης σ81
6.4 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αργιλοπηλώδες έδαφος85
6.5 Μελέτη της ανομοιογένειας στο ιλυοαργιλοπηλώδες έδαφος
6.6 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αμμοπηλώδες έδαφος των Kool et al. (1985)
6.7 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αμμοπηλώδες έδαφος των Mallants et al. (1997)
Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα98
Βιβλιογραφία
Παρἁρτημα
W.forI
Detalhpa.forIX

Πίνακες

Σελίδα

Πίνακας 6.1	Υδραυλικές παράμετροι του εδάφους της Σίνδου	77
Πίνακας 6.2	Στατιστικά στοιχεία για διάφορες τιμές της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου	78
Πίνακας 6.3	Στατιστικά στοιχεία για διάφορες τιμές της τυπικής απόκλισης	82
Πίνακας 6.4	Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του	
	αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου	88
Πίνακας 6.5	Μηχανική ανάλυση του πειραματικού αγρού των Deju and Jingwen (1993)	. 88
Πίνακας 6.6	Παράμετροι της εξίσωσης van Genuchten του πειραματικού αγρού των Deju	
	and Jingwen (1993).	. 89
Πίνακας 6.7	Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του	
	ιλυοαργιλοπηλώδους εδάφους των Deju and Jingwen (1993)	. 91
Πίνακας 6.8	Υδραυλικές παράμετροι των δυο εδαφών των Kool et al. (1985)	. 91
Πίνακας 6.9	Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του	
	αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et al. (1985)	. 94
Πίνακας 6.10	Παρἁμετροι της συνἀρτησης Van Genuchten για το αμμοπηλώδες ἑδαφος των	
	Mallants et al. (1997).	. 94
Πίνακας 6.11	Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του	
	αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants et al. (1997)	. 97

Σχήματα

Σελίδα

Σχήμα	1.1	Τρίγωνο κλάσεων κοκκομετρικής σύστασης των δειγμάτων που συνέλεξαν οι Romano and Santini (1997)
Σχήμα	1.2	Σχηματική αναπαράσταση δύο «ομοίων» μέσων. Τα χαρακτηριστικά μήκη λ ₁
Σχήμα	1.3	Μετρημένες και υπολογισμένες κατανομές συχνοτήτων για τιμές υδραυλικής ανωνιμότητας (Nielsen et al., 1973)
Σχήμα	2.1	Σχηματική αναπαράσταση της διακριτοποίησης του χώρου για το nearest neighbor μοντέλο σε μια διάσταση. Τα διαστήματα Δz γενικά απαιτείται να
Σχήμα	2.2	Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα πρώτης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις. Οι διαστάσεις Δχ και Δγ, γενικά απαιτείται να είναι ίσες
Σχήμα	2.3	Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα δεύτερης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις
Σχήμα	2.4	Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα τρίτης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις
Σχήμα	2.5:	Διδιάστατο πεδίο τιμών μιας μεταβλητής Υ, χωρισμένο σε αριθμό υποπεριοχών
Σχήμα	2.6:	Εξάρτηση της υποπεριοχής (1,1) από υποπεριοχές εκτός των ορίων
Σχήμα	2.7	Διδιάστατο πεδίο τιμών μιας μεταβλητής Υ, με τις (γραμμοσκιασμένες)
		υποπεριοχές που υφίστανται επιδράσεις από άλλες εκτός των ορίων
Σχήμα	2.8:	Η περιοχή μελέτης πριν τη δημιουργία της ζώνης προστασίας. Οι υποπεριοχές εκτός ορίων είναι αυτές που περιέχουν το σύμβολο +
Σχήμα	2.9	Σχηματική αναπαράσταση της ζώνης προστασίας (γραμμοσκιασμένες υποπεριοχές). Η περιοχή στην οποία θα εφαρμοστεί το μοντέλο nearest
		neighbor έχει πλέον μικρότερες διαστάσεις m-1×n-1
Σχήμα	2.10:	Κλείσιμο της περιοχής μέσα σε ένα δακτύλιο από όμοιες περιοχές
Σχήμα	2.11	Τα μέρη μιας τυχαίας συνάρτησης
Σχήμα	2.12	(α) Υποθετική μεταβλητότητα παραμέτρου σε μια περιοχή (β) Πιθανή
		αναπαράσταση της προηγούμενης περιοχής μετά την εφαρμογή του μοντέλου
		nearest neighbor. Το χρώμα κάθε υποπεριοχής αντιστοιχεί σε διαφορετική
		τιμή της παραμέτρου που μελετάται
Σχήμα	3.1:	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής U(0,1) 41
Σχήμα	3.2	Τυχαία διάταξη των σημείων (R _n , R _{n+1}) στο μοναδιαίο τετράγωνο
Σχήμα	3.3	Διάταξη των σημείων (R _n , R _{n+1}) για τον LCG[509,10,0,1]
Σχήμα	3.4	Διάταξη των σημείων (R _n , R _{n+1}) για τον LCG[509,108,0,1]
Σχήμα	3.5	Μεγέθυνση του μοναδιαίου τετραγώνου για τον αλγόριθμο Minimal Standard 47

Σχήμα	3.6	Διάταξη των σημείων του LCG(231, 65539, 0, 1) σε 15 επίπεδα στις 3								
		διαστάσεις (Hellekalek, 1988)								
Σχήμα	5.1	Μεταβολή του όρου S με την τάση (Feddes, et al., 1978)								
Σχήμα	5.2	Δίκτυο υπολογισμών για τη μελέτη της μονοδιάστατης ακόρεστης ροής								
Σχήμα	6.1	Διάγραμμα ροής για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo								
Σχήμα	6.2	Παρουσίαση της ντετερμινιστικής λύσης (K _s =0.2855m/day) και των								
		στοχαστικών λύσεων για α=0.15 και α=1, στο έδαφος της Σίνδου								
Σχήμα	6.3	Παρουσίαση της ντετερμινιστικής λύσης (K _s =0.2855m/day) και των								
		στοχαστικών λύσεων για σ=20% και σ=60%, στο έδαφος της Σίνδου								
Σχήμα	6.4	Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου								
Σχήμα	6.5:	Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40%Ks) του υγρασιακού περιεχομένου								
		του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου και σύγκρισή της με τη								
		ντετερμινιστική διακύμανση								
Σχήμα	6.6:	Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40% Ks) του υγρασιακού περιεχομένου								
		του ιλυοαργιλοπηλώδους εδάφους και σύγκρισή της με τη ντετερμινιστική								
		διακύμανση								
Σχήμα	6.7	Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et								
		al. (1985)								
Σχήμα	6.8:	Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40% Κ _s) του υγρασιακού περιεχομένου								
		του αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et al., 1985 και σύγκρισή της με τη								
		ντετερμινιστική διακύμανση								
Σχήμα	6.9	Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants								
		et al. (1997)								
Σχήμα	6.10:	Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40% Κ _s) του υγρασιακού περιεχομένου								
		του αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants et al. (1997) και σύγκρισή της με								
		τη ντετερμινιστική διακύμανση96								

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.1 Γενικά.

Η κίνηση του νερού μέσα στο έδαφος αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία του υδρολογικού κύκλου. Η κατανόηση της διαδικασίας αυτής, είναι σημαντική για πολλά πρακτικά προβλήματα όπως η άρδευση των καλλιεργειών, η επαναπλήρωση υπόγειων υδροφορέων, η στράγγιση γεωργικών εδαφών κ.α..

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του νερού στο έδαφος, διατυπώθηκε πριν από επτά περίπου δεκαετίες (Richards, 1931) και είναι σήμερα γνωστή με την ονομασία «εξίσωση Richards». Η εξίσωση αυτή είναι έντονα μη γραμμική και δεν έχει αναλυτική λύση στη γενική της μορφή (Αντωνόπουλος, 1999). Η έλλειψη αναλυτικής λύσης έκανε επιτακτική τη χρήση αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση της εξίσωσης Richards, οι οποίες απαιτούν πληθώρα υπολογισμών. Λόγω ανυπαρξίας υπολογιστικών συστημάτων οι υπολογισμοί αυτοί έπρεπε να γίνονται με το «χέρι» με αποτέλεσμα η περαιτέρω μελέτη του φυσικού φαινομένου να είναι δυσχερής.

Η ανάπτυξη των υπολογιστών από τη δεκαετία του 1970 και μετά, έδωσε νέα ώθηση στην έρευνα της ακόρεστης ροής του νερού. Ένα πλήθος μαθηματικών μοντέλων προσομοίωσης της κίνησης του νερού μέσα στο έδαφος, αναπτύχθηκε από τότε. Τα μαθηματικά αυτά μοντέλα δίνουν τη δυνατότητα στο Γεωπόνο να μελετά με ακρίβεια το υδατικό ισοζύγιο του εδάφους, βελτιώνοντας τα αρδευτικά προγράμματα και αυξάνοντας την απόδοση των καλλιεργειών.

Το μειονέκτημα των περισσότερων αριθμητικών αυτών μοντέλων, είναι ότι λειτουργούν ντετερμινιστικά: θεωρούν δηλαδή τις υδραυλικές παραμέτρους ολοκλήρων των υπό μελέτη περιοχών, γνωστές με βεβαιότητα και σταθερές. Η θεώρηση αυτή αντικρούει στη λογική καθώς έχει αποδειχθεί από παλιά ότι στην επιφάνεια της γης υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία εδαφών με πλήθος διαφορετικών χαρακτηριστικών το καθένα. Η παραδοχή οποιουδήποτε βαθμού ομοιογένειας των εδαφών αποτελεί σημαντική απλοποίηση από τη μια και κοινό μυστικό των ερευνητών από την άλλη. Το πρόβλημα που δημιουργείται εξαιτίας αυτής της απλοποίησης, είναι πως ενώ θεωρητικά μπορούμε να επιλέξουμε μια λεπτομερή διακριτοποίηση του χώρου και του χρόνου παράλληλα με μια γνωστής ακρίβειας αριθμητική μέθοδο, πρακτικά τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, θα υποφέρουν από τη μεγάλη μεταβλητότητα των παραμέτρων εισόδου μέσα στο χώρο, που υπαγορεύει η ίδια η φύση. Επιπλέον δεν είναι καθόλου βέβαιο πως τα αποτελέσματα αυτά θα αναπαριστούν τη μέση συμπεριφορά ενός ετερογενούς εδάφους. Άρα η ποσοτική εκτίμηση της μεταβλητότητας – αβεβαιότητας – αυτής είναι τόσο αναγκαία, όσο αναγκαία είναι και τα ίδια τα αποτελέσματα.

Λόγω της αναγκαιότητάς της, η μελέτη της χωρικής μεταβλητότητας των υδραυλικών παραμέτρων του εδάφους και ο τρόπος διαχείρισής της στα μοντέλα κίνησης του νερού, απασχόλησε τους ερευνητές τα τελευταία 50 περίπου χρόνια. Οι προσπάθειές τους για τη συνεκτίμηση της χωρικής μεταβλητότητας στην περιγραφή των φυσικών διεργασιών, φαίνεται να δίνουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα και ακριβέστερα επιστημονικά συμπεράσματα.

Στην μεταπτυχιακή αυτή διατριβή παρέχεται το θεωρητικό υπόβαθρο μιας στοχαστικής μεθοδολογίας αντιμετώπισης της αβεβαιότητας που επιφέρει η χωρική μεταβλητότητα, στη μελέτη του υδατικού ισοζυγίου μιας περιοχής:

Η εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής από έναν εξειδικευμένο φορέα, δίνει την ευχέρεια του επιτελικού προγραμματισμού των αρδεύσεων λαμβάνοντας υπόψη τις δυσμενέστερες υγρασιακά καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν, σε μια ανομοιογενή εδαφολογικά περιοχή. Η συμμετοχή των δυσμενέστερων ορίων στον προγραμματισμό των αρδεύσεων βοηθά στο να αποφευχθεί η πτώση της υγρασίας κάτω από τα επιτρεπτά όρια σε κάποιες υποπεριοχές. Το αποτέλεσμα είναι πως οι καλλιέργειες ολόκληρης της περιοχής αναπτύσσονται στις υγρασιακές εκείνες συνθήκες που εξασφαλίζουν τη βέλτιστη παραγωγή. Τα εργαλεία που είναι απαραίτητα για την εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής, θα περιγραφούν στα επόμενα Κεφάλαια και είναι το nearest neighbor μοντέλο, η μέθοδος Monte Carlo, η στατιστική και το μοντέλο προσομοίωσης της κίνησης του νερού στο έδαφος S.W.BA.CRO.S..

Λόγω ἑλλειψης δεδομἑνων, στην διατριβή αυτή η εφαρμογή γίνεται σε μια υποθετική περιοχή τετραγωνικού σχήματος, που είναι χωρισμένη σε εννιά υποπεριοχές. Θεωρούμε ότι το ἑδαφος της περιοχής είναι ανομοιογενές και αποτελείται από ἑνα σύνολο υποπεριοχών η κάθε μια από τις οποίες ἑχει διαφορετική τιμή υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό. Συνεπώς κάθε υποπεριοχή ἑχει και διαφορετική υγρασιακή συμπεριφορά από τις άλλες. Έτσι λοιπόν είναι πολύ λογικό η διαχρονική υγρασιακή συμπεριφορά ολόκληρης της περιοχής – βλ. καμπύλη θ(t) – να αποτελείται από το «άθροισμα» των συμπεριφορών των επί μέρους υποπεριοχών. Αν λοιπόν η υπό μελἑτη περιοχή υποδιαιρεθεί σε *n* υποπεριοχές, τότε με την επίλυση της εξίσωσης Richards για την κάθε μια, θα προκύψουν *n* διαφορετικές υγρασιακές συμπεριφορές. *Από το σύνολο των συμπεριφορών αυτών μπορεί να προκύψει με τη βοήθεια* της στατιστικής, μια μέση υγρασιακή συμπεριφορά της περιοχής, όπως επίσης και τα όρια μέσα στα οποία μπορεί αυτή να κυμανθεί με μια δεδομένη πιθανότητα.

Η θεωρητική διερεύνηση της στοχαστικής μεθοδολογίας, αφήνει ερεθίσματα για την περαιτέρω λεπτομερέστερη εφαρμογή της μεθοδολογίας σε πραγματικές συνθήκες.

1.2 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας.

1.2.1 Κίνηση του νερού σε πορώδη μέσα.

Η θεωρία της κίνησης του νερού μέσα σε κορεσμένα πορώδη μέσα βασίζεται στο νόμο του Darcy που διατυπώθηκε το 1856 μετά από πειράματα σε στήλη άμμου στην Dijon της Γαλλίας (Darcy, 1856).

Στο πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα επέρχεται εξέλιξη και στο θέμα της κίνησης του νερού σε ακόρεστα πορώδη μέσα. Ο Buckingham το 1907 έδωσε μια πρώτη λεπτομερή ανάλυση της ακόρεστης ροής (Buckingham, 1907). Το επόμενο βήμα γίνεται από τον Richards το 1928 (Richards, 1928), όταν όρισε το δυναμικό του εδαφικού νερού ψ και περιέγραψε τη λειτουργία του τενσιόμετρου, ενώ το σημαντικότερο βήμα γίνεται και πάλι από τον ίδιο το 1931, όταν διατυπώνει τη μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ισόθερμη και ισοβαρή κίνηση του νερού διαμέσου ενός ακόρεστου εδάφους (Richards, 1931). Η εξίσωση αυτή φέρει σήμερα το όνομά του και αποτέλεσε την αφετηρία για την περαιτέρω μελέτη της ακόρεστης ροής. Ο μόνος περιορισμός της είναι ότι δεν λαμβάνει υπ΄ όψη της το φαινόμενο της υστέρησης. Συστηματική μελέτη γίνεται στα μετέπειτα χρόνια από τους: Childs and Collis–George (1950), Vachaud (1968), Childs (1969), Philip (1969), Swartzendruber (1969), Parlange (1971) κ.α.

Η εξίσωση Richards είναι έντονα μη γραμμική, γιατί τόσο η ακόρεστη υδραυλική αγωγιμότητα όσο και η πίεση στο έδαφος είναι συναρτήσεις της εδαφικής υγρασίας. Αναλυτικές και ημιαναλυτικές λύσεις της έχουν δοθεί μόνο κάτω από εξιδανικευμένες συνθήκες και συνήθως αγνοώντας το φαινόμενο της υστέρησης. Η ανάπτυξη της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών οδήγησε στη χρήση αριθμητικών λύσεων που βασίζονται είτε στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είτε στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ανασκόπηση πολλών αναλυτικών αλλά και αριθμητικών λύσεων κάνει ο Αντωνόπουλος (1999).

Η αρχική τάση στην έρευνα είχε να κάνει με τη λύση προβλημάτων σε εδάφη χωρίς φυτά. Χαρακτηριστικές εργασίες είναι αυτές των Haverkamp et al. (1977), Tzimopoulos (1978), De Jong and Cameron (1979), Higuchi (1984) και Babajimopoulos (1991).

Με τον καιρό όμως αναπτύχθηκαν νέες τάσεις μελέτης της κίνησης του νερού στο συνεχές σύστημα έδαφος – φυτό – ατμόσφαιρα υπό πραγματικές συνθήκες. Αυτές έδωσαν με τη σειρά τους ώθηση στην ανάπτυξη προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών, τα οποία πέρα από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Richards, λαμβάνουν επιπλέον υπόψη τους τη δράση του ριζικού συστήματος των φυτών, το φαινόμενο της εξατμισοδιαπνοής και τις σχέσεις διαπνοής και απόδοσης των φυτών. Με τον τρόπο αυτό πολύ απλά μπορεί να επιτευχθεί εκείνος ο προγραμματισμός των αρδεύσεων, που θα επιφέρει τη μεγιστοποίηση της παραγωγής. Έτσι:

Οι Feddes et al. (1978) παρουσιάζουν τα μοντέλα S.W.A.T.R. (**S**oil **W**ater **A**ctual **T**ranspiration **R**ate) και CRO.PR. (**CRO**p **PR**oduction). Το S.W.A.T.R. χρησιμοποιώντας μικρομετεωρολογικά δεδομένα και σχέσεις πρόσληψης του νερού από τις ρίζες, επιλύει την εξίσωση Richards με την πεπλεγμένη μέθοδο. Το CRO.PR. συνδυάζεται με το S.W.A.T.R. και δίνει εκτιμήσεις για την προσδοκόμενη παραγωγή. Τα δυο μοντέλα δοκιμάστηκαν με πραγματικά δεδομένα καλλιεργειών όπως τα κόκκινα λάχανα και οι πατάτες και έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Οι Hoogland et al. (1981) βελτίωσαν το μοντέλο S.W.A.T.R. όσο αφορά τον υπολογισμό της πρόσληψης του νερού από τις ρίζες. Θεωρήθηκε ότι η μέγιστη πρόσληψη του νερού από τις ρίζες δεν είναι σταθερή αλλά μειώνεται γραμμικά σε σχέση με το βάθος. Με τον τρόπο αυτό κατά την έναρξη μίας ξηράς περιόδου οι ρίζες μπορούν ακόμη να εκμεταλλεύονται τα ανώτερα στρώματα αφήνοντας την υγρασία των κατώτερων στρωμάτων αχρησιμοποίητη ενώ σε εδάφη με ξηρά επιφανειακά στρώματα και υψηλή υπόγεια στάθμη, η περισσότερη υγρασία προσλαμβάνεται από τα στρώματα που είναι κοντά στην υπόγεια στάθμη.

Οι Van Wijk and Feddes (1982) χρησιμοποίησαν τα μοντέλα S.W.A.T.R. και CRO.PR. για να εκτιμήσουν το βάθος τοποθέτησης των στραγγιστικών σωλήνων στις αποδόσεις των καλλιεργειών για μία σειρά ετών και για διάφορους τύπους εδαφών.

Οι Belmans et al. (1983) βελτιώνουν το S.W.A.T.R. με χρησιμοποίηση διαφορετικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών και αντιμετωπίζοντας μία ευρύτερη κατηγορία οριακών συνθηκών αναπτύσσοντας έτσι το S.W.A.TR.E. (**S**oil **W**ater **A**ctual **T**ransiration **R**ate **E**xtended).

Οι Feddes et al. (1984) συνδύασαν τα μοντέλα S.W.A.T.R.E. και CRO.PR. δημιουργώντας το μοντέλο S.W.A.CRO. που μπορεί να υπολογίσει την πραγματική και δυναμική διαπνοή και την πραγματική ανάπτυξη μιας πατατοκαλλιέργειας κάτω από ένα μεγάλο εύρος οριακών συνθηκών.

Οι Van Wijk and Feddes (1986) επέκτειναν την προηγούμενη εργασία τους του 1982, χρησιμοποιώντας τα μοντέλα S.W.A.T.R.Ε. και CRO.PR. για να μελετήσουν τις επιδράσεις της στράγγισης του εδάφους: στην ευκολία εκτέλεσης εργασιών στο χωράφι με γεωργικά μηχανήματα την άνοιξη, στο χρόνο σποράς – φύτευσης, στο χρόνο βλάστησης, στη διαπνοή και στην ανάπτυξη – παραγωγή ξηράς ουσίας των καλλιεργειών για διάφορους τύπους εδαφών κάτω από διάφορες μετεωρολογικές συνθήκες.

4

Οι Wesseling and Van der Broek (1987) χρησιμοποίησαν το μοντέλο S.W.A.T.R.Ε. για τον ορθολογικό προγραμματισμό των αρδεύσεων. Κατέληξαν ότι με χρήση σωστών δεδομένων το μοντέλο είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στο σωστό προγραμματισμό των αρδεύσεων.

Ο Feddes (1987) περιγράφει αναλυτικά το μοντέλο S.W.A.CRO. και δίνει παραδείγματα από όπου φαίνεται η ισχύς των μοντέλων στην πρόβλεψη της απόδοσης των καλλιεργειών κάτω από διάφορες πολύπλοκες συνθήκες ροής.

Οι Feddes et al. (1988) χρησιμοποίησαν το μοντέλο S.W.A.CRO. για να υπολογίσουν το υδατικό ισοζύγιο και την απόδοση μιας πατατοκαλλιέργειας σ' ένα ιλυοαμμώδες έδαφος κάτω από διάφορες συνθήκες συμπίεσης με πολύ καλά αποτελέσματα.

Ο Prasad (1988) επέλεξε πέντε καλλιέργειες για προσομοίωση και πρότεινε μια καινούργια συνάρτηση για τον υπολογισμό της πρόσληψης της υγρασίας του εδάφους από το ριζικό σύστημα των φυτών.

Οι Hopmans and Gutièrez–Ravé (1988) χρησιμοποίησαν την ανάλυση Monte Carlo και παρουσίασαν μία διαδικασία για τη ρύθμιση του μοντέλου πρόσληψης υγρασίας από το ριζικό σύστημα λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβλητότητα των υδραυλικών ιδιοτήτων του εδάφους χρησιμοποιώντας το μοντέλο S.W.A.T.R.E..

Οι Hopmans and Stricker (1989) επίσης χρησιμοποίησαν την ανάλυση Monte Carlo και το μοντέλο S.W.A.T.R.Ε. και πρότειναν ένα στοχαστικό μοντέλο που προσομοιώνει την ακόρεστη ροή κάτω από διάφορες υδραυλικές ιδιότητες του εδάφους και μία μεταβλητή κατώτερη οριακή συνθήκη. Ακόμη ο Wallach (1990) ανέπτυξε ένα διδιάστατο μοντέλο κάτω από συνθήκες σταθεράς ροής λαμβάνοντας υπόψη την άρδευση και την πρόσληψη της υγρασίας του εδάφους από το ριζικό σύστημα των φυτών.

Οι De Jong and Kabat (1990) χρησιμοποίησαν το μοντέλο SWACROP για την προσομοίωση του υδατικού ισοζυγίου και την παραγωγή στο γρασίδι.

Οι Rasiah et al. (1992) εκτίμησαν, σε καλλιέργεια σόγιας, την επίδραση που έχουν οι διάφοροι μέθοδοι προσδιορισμού των παραμέτρων (γραμμικοί – μη γραμμικοί) και οι διάφορες συναρτήσεις πρόσληψης νερού από τις ρίζες (συνεχείς – μη συνεχείς), στον προσδιορισμό των παραμέτρων και στην προσομοίωση της πρόσληψης του νερού από τις ρίζες

Οι Babajimopoulos et al. (1995) παρουσιάζουν το S.W.BA.CRO.S. (**S**imulation of the **W**ater **BA**lance of a **CRO**pped **S**oil). Η καινοτομία του μοντέλου συνίσταται στην επίλυση της εξίσωσης Richards με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, πρόβλεψης – διόρθωσης Douglas – Jones, που είναι γρηγορότερη από την πεπλεγμένη μέθοδο. Το μοντέλο χρησιμοποιεί επιπλέον τη μέθοδο Rosenbrock για την εκτίμηση των εδαφικών παραμέτρων βασιζόμενο σε μετρήσεις υγρασίας και πίεσης. Παρουσιάζουν επίσης συγκριτικά αποτελέσματα με το S.W.A.TR.E. για μια καλλιέργεια βαμβακιού στην περιοχή της Λάρισας, από όπου φαίνεται η υπεροχή του S.W.BA.CRO.S. σε ακρίβεια και ταχύτητα. Η υπεροχή του S.W.BA.CRO.S. έναντι του S.W.A.TR.E. επιβεβαιώθηκε και από τους Babajimopoulos et al.

(1996) σε πειραματικό αγρό του ΕΘ.Ι.ΑΓ.Ε. (Ινστιτούτο Εγγείων Βελτιώσεων Σίνδου) το οποίο καταλαμβανόταν από βαμβάκι.

Ο Μπίλας (1995) προσθέτει στο S.W.BA.CRO.S. υπορουτίνα πρόβλεψης της παραγωγής μιας καλλιέργειας βαμβακιού. Με την προσθήκη αυτή το S.W.BA.CRO.S. αποτελεί ένα ολοκληρωμένο και χρήσιμο εργαλείο αφού μπορεί να περιγράψει α) με ακρίβεια το υδατικό ισοζύγιο στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους, β) την καταλληλότερη διαδοχή των αρδεύσεων για να επιτευχθεί υδατική οικονομία και γ) την παραγωγή που θα λάβει ο παραγωγός.

Ο Αντωνόπουλος (1998) παρουσιάζει το μοντέλο WA.NI.SIM. (**WA**ter and **NI**trogen **SIM**ulation) το οποίο πέρα από τη επίλυση των εξισώσεων κίνησης του νερού, ασχολείται και με τη μεταφορά μάζας του αμμωνιακού και νιτρικού αζώτου στο έδαφος. Η επίλυση των διαφόρων εξισώσεων γίνεται με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε σε δυο εδάφη στο Acklington του Northumberland της Μεγάλης Βρετανίας και έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα (Antonopoulos and Wyseure, 1998).

1.2.2 Χωρική μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του εδάφους.

Ήδη από το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα αναπτύσσονται ταξινομικά συστήματα εδαφών, καθώς η επιστήμη της Εδαφολογίας είχε καταλήξει πως κάθε συνδυασμός των παραγόντων εδαφογένεσης (δηλαδή του κλίματος, των ζώντων οργανισμών, της βλάστησης, του τοπογραφικού ανάγλυφου, του μητρικού πετρώματος και του χρόνου) δίνει γένεση σε ένα διαφορετικό είδος εδάφους με ξεχωριστές ιδιότητες.

Αποτέλεσμα της ταξινόμησης των εδαφών είναι ο σχηματισμός τάξεων, από την ομαδοποίηση τους με βάση ένα κοινό χαρακτηριστικό. Το χαρακτηριστικό που χρησιμοποιείται ως βάση ταξινόμησης λέγεται «*χαρακτηριστικό διαφοροποίησης*». Οι σχηματιζόμενες τάξεις, υποδιαιρούνται σε κατηγορίες και αυτές σε νέες, περισσότερο ομογενείς (με στενότερα δηλαδή όρια διακύμανσης των ιδιοτήτων τους) αλλά ποτέ απόλυτα όμοιες μεταξύ τους κατηγορίες.

Το ευρύτερα αποδεκτό σήμερα ταξινομικό σύστημα είναι αυτό των Η.Π.Α. με την ονομασία Soil Taxonomy (Soil Survey Staff, 1975). Οι κατηγορίες του συστήματος αυτού είναι:

- 1. Τάξη (Order)
- 2. Υπόταξη (Suborder)
- 3. Μεγάλη ομάδα (Great group)
- 4. Υποομάδα (Subgroup)
- 5. Οικογένεια (Family)
- 6. Εδαφοσειρά (Soil series)

Στην πράξη ο προσδιορισμός της Τάξης ενός εδάφους είναι αρκετός, ενώ σε εδαφολογικές μελέτες η ταξινόμηση είναι ικανοποιητική όταν φτάσει σε επίπεδο Μεγάλης Ομάδας ή ακόμη και Υποομάδας.

Από εδαφολογικής άποψης ένα έδαφος χαρακτηρίζεται από τα επί τοις εκατό ποσοστά άμμου, αργίλου, ιλύος, οργανικής ουσίας, την κατανομή των εδαφικών τεμαχιδίων στους διάφορους ορίζοντες, το πάχος των οριζόντων και άλλες ιδιότητες. Δυστυχώς όμως η σχέση των παραμέτρων αυτών με την κίνηση και αποθήκευση του νερού στο έδαφος, είναι πολύ περίπλοκη και όχι μονοσήμαντη (π.χ. παρατηρείται το φαινόμενο της υστέρησης).

Οι Nielsen et al. (1973) συλλέγοντας δείγματα από 20 τυχαία επιλεγμένες τοποθεσίες, έδωσαν διαφορές μέχρι και 3 τάξεις μεγέθους στις τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό K_s, σε μια περιοχή 150 εκταρίων που όπως αναφέρουν είναι ικανοποιητικά ομοιογενής από εδαφολογικής άποψης.

Όμως σημαντική χωρική μεταβλητότητα παρατηρείται όχι μόνο σε επίπεδο Τάξης αλλά και στην ικανοποιητικά ομοιογενή ταξινομική κατηγορία της Υποομάδας, όπως παρατήρησαν οι Gajem et al. (1981) κατά τη μελέτη ενός Typic Torrifluvent εδάφους. Το μέγεθος της μεταβλητότητας αυτής δε, αυξάνει με την αύξηση της επιφάνειας της υπό εξέταση περιοχής και γίνεται περισσότερο κατανοητή αυξανομένου του όγκου των δειγμάτων που παίρνουμε από αυτήν.

Οι Romano and Santini (1997) συλλέγοντας 100 επιφανειακά δείγματα ανά 50m πάνω σε μια ευθεία 5km στην υδρολογική λεκάνη του ποταμού Agri στην Ιταλία, παρατήρησαν σημαντικές διαφορές στην κοκκομετρική τους σύσταση. Αν τα δείγματα αυτά συμβολιστούν με κουκκίδες, τότε οι διαφοροποιήσεις της εκατοστιαίας περιεκτικότητας κάθε δείγματος σε άμμο, ιλύ και άργιλο, αντικατοπτρίζονται στο Σχήμα 1.1:



Σχήμα 1.1 Τρίγωνο κλάσεων κοκκομετρικής σύστασης των δειγμάτων που συνέλεξαν οι Romano and Santini (1997).

Είναι λοιπόν κατανοητό πως, η εκτίμηση των υδραυλικών παραμέτρων μιας περιοχής (η περιοχή μπορεί να αποτελεί έναν αγρό, μια μεγαλύτερη περιοχή ή και μια υδρολογική λεκάνη) από ένα πολύ μικρό αριθμό διαταραγμένων εδαφικών δειγμάτων στο εργαστήριο, είναι μια σημαντική απλοποίηση που μικρή σχέση έχει με την πραγματικότητα.

Η αποδοχή της ύπαρξης χωρικής μεταβλητότητας, οδήγησε την επιστημονική κοινότητα στις πρώτες προσπάθειες μελέτης του φαινομένου για την όσο το δυνατό καλύτερη προσέγγιση της φυσικής πραγματικότητας και την εξαγωγή πιο αξιόπιστων συμπερασμάτων μέσω της ένταξης της στα διάφορα μοντέλα κίνησης του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους.

Οι Miller and Miller (1956) εισήγαγαν τη θεωρία των «**ομοίων μέσων**». Ο όρος «όμοια» για δυο πορώδη μέσα χρησιμοποιείται με την ίδια σημασία που χρησιμοποιείται και για τα «όμοια» τρίγωνα. Δυο πορώδη μέσα καλούνται «όμοια» όταν το ένα αποτελεί υπό κλίμακα αναπαράσταση του άλλου (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2 Σχηματική αναπαράσταση δύο «ομοίων» μέσων. Τα χαρακτηριστικά μήκη λ₁ και λ₂ συνδέουν αντίστοιχα σημεία και στα δυο μέσα (Miller and Miller, 1956).

Με τον τρόπο αυτό αν οι διαστάσεις του ενός μέσου πολλαπλασιαστούν με ένα συντελεστή αναλογίας θα αποκτηθούν οι διαστάσεις του άλλου. Συνεπώς γνωρίζοντας τις ιδιότητες ενός εδάφους, μπορούμε να περιγράψουμε οποιοδήποτε άλλο γνωρίζοντας το συντελεστή που συνδέει τα δυο εδάφη. Χαρακτηριστικές εργασίες που βασίστηκαν στη θεωρία των «ομοίων» μέσων για την περιγραφή της χωρικής μεταβλητότητας των υδραυλικών παραμέτρων του εδάφους, είναι μεταξύ άλλων αυτές των Klute and Wilkinson (1958), Wilkinson and Klute (1959), Elrick et al. (1959), Philip, (1967). Οι Warrick et al. (1977) κατέληξαν πως παρά το γεγονός ότι τα πραγματικά εδάφη ποτέ δεν ικανοποιούν πλήρως τη θεωρία των ομοίων μέσων (λόγω π.χ. της ιδιότητας της αργίλου να συστέλλεται και να διαστέλλεται μη διατηρώντας έτσι στοθερό πορώδες) η δυνατότητα να συνδέονται δυο διαφορετικάεδάφη με ένα συντελεστή αναλογίας είναι ιδιαίτερα επιθυμητή. Επίσης έδειξαν πως η κατανομή που ακολουθεί ο συντελεστής αναλογίας είναι η λογαριθμοκανονική.

Οι Hopmans and Guttièrez–Ravé (1988), χρησιμοποίησαν την ανάλυση Monte Carlo και παρουσίασαν μία διαδικασία για τη ρύθμιση του μοντέλου πρόσληψης υγρασίας από το ριζικό σύστημα λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβλητότητα των υδραυλικών ιδιοτήτων του

εδάφους χρησιμοποιώντας το μοντέλο S.W.A.T.R.E. Οι Hopmans and Stricker (1989) επίσης χρησιμοποίησαν την ανάλυση Monte Carlo και το μοντέλο S.W.A.T.R.E. και πρότειναν ένα στοχαστικό μοντέλο που μοντέλο βασίζεται στη θεωρία των ομοίων μέσων και προσομοιώνει την ακόρεστη ροή κάτω από διάφορες υδραυλικές ιδιότητες του εδάφους και μία μεταβλητή κατώτερη οριακή συνθήκη

Οι Sharma et al. (1989) μελετώντας τη μεταβλητότητα των παραμέτρων S (απορροφητικότητας) και A της εξίσωσης διήθησης του Philip, σε μια υδρολογική λεκάνη 9.6 εκταρίων, έδειξαν πως η θεωρία των ομοίων μέσων δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Παρατήρησαν πως οι τιμές της απορροφητικότητας (sorptivity) S μεταβαλλόταν κατά μια τάξη μεγέθους, ενώ της παραμέτρου A κατά τέσσερις τάξεις μεγέθους. Στα συμπεράσματά τους φαίνεται ακόμη πως οι μετρήσεις των δυο παραμέτρων δεν ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη στατιστική κατανομή, ενώ οι τιμές του συντελεστή αναλογίας ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή.

Πολλοί ερευνητές όπως οι Law (1944), Aitchison and Brown (1957), Willardson and Hurst (1965), Rogowski (1972), Nielsen et al. (1973), Baker and Bouma (1976), Biggar and Nielsen (1976) κ.α. για να περιγράψουν τη χωρική μεταβλητότητα πρότειναν μια στατιστική προσέγγιση του θέματος: θεωρώντας ότι οι υδραυλικές παράμετροι μεταβάλλονται χωρικά αλλά οι τιμές τους δεν εξαρτώνται η μια από την άλλη, προσπάθησαν να ανακαλύψουν αν οι τιμές αυτές ακολουθούν κάποια κατανομή και αν ναι ποια.

Καταλήγουν έτσι πως η υδραυλική αγωγιμότητα για παράδειγμα ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή (Σχήμα 1.3), ενώ την ίδια κατανομή ακολουθεί και η διαχυτικότητα D (diffusivity). Αντίθετα η εδαφική υγρασία φαίνεται πως ακολουθεί κανονική κατανομή.



Σχήμα 1.3 Μετρημένες και υπολογισμένες κατανομές συχνοτήτων για τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας (Nielsen et al., 1973).

Ο Freeze (1975) μελετώντας την μονοδιάστατη υπόγεια ροή του νερού θεώρησε την υδραυλική αγωγιμότητα σαν στάσιμη στοχαστική μεταβλητή χωρικά ανεξάρτητη.

9

Ταυτόχρονα δημιούργησε ένα σύνολο δεδομένων εισόδου και διερεύνησε τη χωρική μεταβλητότητα με τη βοήθεια της μεθόδου Monte Carlo. Στην εργασία του αυτή ανεγνώρισε την ανάγκη για μια πιο ορθολογική προσέγγιση της χωρικής μεταβλητότητας, όπου οι τιμές μιας μεταβλητής δεν θα θεωρούνται πια ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι Rao et al. (1978) εξετάζουν τα στατιστικά κριτήρια των Kolmogorov και Cramer – von Mises, με σκοπό την εκτίμηση του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού δεδομένων για μια ακριβή κατάταξη κάποιων μετρήσεων σε μια κατανομή. Καταλήγουν πως στην περίπτωση που ο συντελεστής μεταβλητότητας ενός σετ μετρήσεων είναι ≤0.4, τόσο η κανονική όσο και η λογαριθμοκανονική κατανομή μπορούν να είναι εξίσου ικανοποιητικές με ένα μέγιστο σφάλμα περίπου 20%.

Οι Smith and Hebbert (1979) δημιουργώντας τυχαίες τιμές που προέρχονται από συγκεκριμένη στατιστική κατανομή και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo μελετούν την επίδραση της χωρικής μεταβλητότητας στο φαινόμενο της διήθησης του νερού. Πιστεύουν πως η μέθοδος Monte Carlo μπορεί να αποτελέσει μια αναπαράσταση της φυσικής πραγματικότητας και προτείνουν λεπτομερή προσδιορισμό της στατιστικής κατανομής των διαφόρων παραμέτρων, τουλάχιστο για περιοχές με υδρολογικό ενδιαφέρον.

Οι Dagan and Bresler (1983) μελετώντας την κίνηση του νερού στην ακόρεστη ζώνη ενός εδάφους του οποίου οι υδραυλικές παράμετροι μεταβάλλονται στο χώρο, θεώρησαν πως από τις παραμέτρους K_s (υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό), θ_s (εδαφική υγρασία στον κορεσμό), θ_r (υπολειμματική εδαφική υγρασία), ψ_w (bubling pressure ή air entry pressure – ύψος πίεσης για το οποίο $\frac{\partial \theta}{\partial h} > 0$) και β (ο εκθέτης της εξίσωσης Brooks – Corey, 1964), η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό είναι η μόνη χωρικά μεταβαλλόμενη, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές. Η επεξήγηση για την απλοποίηση αυτή στηρίζεται στο ότι η μεταβολή της K_s είναι πολύ μεγάλη, ενώ αντίθετα οι υπόλοιπες παράμετροι μεταβάλλονται σε σαφώς στενότερα όρια.

Οι Carsel και Parish (1988) χρησιμοποιώντας δεδομένα από τους 12 τύπους εδαφών της S.C.S. υπολόγισαν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβολής των παραμέτρων της εξίσωσης van Genuchten. Έτσι παρουσίασαν πίνακες με το μέσο όρο, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας για κάθε μια από τις τέσσερις παραμέτρους θ_s, θ_r, α, και n. Επίσης παρουσίασαν πρόγραμμα σε γλώσσα BASIC το οποίο δημιουργεί τυχαίες τιμές των προαναφερθέντων υδραυλικών παραμέτρων. Οι τιμές αυτές «αντιστοιχούν» σε τιμές μετρημένες στο πεδίο και συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τη χωρική μεταβλητότητα ενός τύπου εδάφους με τη βοήθεια της μεθόδου Monte Carlo.

Οι Russo and Bouton (1992) δέχονται και αυτοί ότι: «η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό K_s ... μεταβάλλεται σημαντικά στο χώρο και ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή».

Η φυσική πραγματικότητα έρχεται σε αντίφαση (Freeze, 1975, Bakr et al., 1978) με τη βασική θεώρηση της κλασσικής στατιστικής προσέγγισης: της μη εξάρτησης δυο

γειτονικών τιμών. Οι υδραυλικές ιδιότητες του εδάφους μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο, η μεταβολή τους όμως δεν είναι εντελώς τυχαία, αλλά μακροχρόνιες παρατηρήσεις οδήγησαν στο συμπέρασμα πως υπάρχει μια δομημένη χωρική διευθέτηση. Η αδυναμία της στατιστικής προσέγγισης έδωσε το έναυσμα για την ανάπτυξη θεωριών που ασχολούνται με την χωρική εξάρτηση των τιμών μιας μεταβλητής. Έτσι:

Ο Matheron (1962, 1963, 1965, 1971) ανέπτυξε τη θεωρία των περιφερειακών μεταβλητών (theory of regionalized variables) η οποία βασίζεται μερικώς σε εμπειρική δουλειά του Krige (1951) πάνω στον προσδιορισμό κοιτασμάτων σε χρυσορυχεία της Νότιας Αφρικής. Η μεθοδολογία που προέκυψε από τη θεωρία του Matheron ονομάστηκε Γεωστατιστική (Geostatistics) και χρησιμοποιείται για την μελέτη της χωρικής ή χρονικής μεταβλητότητας παραμέτρων. Η Γεωστατιστική διαφέρει από την κλασσική Στατιστική, αφού θεωρεί πιθανό οι κοντινές μεταξύ τους, τοπικά ή χρονικά, μετρήσεις μιας παραμέτρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, σε αντίθεση με άλλες μετρήσεις μακρινότερες μεταξύ τους. Αρχικά η Γεωστατιστική χρησιμοποιήθηκε από γεωλόγους για να εκτιμηθεί ο όγκος και η δυνατότητα εκμετάλλευσης κοιτασμάτων μετάλλων. Η χρήση της όμως με το πέρασμα του χρόνου επεκτάθηκε στη μελέτη εδαφικών παραμέτρων όπως η ταχύτητα διήθησης (Vieira et al., 1981), η υδραυλική αγωγιμότητα (Tzimopoulos et al., 1986, Gallichand et al., 1990), η υγρασιακή κατάσταση του εδάφους (Yates and Warrick, 1987, Κερκίδης κ.α., 1991) και η απορροφητικότητα – sorptivity (Tzimopoulos and Papadopoulou, 1992). Η Γεωστατιστική εφαρμόζεται επίσης και σε διάφορες υδρολογικές παραμέτρους όπως η βροχόπτωση (Delhomme, 1978, Chang, 1991, Papamichail and Metaxa, 1996)

Μια άλλη θεωρία είναι και αυτή του **μοντέλου nearest neighbor**, στο οποίο η τιμή μιας μεταβλητής σε ένα σημείο εξαρτάται από έναν αριθμό γειτονικών στο χώρο τιμών, που καθορίζουν την «τάξη» του.

Θεωρητική διερεύνηση της χωρικής εξάρτησης στο επίπεδο κάνουν διάφοροι ερευνητές όπως οι Whittle (1954), Besag (1974), Bartlett (1975) κ.α.. Λεπτομέρειες για τον τρόπο εφαρμογής του μοντέλου παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Ο Smith (1978) μελετά εξονυχιστικά το μοντέλο nearest neighbor και το συνδυάζει με τη μέθοδο Monte Carlo, στη στοχαστική μελέτη της κίνησης του νερού σε υπόγειους υδροφορείς. Η μελέτη αυτή γίνεται με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και αφορά τόσο μια διάσταση στο χώρο όσο και δύο. Το μοντέλο nearest neighbor δεν χρησιμοποιείται μόνο για την δημιουργία δεδομένων. Επιχειρήθηκε προσαρμογή του σε πραγματικά δεδομένα πεδίου ώστε να επιβεβαιωθεί η περιγραφική του ικανότητα. Το συμπέρασμα είναι πως το μοντέλο nearest neighbor πρώτης τάξης, δεν επαρκεί για την περιγραφή της χωρικής μεταβλητότητας κατά μια διεύθυνση, με συνέπεια να προτείνεται η χρήση μεγαλύτερης τάξης μοντέλου.

Οι Smith και Freeze (1979a) θεώρησαν την υδραυλική αγωγιμότητα ως χωρικά εξαρτημένη μεταβλητή. Η εξάρτηση αυτή περιγράφεται από το μοντέλο nearest neighbor και

χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo, για τη στοχαστική ανάλυση της μονοδιάστατης ακόρεστης ροής. Από τα αποτελέσματα της μεθόδου προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ύψους πίεσης. Οι ίδιοι ερευνητές επεκτείνουν αργότερα την ίδια εργασία στις δύο διαστάσεις (Smith και Freeze, 1979b).

Οι Anderson και Shapiro (1983) συνδύασαν το μοντέλο nearest neighbor και τη μέθοδο Monte Carlo, για την στοχαστική ανάλυση της μονοδιάστατης ακόρεστης ροής. Τα αποτελέσματά τους συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα της μεθόδου των διακυμάνσεων (perturbation method). Αν και τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια, σαν πιο αξιόπιστα θεωρήθηκαν αυτά του συνδυασμού μεθόδου Monte Carlo και μοντέλου nearest neighbor.

Οι Bresler και Dagan (1983) παρουσίασαν μοντέλα κίνησης του νερού σε διάφορα εδάφη θεωρώντας ότι η κίνηση του νερού είναι κατακόρυφη και ότι δεν υπάρχει μεταβολή των υδραυλικών ιδιοτήτων με το βάθος αλλά μόνο στο οριζόντιο επίπεδο.

Ο Chung (1985) δημιούργησε ένα ολοκληρωμένο μονοδιάστατο στοχαστικό μοντέλο κίνησης του νερού σε ακόρεστο και κορεσμένο έδαφος. Η καινοτομία του μοντέλου αυτού είναι ότι στους υπολογισμούς του υπεισέρχεται η υστέρηση. Η υδραυλική αγωγιμότητα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση θεωρείται χωρικά εξαρτημένη με τη χρήση ενός μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης και τέλος γίνεται χρήση της μεθόδου Monte Carlo.

Ο Milly (1988) παρουσιάζει αναλυτικά τις εξελίξεις της επιστήμης στη μελέτη της κίνησης του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους. Αναφορές γίνονται τόσο σε ντετερμινιστικές όσο και σε στοχαστικές προσεγγίσεις, ενώ η εκτενής βιβλιογραφία που παρατίθεται μπορεί να αποτελέσει σημαντικό βοήθημα στον εκάστοτε ερευνητή.

Ο Durner (1994) προτείνει μια διαφορετική προσέγγιση για την περιγραφή της διαφοροποίησης των υδραυλικών παραμέτρων στο χώρο. Αντί της χρήσης μιας εξίσωσης Van Genuchten για κάθε διακριτό τύπο εδάφους προτείνει τη χρήση μιας σχέσης της μορφής:

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i \left[\frac{1}{1 + (\alpha_i \psi_i)^{n_i}} \right]^{m_i}$$
(1.1)

με μ να αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό των διακριτών αυτών τύπων εδαφών και το συντελεστή w va αποτελεί ένα σταθμιστικό παράγοντα. Ο ίδιος ερευνητής δείχνει ότι η περιγραφή αυτή της χαρακτηριστικής καμπύλης – Χ.Κ.Υ. – υπερέχει της κλασσικής σχέσης Van Genuchten.

Οι Mallants et al. (1996) χρησιμοποιούν τη μέθοδο Monte Carlo σε συνδυασμό με τα μοντέλα WAVE (Vanclooster et al., 1994) και SHYPFIT (Durner, 1995) μελετώντας στοχαστικά την στράγγιση του νερού σε ένα στρωματωμένο εδαφικό προφίλ. Υιοθετούν την προσέγγιση των παράλληλων στηλών (Cordova and Bras, 1982, Dagan and Bresler, 1983) σύμφωνα με την οποία το έδαφος είναι ένα σύνολο από παράλληλες στήλες με στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους ιδιότητες. Οι στήλες αυτές θεωρούνται ομογενείς κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, απλοποιώντας έτσι το συνολικό φαινόμενο. Στα συμπεράσματά τους καταδεικνύουν την ανάγκη για ένα μοντέλο κίνησης του νερού που εναρμονίζεται με τον τύπο των χαρακτηριστικών καμπυλών που πρότεινε ο Durner (1994).

Την περιγραφική υπεροχή της πρότασης του Durner (1994) έναντι της κλασσικής περιγραφής της χαρακτηριστικής καμπύλης υγρασίας μέσω της εξίσωσης Van Genuchten, επιβεβαιώνουν και οι Mallants et al. (1997).

Κεφάλαιο 2. Το μοντέλο nearest neighbor

2.1 Γενικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το στοχαστικό μοντέλο nearest neighbor που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει ορισμένους τύπους διαδικασιών στο χώρο. Μιλώντας τυπικότερα, θα ασχοληθούμε με ένα μάλλον αυθαίρετο σύστημα ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων ή περιοχών σε κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί μια τυχαία μεταβλητή. Στις περισσότερες εφαρμογές σημεία ή περιοχές αποτελούν μέρος μιας αυστηρής δομής πλέγματος.

Το μοντέλο nearest neighbor παράγει τιμές σε κάθε σημείο ή περιοχή του πλέγματος που προαναφέρθηκε, με σκοπό να προσεγγίσει τη φυσική πραγματικότητα. Το βασικό του πλεονέκτημα είναι ότι οι τιμές που παράγονται ακολουθούν μια συγκεκριμένη στατιστική κατανομή, ενώ συγχρόνως είναι και εξαρτημένες μεταξύ τους.

Τύποι διαδικασιών που έχουν μελετηθεί με το μοντέλο αυτό, εμφανίζονται στη διάδοση ασθενειών σε αγρούς, στον ανταγωνισμό φυτών, στην παραγωγική απόδοση οπωρώνων κ.α.. Για παράδειγμα:

Ο Cochran (1936) μελέτησε την εξέλιξη της διάδοσης της ιολογικής ασθένειας «κηλιδωτός μαρασμός» της τομάτας (tomato spotted wilt) σε μια ορθογώνια διάταξη φυτών.

Οι Clarke (1946) και Feller (1957) προσομοίωσαν τα χτυπήματα των ιπτάμενων βομβών στο νότιο Λονδίνο κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκόσμιου Πόλεμου.

Ο Mead (1966, 1967, 1968) ασχολήθηκε με την επίδραση διαφορετικών αποστάσεων φύτευσης (και συνεπώς ανταγωνισμού σε θρεπτικά στοιχεία και νερό) στην παραγωγή των φυτών.

Ο Nicholson (1999) προτείνει τη χρήση του μοντέλου nearest neighbor για την ανάλυση της χωρικής κατανομής των οδικών ατυχημάτων και την επιλογή της καταλληλότερης πρακτικής για την ελαχιστοποίησή τους.

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται προσέγγιση της θεωρίας και περιγράφονται αναλυτικά οι βασικές αρχές εφαρμογής του μοντέλου. Επειδή το μοντέλο nearest neighbor αποτελεί μια επέκταση των μοντέλων Markov, θεωρείται αναγκαίο να δοθούν οι βασικές αρχές των μοντέλων Markov.

2.2 Μοντέλα Markov.

Η περιγραφή και κατανόηση του φυσικού μηχανισμού γένεσης μιας υδρολογικής χρονοσειράς είναι σχεδόν αδύνατο να γίνει, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των υδρολογικών συστημάτων. Η μαθηματική έκφραση του μηχανισμού γένεσης είναι το μαθηματικό μοντέλο της χρονοσειράς. Το μοντέλο αυτό εφόσον προσεγγίζει σωστά το μηχανισμό, είναι ικανό να δημιουργεί τιμές της υδρολογικής μεταβλητής που εξετάζεται, οι οποίες θα έχουν παρόμοια στατιστικά χαρακτηριστικά με εκείνα του δείγματος πάνω στο οποίο έγινε η ανάλυση.

Πολλές υδρολογικές χρονοσειρές (π.χ. μια χρονοσειρά παροχών qt) εμφανίζουν σημαντική συσχέτιση μεταξύ των τιμών τους. Αυτό σημαίνει πως η τιμή μιας μεταβλητής σε κάποια χρονική στιγμή εξαρτάται από έναν αριθμό παρελθοντικών τιμών της ίδιας μεταβλητής (Haan, 1977).

Μια κατηγορία μοντέλων που μπορούν να περιγράψουν μια τέτοια χρονοσειρά είναι και το απλό γραμμικό μοντέλο αυτοσυσχέτισης ή αλλιώς μοντέλο Markov. Αν η παράμετρος που πρέπει να μελετηθεί (για παράδειγμα η παροχή ενός ποταμού) συμβολιστεί με q τότε το μοντέλο Markov γράφεται:

$$q_{t} = \beta_{0} + \beta_{1} q_{t-1} + \beta_{2} q_{t-2} + \dots + \beta_{n} q_{t-n} + \varepsilon_{t}$$
(2.1)

δηλαδή η παροχή q σε κάποια χρονική στιγμή t αποτελεί γραμμικό συνδυασμό η τιμών του παρελθόντος, ενώ υπεισέρχεται και ένας τυχαίος αριθμός ε_t . Αν η παράμετρος q_t ακολουθεί την κανονική κατανομή N(μ,σ) τότε και η κατανομή των ε_t θα είναι η N(0,σ). Οι συντελεστές β_i εκφράζουν το βαθμό της εξάρτησης της τιμής q_t από τις παρελθοντικές τιμές q_{t-i} , ενώ ο τυχαίος αριθμός ε_t συνοψίζει τη επίδραση διαφόρων άλλων τυχαίων παραμέτρων πάνω στο μηχανισμό γένεσης της παροχής q_t . Η απλούστερη μορφή της (2.1) είναι η:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.2}$$

η οποία αποτελεί την έκφραση του μοντέλου Markov πρώτης τάξης. Περισσότερες πληροφορίες πάνω στα μοντέλα Markov μπορεί κάποιος να αποκτήσει από διάφορους συγγραφείς όπως οι Fiering and Jackson (1971), Haan (1977), Παπαμιχαήλ (1991) κ.α..

15

Το μοντέλο nearest neighbor, που θα περιγραφεί αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους, αποτελεί την επέκταση των μοντέλων Markov στο χώρο και για το λόγο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μοντέλο αυτοσυσχέτισης χρονοσειράς (autoregressive time series model) που όμως εκτείνεται στο χώρο και όχι στο χρόνο.

2.3 Περιγραφή του μοντέλου nearest neighbor.

Ενώ στα μοντέλα Markov η εξάρτηση μεταξύ των τιμών εκτείνεται μόνο προς μια διάσταση (το παρελθόν – προς τα πίσω) στο χώρο η εξάρτηση εκτείνεται σε περισσότερες διαστάσεις. Για να γίνει αυτό κατανοητό ας θεωρηθεί ότι μελετάται η μεταβλητότητα μιας παραμέτρου Υ, σε μια διάσταση του χώρου (έστω κατά την κατακόρυφη διεύθυνση) και ότι ο χώρος διακριτοποιείται σε ίσα διαστήματα Δz (Σχήμα 2.1) μέσα στα οποία δεν υπάρχει μεταβολή της παραμέτρου Υ. Είναι λογικό τότε να ειπωθεί πως η τιμή Υ₂ εξαρτάται όχι από την Υ₁ αλλά και από την Υ₃. Συνεπώς η εξάρτηση εκτείνεται σε δυο διαστάσεις: τόσο προς τα πίσω (γιατί η Υ₂ εξαρτάται από την Υ₁) όσο και προς τα εμπρός (γιατί η Υ₂ εξαρτάται και από την Υ₃).

Ένα πιο παραστατικό παράδειγμα δίνει ο Whittle (1954): αν μελετάται η μεταβολή της συγκέντρωσης θρεπτικών στοιχείων στο έδαφος η εξάρτηση είναι φανερό ότι επεκτείνεται ισοδύναμα και στις τρεις διαστάσεις του χώρου. Έτσι ένας κόκκος λιπάσματος που θα εφαρμοστεί κάποια στιγμή στο έδαφος, θα επηρεάσει τη γονιμότητα του εδάφους σε όλες τις διευθύνσεις.

Σχήμα 2.1 Σχηματική αναπαράσταση της διακριτοποίησης του χώρου για το nearest neighbor μοντέλο σε μια διάσταση. Τα διαστήματα Δz γενικά απαιτείται να είναι ίσα.

Το πλήθος των τιμών που περιβάλλουν και ταυτόχρονα επηρεάζουν την τιμή σε ένα άλλο σημείο, καθορίζει την τάξη του μοντέλου nearest neighbor. Το **μοντέλο nearest neighbor πρώτης τάξης σε μια διάσταση** θεωρεί ότι:

- 1. η παράμετρος Υ ακολουθεί την κανονική κατανομή Ν(0,σ) και
- ότι η τιμή Υ_i εξαρτάται μόνο από τις άμεσα γειτονικές της Υ_{i-1} και Υ_{i+1} σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_{i} = \alpha_{z} (Y_{i-1} + Y_{i+1}) + \varepsilon_{i}$$
(2.3)

- όπου: az η αυτοσυσχετιστική παράμετρος (|az|<1), η οποία εκφράζει το βαθμό της χωρικής εξάρτησης της μεταβλητής Yi από τις δυο άμεσα γειτονικές τιμές της, Yi-1 και Yi+1.
 - ε_{ij} ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την ίδια στατιστική κατανομή N(0,σ) –
 με την παράμετρο Υ και εκφράζει τις διάφορες τυχαίες επιδράσεις στη φυσική πραγματικότητα.

Αντίστοιχα με την εξίσωση (2.3), για το μοντέλο nearest neighbor δεύτερης τάξης σε μια διάσταση θα ισχύει:

$$Y_{i} = \alpha_{z} (Y_{i-1} + Y_{i+1}) + \beta_{z} (Y_{i-2} + Y_{i+2}) + \varepsilon_{i}$$
(2.4)

όπου: β_z η αυτοσυσχετιστική παράμετρος ($|\beta_z| < 1$), η οποία εκφράζει το βαθμό της χωρικής εξάρτησης της μεταβλητής Y_i από τις δυο γειτονικές τιμές της, Y_{i-2} και Y_{i+2}.

Ας θεωρηθεί τώρα μια πεπερασμένη περιοχή που αποτελεί πεδίο τιμών μιας παραμέτρου Υ. Πάνω από την περιοχή τοποθετείται ένα επίσης πεπερασμένο πλέγμα του οποίου οι κόμβοι χαρακτηρίζονται από ζεύγη ακεραίων (i,j). Στο πλέγμα αυτό κάθε κόμβος (i,j) θα έχει τέσσερις γειτονικούς κόμβους: (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1).

Η έννοια των κόμβων, δεν είναι αυστηρή: σαν κόμβοι μπορεί να θεωρηθούν υποπεριοχές της αρχικής περιοχής, μέσα στις οποίες θεωρείται ότι δεν υπάρχει μεταβολή της τιμής της παραμέτρου που μελετάται. Η έννοια των υποπεριοχών γίνεται αντιληπτή από το Σχήμα 2.2 και θα χρησιμοποιηθεί στο υπόλοιπο κείμενο αντί της έννοιας των κόμβων.



Σχήμα 2.2 Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα πρώτης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις. Οι διαστάσεις Δχ και Δγ, γενικά απαιτείται να είναι ίσες.

Το **μοντέλο nearest neighbor πρώτης τάξης σε δυο διαστάσεις** θεωρεί ότι η τιμή Υ_{i,j} εξαρτάται από τις γειτονικές της Υ_{i,j+1} , Υ_{i-1,j} , Υ_{i+1,j} , Υ_{i,j-1} σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_{ij} = \alpha_x (Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j}) + \alpha_y (Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1}) + \varepsilon_{ij}$$
(2.5)

- όπου: a_x η αυτοσυσχετιστική παράμετρος (|a_x|<1) που εκφράζει το βαθμό της χωρικής εξάρτησης της μεταβλητής Y_{i,j} από τις δυο γειτονικές τιμές της στον x – άξονα, Y_{i-1,j} και Y_{i+1,j}.
 - α_y η αυτοσυσχετιστική παράμετρος (|a_y|<1)που εκφράζει το βαθμό της χωρικής εξάρτησης της μεταβλητής Y_{i,j} από τις δυο γειτονικές τιμές της στον y – άξονα Y_{i,j-1} και Y_{i,j+1}.
 - ε_{ij} ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την ίδια στατιστική κατανομή N(0,σ) με την παράμετρο Y και εκφράζει τις διάφορες τυχαίες επιδράσεις στη φυσική πραγματικότητα.

Η έννοια του μοντέλου πρώτης τάξης μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε μοντέλα μεγαλύτερης τάξης. Στα μοντέλα αυτά θεωρείται πως τιμή Υ_{i,j} επηρεάζεται και από πιο μακρινά σημεία. Έτσι αν γίνει δεκτό ότι πέρα από τα σημεία Y_{i,j+1}, Y_{i-1,j}, Y_{i+1,j}, Y_{i,j-1} η τιμή Y_{i,j} επηρεάζεται και από τα σημεία Y_{i-1,j+1}, Y_{i+1,j+1}, Y_{i+1,j+1}, Y_{i+1,j-1} τότε γίνεται αναφορά στο **μοντέλο nearest neighbor δεύτερης τάξης** το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3 Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα δεύτερης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις.



Σχήμα 2.4 Σχηματική αναπαράσταση του nearest neighbor καννάβου για ένα τρίτης τάξης μοντέλο σε δυο διαστάσεις.

Αντίστοιχα, το **μοντέλο nearest neighbor τρίτης τάξης** προκύπτει από το μοντέλο δεύτερης τάξης με την παραδοχή της επίδρασης στην Υ_{i,j} και των επιπλέον γειτονικών τιμών Υ_{i,j+2}, Υ_{i-2,j}, Υ_{i+2,j}, Υ_{i,j-2} (Σχήμα 2.4).

Στις επόμενες παραγράφους θα μελετηθεί η ικανότητα του μοντέλου να περιγράψει τη χωρική μεταβλητότητα μιας ήδη μετρημένης παραμέτρου. Επίσης θα δειχθεί η δυνατότητά του να παράγει τυχαίες τιμές της παραμέτρου, οι οποίες όμως θα έχουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες με αυτή.

2.4 Το πρόβλημα των οριακών υποπεριοχών.

2.4.1 Περιγραφή – αντιμετώπιση.

Έστω ότι η περιοχή ορθογωνικού σχήματος του Σχήματος 2.5, αποτελεί το πεδίο τιμών της μεταβλητής Υ και έχει διαστάσεις p×q:



Σχήμα 2.5: Διδιάστατο πεδίο τιμών μιας μεταβλητής Υ, χωρισμένο σε αριθμό υποπεριοχών.

Η εξίσωση του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης σε δυο διαστάσεις για την υποπεριοχή (1,1) γράφεται:

$$Y_{1,1} = \alpha_x (Y_{0,1} + Y_{2,1}) + \alpha_y (Y_{1,0} + Y_{1,2}) + \varepsilon_{1,1}$$
(2.6)

από όπου φαίνεται ότι η τιμή Y_{1,1} εξαρτάται τόσο από την Y_{0,1} όσο και από την Y_{1,0} οι οποίες βρίσκονται εκτός των ορίων της περιοχής (Σχήμα 2.6):



Σχήμα 2.6: Εξάρτηση της υποπεριοχής (1,1) από υποπεριοχές εκτός των ορίων.

Η συμμετοχή των εκτός των ορίων τιμών στο μοντέλο nearest neighbor επιφέρει δυσκολίες κατά την εφαρμογή του που περιγράφονται από τον όρο edge effect ή boundary effect. Έτσι για παράδειγμα οι τιμές αυτές ανάλογα με τη φύση της περιοχής που μελετάται, μπορεί να είναι είτε **άγνωστες** (αν η παράμετρος Υ εκφράζει για παράδειγμα την υδραυλική αγωγιμότητα του εδάφους, παρά το γεγονός ότι σαν παράμετρος παρουσιάζει μια συνέχεια στο χώρο, μπορεί η περιοχή που μελετάται να εμφανίζει φυσικές ασυνέχειες όπως ποτάμια, λίμνες και βραχώδεις σχηματισμούς και κατά συνέπεια να υπάρχει έλλειψη δεδομένων) ή ακόμη και **ανύπαρκτες** (αν η παράμετρος Υ εκφράζει για παράδειγμα το ύψος παραγωγής του σιταριού σε μια καλλιεργούμενη περιοχή, τότε η παραγωγή των οριακών περιοχών θα εξαρτάται από γειτονικές υποπεριοχές στις οποίες δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι καλλιεργείται σιτάρι).

Σα συνέπεια των παραπάνω, στην κατάρτιση των εξισώσεων του μοντέλου nearest neighbor για κάθε υποπεριοχή θα συμπεριλαμβάνονται επιπλέον άγνωστοι (οι τιμές των υποπεριοχών εκτός των ορίων), καθιστώντας αδύνατη την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων. Ακόμα όμως και αν αυτή ήταν δυνατή, η άγνωστου βαθμού εξάρτηση της Y_{1,1} από τις Y_{0,1} και Y_{1,0} με τη σειρά της θα επηρεάσει το βαθμό εξάρτησής της με την Y_{1,2} (η οποία όχι μόνο εξαρτάται από την Y_{1,1} αλλά με τη σειρά της δέχεται και άλλη αγνώστου βαθμού επίδραση, αυτή της Y_{0,2}) θα επηρεάσει την Y_{1,3} και θα επεκταθεί, μειούμενη όμως με την απόσταση, σε όλες τις υποπεριοχές.

Οι οριακές υποπεριοχές ενός διδιάστατου πεδίου τιμών που δέχονται επιδράσεις παρόμοιες με αυτές της (1,1) είναι οι (Σχήμα 2.7):

$$\mathbf{Y}_{1,j}, \mathbf{Y}_{i,1}, \mathbf{Y}_{i,q}, \mathbf{Y}_{p,1} \quad \forall \quad \begin{cases} 1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q \end{cases}$$

και το πλήθος τους είναι: 2(p+q-2).



Σχήμα 2.7 Διδιάστατο πεδίο τιμών μιας μεταβλητής Υ, με τις (γραμμοσκιασμένες) υποπεριοχές που υφίστανται επιδράσεις από άλλες εκτός των ορίων.

Η αντιμετώπιση των επιδράσεων των υποπεριοχών εκτός ορίων αποτελεί ένα ακανθώδες πρόβλημα το οποίο είχε αγνοηθεί από τους ερευνητές (όπως οι Whittle, 1954 και Besag, 1974) μέχρι πρόσφατα. Το να αγνοηθεί όμως είναι μάλλον απλοϊκό, καθώς έχει αναγνωριστεί (Cressie, 1993) ότι η επίδραση των εκτός ορίων υποπεριοχών δεν μπορεί πάντα να αγνοείται.

Οι διορθωτικές ενέργειες που πρέπει να γίνουν μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: (α) σε ενέργειες που αποσκοπούν στη μείωση της έντασης του φαινομένου και (β) σε ενέργειες που αποσκοπούν στην εξάλειψή του. Σαφώς καλύτερα αποτελέσματα όμως παρέχει ο συνδυασμός ενεργειών και από τις δυο κατηγορίες.

Ως γενική αρχή για την μείωση της έντασης του προβλήματος ενδείκνυται ο διαμερισμός της περιοχής σε όσο το δυνατό περισσότερες υποπεριοχές. Αυτό γιατί με τον λεπτομερέστερο διαχωρισμό (α) μειώνεται σημαντικά το ποσοστό των υποπεριοχών εντός των ορίων της περιοχής που εξαρτώνται από υποπεριοχές εκτός αυτών των ορίων. Έτσι αν μια περιοχή χωριστεί με ένα κάνναβο 10×10 τότε το ποσοστό των υποπεριοχών που βρίσκεται στα όρια της είναι:

$$\frac{2(p+q-2)}{p \cdot q} = \frac{2(10+10-2)}{10 \cdot 10} = 36\%$$

ενώ αν η ίδια περιοχή χωριστεί με ένα κάνναβο 100×100 τότε το αντίστοιχο ποσοστό είναι μόνο 3,96% και (β) μειώνεται η επίδραση των υποπεριοχών εκτός των ορίων πάνω στις εσωτερικές. Αυτό συμβαίνει καθώς όσο μακρύτερα είναι μια υποπεριοχή από τα όρια τόσο πιο ασθενής είναι η επίδραση που δέχεται από αυτά.

Διάφορες προσεγγίσεις που έχουν κατά καιρούς προταθεί και αποσκοπούν στην εξάλειψη του προβλήματος δίνονται αμέσως παρακάτω:

Αποκοπή υποπεριοχών (boundary truncation).

Χρήση αυτής της προσέγγισης κάνουν οι Smith and Freeze (1979b), ενώ την προτείνουν και οι King and Smith (1988). Κατά την εφαρμογή της γίνεται δεκτό πως η στοχαστική εξάρτηση δεν μπορεί να εκτείνεται πέρα από τα όρια της περιοχής και συνεπώς όταν οι υποπεριοχές εκτός των ορίων εμφανίζονται στις εξισώσεις του μοντέλου nearest neighbor, αποκόπτονται. Έτσι για παράδειγμα για την υποπεριοχή (1,1) η εξίσωση (2.5) τροποποιείται ως εξής:

$$Y_{1,1} = \alpha_x Y_{2,1} + \alpha_y Y_{1,2} + \varepsilon_{1,1}$$
(2.7)

Δημιουργία ζώνης προστασίας (guard area).

Ας υποτεθεί ότι η περιοχή που πρέπει να μελετηθεί έχει χωριστεί σε m×n υποπεριοχές με ένα σύστημα m γραμμών και n στηλών (Σχήμα 2.8):



Σχήμα 2.8: Η περιοχή μελέτης πριν τη δημιουργία της ζώνης προστασίας. Οι υποπεριοχές εκτός ορίων είναι αυτές που περιέχουν το σύμβολο +.

Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή (που χρησιμοποίησαν οι Gleeson and McGilchrist, 1980) η τιμή της παραμέτρου που μελετάται απαιτείται να είναι γνωστή στις οριακές

υποπεριοχές. Περιορίζοντας την εφαρμογή του μοντέλου σε μια μικρότερη περιοχή από την αρχική (με διαστάσεις m-1 γραμμές επί n-1 στήλες) οι προηγουμένως οριακές υποπεριοχές θα μείνουν εκτός των ορίων της νέας περιοχής μελέτης (Σχήμα 2.9). Επειδή στις υποπεριοχές θα αυτές οι τιμές της παραμέτρου είναι γνωστές, είναι δυνατό να συμπεριληφθούν στην κατάρτιση των εξισώσεων του μοντέλου nearest neighbor. Με τον τρόπο αυτό θα σχηματίζεται η λεγόμενη «ζώνη προστασίας» της μικρότερης περιοχής. Η μείωση των διαστάσεων της μελετούμενης περιοχής, αποτελεί το μειονέκτημα της συγκεκριμένης αντιμετώπισης.



 Σχήμα
 2.9
 Σχηματική αναπαράσταση της ζώνης προστασίας (γραμμοσκιασμένες υποπεριοχές). Η περιοχή στην οποία θα εφαρμοστεί το μοντέλο nearest neighbor έχει πλέον μικρότερες διαστάσεις m-1×n-1.

Δημιουργία ενός δακτυλίου περιοχών

Η προσέγγιση αυτή αναφέρεται από τον Cressie (1993) και απαιτεί η περιοχή προς μελέτη να περικλείεται από αντίγραφά της (Σχήμα 2.10). Μειονεκτήματα αποτελούν: (α) η υπόθεση ότι ο χώρος αποτελείται από επαναλήψεις της αρχικής περιοχής και (β) η υποχρέωση η υποπεριοχή Π για παράδειγμα να συνορεύει με τη Ν αλλά και την Δ.

Ορισμός των τιμών της παραμέτρου στις υποπεριοχές εκτός ορίων.

Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, που αναφέρεται από τον Cressie (1993), στις υποπεριοχές εκτός ορίων η παράμετρος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή. Συνήθως η τιμή αυτή είναι η μηδενική ή ο μέσος όρος των τιμών της παραμέτρου στις υποπεριοχές εντός των ορίων.



Σχήμα 2.10: Κλείσιμο της περιοχής μέσα σε ένα δακτύλιο από όμοιες περιοχές.

<u>2.4.2 Σχόλια.</u>

Σύμφωνα με τον Cressie (1993) το γενικό μήνυμα είναι πως καμία από τις παραπάνω προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος των οριακών υποπεριοχών δεν είναι απόλυτα ικανοποιητική ενώ ταυτόχρονα υπάρχει χώρος για περαιτέρω έρευνα. Βέβαια αν και οι διάφορες προσεγγίσεις φαίνονται αυθαίρετες, η εφαρμογή κάποιας εξ αυτών είναι απαραίτητη, για την εφαρμογή του μοντέλου nearest neighbor. Για τον λόγο αυτό στις επόμενες παραγράφους το φαινόμενο των οριακών υποπεριοχών δεν αγνοήθηκε. Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε ήταν αυτή της μηδενικής τιμής της παραμέτρου στις υποπεριοχές εκτός ορίων, καθώς φαίνεται πως αυτή (και η γενικότερη της τιμής που είναι ίση με το μέσο όρο των υποπεριοχών εντός της περιοχής), υπερέχει των υπολοίπων (Cressie, 1993).

2.5 Προσαρμογή του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης δύο διαστάσεων σε δεδομένα.

2.5.1 Βασικοί υπολογισμοί.

Η μεταβλητότητα μιας τυχαίας παραμέτρου μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μια τάση (trend) και μια τυχαία διακύμανση (Σχήμα 2.11). Αν με κάποιο μαθηματικό μοντέλο μπορεί να

περιγραφεί η τάση μεταβολής της παραμέτρου, τότε η τυχαία διακύμανση θα αποτελεί το «σφάλμα» του μοντέλου. Η καλή περιγραφή της τάσης απαιτεί την ελαχιστοποίηση των «σφαλμάτων» αυτών.



Σχήμα 2.11 Τα μέρη μιας τυχαίας συνάρτησης.

Για να ελεγχθεί η ικανότητα του μοντέλου nearest neighbor να περιγράφει τη χωρική μεταβλητότητα, απαιτείται έλεγχος της καλής προσαρμογής του σε υπάρχοντα δεδομένα. Για την προσαρμογή του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης δύο διαστάσεων, πρέπει σε κάθε υποπεριοχή (i,j) να ισχύει:

$$Y_{ij} = \alpha_x \left(Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j} \right) + \alpha_y \left(Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1} \right) + \varepsilon_{i,j}$$
(2.5)

και συνεπώς απαιτείται η εκτίμηση των άγνωστων τιμών των αυτοσυσχετιστικών παραμέτρων a_x και a_y έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι επιδράσεις των διαφόρων τυχαίων επιδράσεων, που εκφράζονται μέσα από τις διακυμάνσεις ε_{ij}. Επειδή οι διακυμάνσεις αυτές ακολουθούν την ίδια κατανομή – την κανονική N(0,σ) – με την παράμετρο Y, η ελαχιστοποίηση τους συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης σ. Οι τιμές των αυτοσυσχετιστικών παραμέτρων που θα υπολογιστούν, είναι χαρακτηριστικές της κάθε περιοχής και πρέπει να εκτιμούνται από δεδομένα πεδίου.

Ας υποτεθεί (για λόγους απλοποίησης) ότι μια περιοχή είναι χωρισμένη με έναν κάνναβο p×p (έστω 3×3) και ότι όλες οι τιμές της υδραυλικής παραμέτρου Y_{i,j} ακολουθούν – ή έχουν μετασχηματισθεί ώστε να ακολουθούν – την κανονική κατανομή N(μ,σ) και είναι γνωστές, από μετρήσεις πεδίου:

Y _{1,1}	Y _{1,2}	Y _{1,3}
Y _{2,1}	Y _{2,2}	Y _{2,3}
Y _{3,1}	Y _{3,2}	Y _{3,3}

Για να υπολογίσουμε τις τιμές των αυτοσυσχετιστικών παραμέτρων α_x και α_y, εφαρμόζουμε τη σχέση (2.5) σε κάθε υποπεριοχή. Σε υποπεριοχές πάνω στα όρια της περιοχής, η (2.5) τροποποιείται ανάλογα ώστε να συμπεριλαμβάνει μόνο τις τιμές εντός των ορίων, θεωρώντας ότι οι τιμές εκτός ορίων είναι ίσες με μηδέν (παράγραφος 2.4.2). Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{split} \mathbf{Y}_{1,1} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{1,0} + \mathbf{Y}_{1,2} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{0,1} + \mathbf{Y}_{2,1} \big) + \varepsilon_{1,1} \\ \mathbf{Y}_{1,2} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{1,1} + \mathbf{Y}_{1,3} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{0,2} + \mathbf{Y}_{2,2} \big) + \varepsilon_{1,2} \\ \mathbf{Y}_{1,3} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{1,2} + \mathbf{Y}_{1,4} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{0,3} + \mathbf{Y}_{2,3} \big) + \varepsilon_{1,3} \\ \mathbf{Y}_{1,3} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{2,0} + \mathbf{Y}_{2,2} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{1,1} + \mathbf{Y}_{3,1} \big) + \varepsilon_{2,1} \\ \mathbf{Y}_{2,2} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{2,1} + \mathbf{Y}_{2,3} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{1,2} + \mathbf{Y}_{3,2} \big) + \varepsilon_{2,2} \\ \mathbf{Y}_{2,3} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{2,2} + \mathbf{Y}_{2,4} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{1,3} + \mathbf{Y}_{3,3} \big) + \varepsilon_{2,3} \\ \mathbf{Y}_{3,1} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{3,0} + \mathbf{Y}_{3,2} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{2,1} + \mathbf{Y}_{4,1} \big) + \varepsilon_{3,1} \\ \mathbf{Y}_{3,2} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{3,1} + \mathbf{Y}_{3,3} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{2,2} + \mathbf{Y}_{4,2} \big) + \varepsilon_{3,2} \\ \mathbf{Y}_{3,3} &= \alpha_{\mathbf{x}} \big(\mathbf{Y}_{3,2} + \mathbf{Y}_{3,4} \big) + \alpha_{\mathbf{y}} \big(\mathbf{Y}_{2,3} + \mathbf{Y}_{4,3} \big) + \varepsilon_{3,3} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} & Y_{1,1} = 0Y_{1,1} + \alpha_x Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + \alpha_y Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{1,1} \\ & Y_{1,2} = \alpha_x Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + \alpha_x Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_y Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{1,2} \\ & Y_{1,3} = 0Y_{1,1} + \alpha_x Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_y Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{1,3} \\ & Y_{2,1} = \alpha_y Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_x Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + \alpha_y Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{2,1} \\ & Y_{2,2} = 0Y_{1,1} + \alpha_y Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + \alpha_x Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_x Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_y Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{2,2} \\ & Y_{2,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + \alpha_y Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_x Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + \alpha_y Y_{3,3} + \varepsilon_{2,3} \\ & Y_{3,1} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + \alpha_y Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,1} \\ & Y_{3,2} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_y Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,2} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_y Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + \alpha_x Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + \alpha_x Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_y Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + \alpha_x Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + \alpha_x Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + \alpha_y Y_{2,2} + 0Y_{2,3} + \alpha_x Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + \alpha_x Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_y Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_y Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_y Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{1,1} + 0Y_{1,2} + 0Y_{1,3} + 0Y_{2,1} + 0Y_{2,2} + \alpha_y Y_{2,3} + 0Y_{3,1} + \alpha_x Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + 0Y_{3,1} + 0Y_{3,2} + 0Y_{3,3} + \varepsilon_{3,3} \\ & Y_{3,3} = 0Y_{3,1} + 0Y$$

Το σύστημα των πιο πάνω εξισώσεων γράφεται με μητρώα μορφή:

$\left(Y_{1,1} \right)$		0	$\alpha_{\rm x}$	0	α_{y}	0	0	0	0	0]	$\int Y_{1,1}$]	$\left(\mathcal{E}_{1,1} \right)$		
Y _{1,2}		$\alpha_{\rm x}$	0	α_{x}	0	$\alpha_{_{\mathrm{y}}}$	0	0	0	0	Y _{1,2}		$\mathcal{E}_{1,2}$		
Y _{1,3}		0	α_{x}	0	0	0	α_{y}	0	0	0	Y _{1,3}		$ \varepsilon_{1,3} $		
Y _{2,1}		α_{y}	0	0	0	$\alpha_{\rm x}$	0	α_{y}	0	0	Y _{2,1}		$\mathcal{E}_{2,1}$		
$Y_{2,2}$	} =	0	α_{y}	0	$\alpha_{\rm x}$	0	α_{x}	0	α_{y}	0	$Y_{2,2}$	+ +	$\left\{ \varepsilon_{2,2} \right\}$	>	(2.8)
Y _{2,3}	-	0	0	α_{y}	0	α_{x}	0	0	0	α_{y}	Y _{2,3}		$\varepsilon_{2,3}$		
Y _{3,1}		0	0	0	α_{y}	0	0	0	$\alpha_{\rm x}$	0	Y _{3,1}		$\mathcal{E}_{3,1}$		
Y _{3,2}		0	0	0	0	α_{y}	0	$\alpha_{\rm x}$	0	$\alpha_{\rm x}$	Y _{3,2}		$ \mathcal{E}_{3,2} $		
Y _{3,3}	j	0	0	0	0	0	α_{y}	0	α_{x}	0	Y _{3,3}	J	$\left[\mathcal{E}_{3,3} \right]$		
						4									

ή πιο συνοπτικά:

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{Y}\} + \{\varepsilon\}$$
(2.9)

Στην εξίσωση (2.9) γνωστοί είναι οι πίνακες $\{Y\}$ – από τα δεδομένα πεδίου – και $\{\varepsilon\}$ – που δημιουργείται από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών – ενώ άγνωστος είναι ο πίνακας [A] για τον οποίο ισχύει:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I}_{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\alpha} & \mathbf{C} & \mathbf{I}_{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\alpha} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\epsilon} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Από την εξίσωση (2.8) παρατηρείται ότι ο πίνακας Α που προήλθε από ένα κάνναβο (3×3), είναι διαστάσεων (9×9). Εκτελώντας την ίδια διαδικασία για καννάβους μεγαλύτερων διαστάσεων, αποδεικνύεται εύκολα ότι όταν οι διαστάσεις του καννάβου είναι (p×q) τότε ο πίνακας Α θα έχει διαστάσεις (pq×pq) και θα αποτελείται από p γραμμές υποπινάκων C, I και 0 οι οποίοι θα έχουν διαστάσεις (q×q). Έτσι λοιπόν στην περίπτωσή που μελετήθηκε, οι υποπίνακες αυτοί είναι διαστάσεων (3×3).

Σύμφωνα με τον Martin (1974) στον πίνακα Α εισάγεται ο σταθμιστικός παράγοντας 1/4 μιας και στο nearest neighbor μοντέλο πρώτης τάξης σε δυο διαστάσεις, κάθε τιμή επηρεάζεται από τέσσερις γειτονικές της. Έτσι λοιπόν η εξίσωση (2.8) θα γράφεται:

ή αλλιώς:

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{W}]\{\mathbf{Y}\} + \{\varepsilon\}$$
(2.11)

όπου όμως τώρα θα ισχύει:
$$W = \begin{bmatrix} C & I & 0 \\ I & C & I \\ 0 & I & C \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_x}{4} & 0 \\ \frac{\alpha_x}{4} & 0 & \frac{\alpha_x}{4} \\ 0 & \frac{\alpha_x}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad I_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_y}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_y}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_y}{4} \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.11) ως προς $\{Y\}$ καταλήγουμε:

$$\{Y\} = ([I] - [W])^{-1} \{\varepsilon\}$$
 (2.12)

όπου όμως οι άγνωστες τιμές $a_x \& a_y$ υπάρχουν μέσα στον πίνακα W και καθιστούν αδύνατη την αντιστροφή του πίνακα ([I]-[W]) και συνεπώς την λύση της (2.12).

2.5.2 Η μέθοδος του Ord.

Τη λύση στο αδιέξοδο της εξίσωσης (2.12) δίνει ο Ord (1975), θεωρώντας ότι η υπό μελέτη περιοχή είναι ισότροπη και συνεπώς: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$. Άρα τώρα θα έχουμε:

δηλαδή:

$$\{Y\} = \alpha [W] \{Y\} + \{\varepsilon\}$$

όπου:

$$W = \begin{bmatrix} C & I_{\alpha} & 0 \\ I_{\alpha} & C & I_{\alpha} \\ 0 & I_{\alpha} & C \end{bmatrix} \qquad \mu \varepsilon \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad I_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έτσι τώρα από τη (2.14) θα προκύψει:

$$\{\mathbf{Y}\} = \left([\mathbf{I}] - \boldsymbol{\alpha} [\mathbf{W}] \right)^{-1} \{ \boldsymbol{\varepsilon} \}$$
(2.15)

Από την άλγεβρα πινάκων είναι γνωστό ότι αν Α είναι ένας οποιοσδήποτε πίνακας n×n και Ι ο επίσης n×n μοναδιαίος πίνακας, τότε η συνάρτηση $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ είναι ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού ως προς λ που ονομάζεται *«χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α»*. Η εξίσωση $f(\lambda) = 0$ έχει ρίζες λ_i με $2 \le i \le n$, οι οποίες ονομάζονται «ιδιοτιμές» του πίνακα Α.

Σύμφωνα με τον Ord (1975) αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του n×n πίνακα W*, τότε η τιμή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α (για την οποία ελαχιστοποιούνται οι επιδράσεις των διαφόρων τυχαίων επιδράσεων ε_{ij}) είναι αυτή η οποία ελαχιστοποιεί την παράσταση:

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha \lambda_{i}\right)\right]^{-\frac{2}{n}} \left(Y^{T} Y - 2\alpha Y^{T} Y_{L} + \alpha^{2} Y_{L}^{T} Y_{L}\right)$$
(2.16)

όπου: Υ

είναι ο πίνακας της τυχαίας μεταβλητής

Y^T υποδηλώνει τον ανάστροφο (transposed) πίνακα του Y και

Y_L είναι ο πίνακας που είναι το γινόμενο του σταθμιστικού πίνακα W με τον
 πίνακα της τυχαίας μεταβλητής Y: Y_L = W Y

Για την ελαχιστοποίηση της παράστασης χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method), η οποία περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

^{*} Σύμφωνα με τα παραπάνω εφόσον ο πίνακας W είναι διαστάσεων 9×9 θα έχει 9 ιδιοτιμές. Όμως όπως θα δούμε παρακάτω στην παράγραφο 2.3.4, λόγω της μορφής του δεν έχει 9 ιδιοτιμές αλλά μόνο 5.

2.5.3 Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method)

2.5.3.1 Γενικά

Έστω ότι από έναν πληθυσμό επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα x₁,x₂ ... x_n μεγέθους N το οποίο ζητείται να περιγραφεί με μια συνάρτηση f(x,Θ). Με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας αναζητείται εκείνη η τιμή του Θ για την οποία η συνάρτηση f(x,Θ) έχει τη μέγιστη πιθανότητα να περιγράφει το δείγμα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τη συνάρτηση πιθανότητας του δείγματος L(x₁,x₂ ... x_n,Θ) που ορίζεται από τη σχέση:

$$L(x_1, x_2 \dots x_n, \Theta) = f(x_1, \Theta) \cdot f(x_2, \Theta) \dots f(x_n, \Theta)$$
(2.17)

και ζητά να βρει το μέγιστό της . Για να έχει όμως η συνάρτηση πιθανότητας (2.17) μέγιστο πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2 \dots x_n, \Theta)}{\partial \Theta} = 0$$
(2.18)

Επειδή η συνάρτηση $ln[L(x_1, x_2 ... x_n, \Theta)]$ έχει στο ίδιο Θ το ίδιο μέγιστο με την $L(x_1, x_2 ... x_n, \Theta)$, μπορεί ισοδύναμα να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$\frac{\partial \ln [L(x_1, x_2 \dots x_n, \Theta)]}{\partial \Theta} = 0$$
(2.19)

Η τιμή του Θ που θα υπολογιστεί από την (2.19) θα είναι ίδια με αυτή που θα προκύψει από την (2.18).

2.5.3.2. Εφαρμογή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας για την εύρεση της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου.

Στην παράγραφο 2.4.2 είδαμε ότι συνάρτηση της οποίας ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο είναι η:

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha \lambda_{i}\right)\right]^{-\frac{2}{n}} \left(Y^{T}Y - 2\alpha Y^{T}Y_{L} + \alpha^{2}Y_{L}^{T}Y_{L}\right)$$
(2.16)

στο ίδιο σημείο όμως θα έχει ελάχιστο και η:

$$f(\alpha) = \ell n \left\{ \left[\prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha \lambda_{i}) \right]^{-\frac{2}{n}} (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y} - 2\alpha \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_{\mathrm{L}} + \alpha^{2} \mathbf{Y}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_{\mathrm{L}}) \right\} = \left[-\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell n (1 - \alpha \lambda_{i}) \right] + \ell n (s^{2})$$

$$(2.20)$$

με:

$$s^{2} \equiv s^{2}(\alpha) = \left(Y^{T}Y - 2\alpha Y^{T}Y_{L} + \alpha^{2}Y_{L}^{T}Y_{L}\right)$$
(2.21)

Επειδή στο ελάχιστο θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(\alpha) = 0 \tag{2.22}$$

θα πρέπει:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(\alpha) = f_{\alpha}(\alpha) = \left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i}}{(1-\alpha\lambda_{i})}\right] + 2\frac{\alpha \mathbf{Y}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_{\mathrm{L}} - \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_{\mathrm{L}}}{\mathrm{s}^{2}} = 0$$
(2.23)

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής θα χρησιμοποιηθεί η επαναληπτική μέθοδος Newton – Raphson (Ord, 1975). Στη μέθοδο αυτή ως γνωστόν για τη ρίζα μιας εξίσωσης g(x)=0 ισχύει:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{g(x)}{g'(x)}$$
(2.24)

στην εξίσωση (2.24) όμως το ρόλο της g(x) παίζει η $f_{\alpha}(\alpha)$ ενώ η πρώτη παράγωγος g'(x) είναι η:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f_{\alpha}(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(\alpha)\right] = \frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\alpha^{2}}f(\alpha) = f_{\alpha\alpha}(\alpha) = \left\{\frac{2}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\left[\frac{\lambda_{i}}{(1-\alpha\lambda_{i})}\right]^{2}\right\} + 2\frac{Y_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{L}}}{\mathrm{s}^{2}} - 4\frac{\alpha Y_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{L}} - Y^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{L}}}{\mathrm{s}^{4}}$$

$$(2.25)$$

όπου:

$$s^{4} \equiv s^{4}(\alpha) = (Y^{T}Y - 2\alpha Y^{T}Y_{L} + \alpha^{2}Y_{L}^{T}Y_{L})^{2}$$
(2.26)

Τελικά λοιπόν η τιμή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\alpha_{r+1} = \alpha_r - \frac{f_{\alpha}(\alpha)}{f_{\alpha\alpha}(\alpha)}$$
(2.27)

Σύμφωνα με τον Ord (1975) σαν αρχική προσέγγιση μπορεί να παρθεί η τιμή: $\alpha_0 = \frac{Y^T Y_L}{Y^T Y}, ενώ η τιμή α_0 = \frac{Y^T Y_L}{Y_L^T Y}$ δεν προτείνεται προς χρήση καθώς μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{\lambda_{max}}$ με αποτέλεσμα η επαναληπτική διαδικασία να συγκλίνει σε μη λογικές τιμές του α.

Με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να υπολογιστεί για μια περιοχή η αυτοσυσχετιστική παράμετρος α και με τον τρόπο αυτό να προσαρμοστεί το μοντέλο nearest neighbor πρώτης τάξης δυο διαστάσεων σε κάποιες υπάρχουσες μετρήσεις. Είναι φανερό ότι η ακρίβεια με την οποία θα εκτιμηθεί η αυτοσυσχετιστική παράμετρος είναι ανάλογη του πλήθους των μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή. Στο σημείο αυτό υπάρχει χώρος για περαιτέρω έρευνα, ώστε να βρεθεί ο καταλληλότερος αριθμός μετρήσεων που απαιτούνται ώστε να περιγράφεται ικανοποιητικά η χωρική μεταβλητότητα της παραμέτρου Υ, στη δεδομένη περιοχή.

2.5.4 Η μορφή του σταθμιστικού πίνακα W και οι ιδιοτιμές του

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.4.2, η μορφή του σταθμιστικού πίνακα (weighting matrix) W για έναν κάνναβο 3×3 είναι:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{4} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{4} & \mathbf{0} & \frac{1}{4} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{4} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Για τετραγωνικούς καννάβους διαστάσεων (pxp) η γενική μορφή του πίνακα W είναι:

όπου:

	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0		$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	0								
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0		0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0		[0	0	0	0	0	0	0
	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0		0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0		0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
C=	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$I_{\alpha} =$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	= 0	0	0	0	0	0	0
																		····	····	····	····	····	····
																	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0		0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$								

Βλέπουμε δηλαδή πως οι πίνακες C,I και Ο είναι διαστάσεων (p×p) ενώ ο πίνακας W είναι διαστάσεων (p²×p²)

Στην περίπτωση όμως που έχουμε μια ορθογωνική και όχι τετραγωνική περιοχή, τότε και ο κάνναβος με τον οποίο χωρίζουμε την περιοχή μας θα είναι ορθογωνικός με διαστάσεις (p×q). Για ορθογωνικούς καννάβους διαστάσεων (p×q) η γενική μορφή του πίνακα W είναι:

	C	Ι	0	0	0	0	0
	Ι	С	Ι	Ι	0	0	0
	0	Ι	С	Ι	Ι	0	0
W=	0	0	I	С	I	I	0
	0	0	0	0	0	Ι	С

ο W δηλαδή αποτελείται από p γραμμές υποπινάκων C, I και 0 οι οποίοι έχουν διαστάσεις (q×q):

	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0		$\begin{bmatrix} 1\\ -4 \end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	0								
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0		0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0		[0	0	0	0	0	0	0
	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0		0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0		0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
C=	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$I_{\alpha} =$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0=	= 0	0	0	0	0	0	0
																			····	····	····	····	····
																	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0		0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$								

και συνεπώς οι διαστάσεις του W είναι (n×n) με n=pq

Για την μορφή αυτή των πινάκων W (ορθογωνικών ή τετραγωνικών) οι ιδιοτιμές (eigenvalues) υπολογίζονται (Ord, 1975) από τον τύπο:

$$\lambda_{\rm rs} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{r\pi}{p+1}\right) + \cos\left(\frac{s\pi}{q+1}\right) \right]$$
(2.28)

με r=1,2, ... р каι s=1,2, ... q

Στην περίπτωση των τετραγωνικών πινάκων όπου p=q ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$\lambda_{\rm rs} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{r\pi}{p+1}\right) + \cos\left(\frac{s\pi}{p+1}\right) \right]$$
(2.29)

με r=1,2, ... р каι s=1,2, ... р

2.6 Βήματα για την προσαρμογή του μοντέλου nearest neighbor πρώτης τάξης δύο διαστάσεων σε δεδομένα.

<u>ΒΗΜΑ 1:</u> Η περιοχή χωρίζεται σε επιθυμητό αριθμό υποπεριοχών και συλλέγονται τα δεδομένα από κάθε μια από αυτές.

- <u>ΒΗΜΑ 2:</u> Το δείγμα των δεδομένων προσαρμόζεται στην κατάλληλη στατιστική κατανομή. Το μέγεθος του δείγματος για ασφαλή εκτίμηση της στατιστικής κατανομής πρέπει να είναι το κατάλληλο.
- <u>ΒΗΜΑ 3:</u> Αν η υδραυλική παράμετρος βρεθεί ότι ΔΕΝ ακολουθεί κανονική κατανομή τότε τα δεδομένα μετασχηματίζονται ώστε να ακολουθούν την κανονική κατανομή Ν(μ,σ).
- <u>ΒΗΜΑ 4:</u> Από τα μετασχηματισμένα δεδομένα αφαιρείται η μέση τιμή μ, ώστε πλέον να ακολουθούν την κανονική κατανομή N(0,σ)
- <u>ΒΗΜΑ 5:</u> Δημιουργείται ο σταθμιστικός πίνακας W διαστάσεων (p²×p²) όταν ο κάνναβος που χρησιμοποιείται είναι διαστάσεων (p×p), σύμφωνα με την παράγραφο 2.4.4.
- <u>ΒΗΜΑ 6:</u> Υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα W.
- <u>ΒΗΜΑ 7:</u> Γίνονται οι πολλαπλασιασμοί πινάκων: WY, Y^TY, Y^TY, Y^T_L, Y^T_LY_L.
- <u>ΒΗΜΑ 8:</u> Υπολογίζονται οι παραστάσεις $f_{\alpha}(\alpha)$ & $f_{\alpha\alpha}(\alpha)$

<u>ΒΗΜΑ 9:</u> Ξεκινά η επαναληπτική διαδικασία: $\alpha_{r+1} = \alpha_r - \frac{f_{\alpha}(\alpha)}{f_{\alpha\alpha}(\alpha)}$ με πρώτη προσέγγιση την

$$\alpha_0 = \frac{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_{\mathrm{L}}}{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}} \,.$$

Στα πλαίσια της διατριβής αυτής αναπτύχθηκε το κατάλληλο λογισμικό σε γλώσσα FORTRAN το οποίο ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, παρέχει την τιμή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α. Με το λογισμικό αυτό (Παράρτημα – αρχείο detalpha.for) απλοποιείται η διαδικασία της στοχαστικής έρευνας του υδατικού ισοζυγίου του εδάφους.

2.7 Δημιουργία δεδομένων με χρήση του πρώτης τάξης nearest neighbor μοντέλου.

Γνωρίζοντας την τιμή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου σε μια περιοχή είναι γνωστός κατά προσέγγιση ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η παράμετρος Υ μέσα στο χώρο. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του μοντέλου nearest neighbor για $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$:

$$\{\mathbf{Y}\} = \left([\mathbf{I}] - \boldsymbol{\alpha} [\mathbf{W}] \right)^{-1} \{ \boldsymbol{\varepsilon} \}$$
(2.15)

και εισάγοντας διαφορετικά σετ τυχαίων αριθμών ε_{i,j} σε αυτή, λαμβάνονται πιθανές καταστάσεις – «εικόνες» – της μεταβολής της παραμέτρου Υ. Αν λοιπόν το Σχήμα 2.12(α)

αναπαριστά μια υποθετική περιοχή χωρισμένη σε 24 υποπεριοχές με ένα κάνναβο 4×6, για την οποία είναι γνωστή η αυτοσυσχετιστική παράμετρος, τότε το Σχήμα 2.12(β) αναπαριστά μια από τις πιθανές εικόνες της περιοχής που δημιουργήθηκε από το μοντέλο nearest neighbor.



Σχήμα 2.12 (α) Υποθετική μεταβλητότητα παραμέτρου σε μια περιοχή (β) Πιθανή αναπαράσταση της προηγούμενης περιοχής μετά την εφαρμογή του μοντέλου nearest neighbor. Το χρώμα κάθε υποπεριοχής αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή της παραμέτρου που μελετάται.

Οι διαφορετικές «εικόνες» που παράγονται θα χρησιμοποιηθούν αργότερα (Κεφάλαιο 4) για την προσομοίωση του υδατικού ισοζυγίου με τη μέθοδο Monte Carlo.

Τα δεδομένα που θα προκύψουν από την εφαρμογή του μοντέλου θα έχουν τα ίδια στατιστικά χαρακτηριστικά με τις μετρήσεις που βάσει των οποίων έγινε ο προσδιορισμός της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α.

Στα πλαίσια της διατριβής αυτής αν και όπως είδαμε, αναπτύχθηκε το κατάλληλο λογισμικό για τη εύρεση της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α λόγω έλλειψης δεδομένων πεδίου, χρησιμοποιήθηκε για αυτήν η τιμή 0.35 (Smith, 1978, Chung, 1985).

Κεφάλαιο 3. Τυχαίοι αριθμοί

3.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι το πρώτης τάξης nearest neighbor μοντέλο σε δυο διαστάσεις εκφράζεται από τη σχέση (2.3):

$$Y_{ij} = \alpha_x (Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j}) + \alpha_y (Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1}) + \varepsilon_{ij}$$
(2.5)

στην οποία υπεισέρχεται και η τυχαιότητα που χαρακτηρίζει τις φυσικές διαδικασίες, μέσω του παράγοντα ε_{ij} . Ο παράγοντας αυτός είναι ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την ίδια στατιστική κατανομή με την παράμετρο Υ.

Σαν *τυχαίος αριθμός* ορίζεται ένας αριθμός που εξάγεται από ένα σύνολο αριθμών, με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε αριθμός μέσα από τον πληθυσμό να έχει ίση πιθανότητα να εξαχθεί (Haan, 1977).

Στο παρελθόν για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών, οι επιστήμονες χρησιμοποιούσαν τεχνικές όπως ρίψεις ζαριών, νομισμάτων, μετρητές ακτινών–γ, τροχούς ρουλέτας κ.α., γιατί υπήρχε η πίστη ότι μόνο μηχανικές συσκευές μπορούσαν να παράγουν «πραγματικά» τυχαίους αριθμούς. Οι μέθοδοι αυτές ήταν πολύ αργές για γενικότερη χρήση, τα αποτελέσματά τους δεν ήταν δυνατό να αναπαραχθούν (Rubinstein, 1981) ενώ και τα αποτελέσματά τους ήταν μη ικανοποιητικά καθώς υπάρχει σημαντική συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών αριθμών (L' Ecuyer, 1998).

Η ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών έφερε επανάσταση και στον τομέα των τυχαίων αριθμών. Ο von Neumann (1951) πρότεινε μια απλή μέθοδο, που στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως μέθοδος mid–square, χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές πράξεις ενός υπολογιστή. Σύμφωνα με αυτή: 1) ξεκινάμε από έναν τετραψήφιο αριθμό π.χ. τον 5232, 2) τον υψώνουμε στο τετράγωνο παίρνοντας τον 27.373.824, 3) από τα τέσσερα μεσαία ψηφία του παίρνουμε τον επόμενο τυχαίο αριθμό: 3.738 και 4) η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον 3.738. Η μέθοδος αυτή σύντομα αποδείχτηκε μη ικανοποιητική: αν π.χ. ανάμεσα στα ψηφία εμφανιστεί το 0, τότε αυτό θα συνεχίζει να εμφανίζεται και στους επόμενους τυχαίους

αριθμούς της σειράς (Knuth, 1981), ενώ οι παραγόμενοι αριθμοί τείνουν να επαναλαμβάνονται μετά από ένα μικρό αριθμό επαναλήψεων (Hippel and McLeod, 1994).

Το 1955 η RAND Corporation δημοσίευσε ένα πασίγνωστο για την εποχή πίνακα 1.000.000 τυχαίων αριθμών, που αποθηκευόταν στη μνήμη του υπολογιστή. Το πλεονέκτημά του ήταν η εύκολη επαναχρησιμοποίηση, ενώ μειονεκτήματά του ήταν η μικρή ταχύτητα αναζήτησης και η πιθανότητα να εξαντληθούν οι τιμές του πίνακα (Rubinstein, 1981).

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη δημιουργία τυχαίων αριθμών με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, καθώς οι τυχαίοι αριθμοί αποτελούν την καρδιά της μεθόδου Monte Carlo.

3.2 Επιθυμητά χαρακτηριστικά τυχαίων αριθμών.

Αν γίνει δεκτό ότι τα φυσικά φαινόμενα αποτελούν κακές πηγές τυχαίων αριθμών και στραφούμε στη λύση της δημιουργίας τυχαίων αριθμών με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, το ερώτημα που εύλογα ανακύπτει είναι κατά πόσο ένα μηχάνημα που ακολουθεί ένα καθαρά ντετερμινιστικό αλγόριθμο για να κάνει μια εργασία, μπορεί να παράγει πραγματικά τυχαίους αριθμούς. Στην πραγματικότητα οι αριθμοί που παράγονται δεν είναι τυχαίοι, αλλά μοιάζουν με τυχαίους. Η ακριβέστερη ονομασία τους είναι **ψευδοτυχαίοι** (**pseudorandom ἡ quasi–random**), αλλά τους καλούμε «τυχαίους» θυσιάζοντας το ιδανικό χάριν ευκολίας. Άλλωστε στη μέθοδο Monte Carlo αυτό που μας ενδιαφέρει είναι τα αποτελέσματα να είναι λογικοφανή.

Οι σειρές των ψευδοτυχαίων παράγονται μέσω τόσο καλοσχεδιασμένων αλγορίθμων, που κανένα στατιστικό τεστ δεν θα ανιχνεύσει κάποια απόκλιση τους από το τυχαίο. Επειδή ο αλγόριθμος μπορεί να παράγει άπειρους τυχαίους αριθμούς, κάποια στιγμή θα επαναλάβει έναν που είχε ήδη δημιουργήσει. Άρα θα επαναλαμβάνει μια σειρά αριθμών μετά από m το πολύ βήματα και συνεπώς ο αλγόριθμος θα χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη **περίοδο** (βλ. παράγραφο 3.4). Η περίοδος του αλγόριθμου αποτελεί ποιοτικό κριτήριο αξιολόγησής του και για το λόγο αυτό πρέπει να εξασφαλιστεί ότι είναι μεγαλύτερη από το πλήθος των τυχαίων αριθμών που απαιτούνται σε κάποια εργασία. Η τυχαιότητα ενός συνόλου αριθμών, εξαρτάται επιπλέον και από το χρήστη των αριθμών. Έτσι αυτό που για μια εφαρμογή επιλέγεται σαν τυχαίο, για μια άλλη εφαρμογή δεν είναι αρκετά τυχαίο. Στη βιβλιογραφία όμως υπάρχουν αρκετά στατιστικά τεστ όπως τα DIEHARD (Marsaglia, 1996) που μπορούν να φανούν χρήσιμα και το σημαντικότερο είναι να γνωρίζουμε πόσα και ποια τεστ δεν ικανοποιεί ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε. Πέρα από το μέγεθος της περιόδου, άλλα βασικά κριτήρια για να θεωρήσουμε τους τυχαίους αριθμούς που παράγονται με τον ένα ή άλλο αλγόριθμο σαν «καλούς», είναι το να ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) U(0,1) – παράγραφος 3.3 – να είναι στατιστικά ανεξάρτητοι και να αναπαράγονται εύκολα. Επίσης ένας αλγόριθμος είναι «καλός» εάν είναι γρήγορος και απαιτεί μικρή κατανάλωση μνήμης και μπορεί να προγραμματιστεί εύκολα σε διάφορες γλώσσες. Πρέπει να τονισθεί όμως πως σπάνια ικανοποιούνται όλες οι παραπάνω ιδιότητες από κάποιο αλγόριθμο.

3.3 Ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί (uniformly distributed random numbers).

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε, ότι ένα από τα ποιοτικά κριτήρια των τυχαίων αριθμών είναι και το να ανήκουν στην ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution). Λεπτομέρειες για την κατανομή αυτή δίνονται παρακάτω.

Έστω λοιπόν μια τυχαία διαδικασία που ορίζεται σε ένα διάστημα από a ως b. Av η πιθανότητα το αποτέλεσμα της διαδικασίας να πέφτει εντός ενός υποδιαστήματος του [a,b] είναι ανάλογη του εύρους του υποδιαστήματος, τότε η διαδικασία λέγεται ότι ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(a,b). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής U(a,b) είναι:

$$p(x) = \frac{1}{(b-a)}$$
για κάθε: $a \le x \le b$
(3.1)

 $p(x) = 0$



Σχήμα 3.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής U(0,1).

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.1) και το Σχήμα 3.1, μέσα σε μια ομοιόμορφη κατανομή κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα p(x) με κάποιον άλλο να επιλεγεί. Για λόγους απλοποίησης, για ένα τέτοιο αριθμό αντί του όρου *ομοιόμορφος U(0,1) τυχαίος αριθμός* χρησιμοποιείται ο όρος *τυχαίος αριθμός*.

Οι τυχαίοι αριθμοί που υπεισέρχονται σε ένα μοντέλο (όπως για παράδειγμα το μοντέλο nearest neighbor) είδαμε ότι πρέπει να ακολουθούν την κατανομή εκείνη που ακολουθεί και η παράμετρος της οποίας την τυχαιότητα θέλουμε να περιγράψουμε. Επειδή με κατάλληλες πράξεις πάνω σε ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς, μπορούν να παραχθούν τυχαίοι αριθμοί που να ακολουθούν άλλες στατιστικές κατανομές, είναι φανερό πως όλη η τυχαιότητα που απαιτεί ένα μοντέλο ουσιαστικά περιγράφεται από ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς. Συνεπώς μια αξιόπιστη πηγή ομοιόμορφων τυχαίων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για στοχαστική προσέγγιση οποιουδήποτε φυσικού φαινομένου.

3.4 Αλγόριθμοι παραγωγής ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών.

Πολλές γλώσσες προγραμματισμού έχουν ενσωματωμένες στις βιβλιοθήκες τους, υπορουτίνες που παράγουν ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς. Τέτοιες υπορουτίνες είναι πολύ συχνά (σύμφωνα με τη διεθνή ορολογία) **linear congruential generators – LCG's** – (Press et al., 1997) και πρέπει να αντιμετωπίζονται με προσοχή καθώς δεν είναι πάντα ικανοποιητικές. Οι LCG's βασίζονται στην επαναληπτική διαδικασία (Lehmer, 1951):

$$x_{j+1} = \operatorname{mod}\left(\frac{a \, x_j}{m}\right) \qquad \text{onou} \ 1 \le x_j \le m-1 \tag{3.2}$$

και η οποία μπορεί να γενικευτεί στην:

$$x_{j+1} = \operatorname{mod}\left(\frac{a\,x_j + c}{m}\right) \tag{3.3}$$

με x_1 την τιμή εκκίνησης (seed value), a, c και m τρεις μεγάλους θετικούς ακέραιους (τέτοιοι ώστε: $m > x_1$, m > a και m > c), που καλούνται πολλαπλασιαστής (multiplier), αύξηση (increment) και διαιρέτης (modulus), αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (3.2) και (3.3) γίνεται φανερό ότι ο τυχαίος αριθμός x_{j+1} εξαρτάται μόνο από τον αμέσως προηγούμενο x_j . Αυτό είναι ένα ακόμη πλεονέκτημα των LCG's καθώς καταλαμβάνεται λιγότερη μνήμη από ότι στην περίπτωση που ο υπολογιστής έπρεπε να «θυμάται» περισσότερους αριθμούς. Αν c=0 τότε ο αλγόριθμος καλείται **multiplicative linear congruential generator (MLCG)** Η σχέση (3.3) μπορεί συνοπτικά να συμβολιστεί (Anderson,1990) ως LCG[m, a, c, x₁] ή LCG[m, a, c] αν ο αλγόριθμος δεν απαιτεί μια συγκεκριμένη τιμή εκκίνησης. Οι αριθμοί που προκύπτουν από τις (3.2) ή (3.3) κανονικοποιούνται σύμφωνα με τη σχέση:

$$U_j = \frac{x_j}{m} \tag{3.4}$$

Για να δειχθεί ότι οι linear congruential generators δεν είναι πάντα ικανοποιητικοί επιλέγεται χάριν παραδείγματος ο LCG(10, 7, 7, 7). Κατά την εφαρμογή του θα παραχθούν οι επόμενοι «τυχαίοι» αριθμοί: 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0 κτλ. δηλαδή οι ομοιόμορφα κατανεμημένοι αριθμοί: $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{0}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{0}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{0}{10}$. Το παράδειγμα αυτό δείχνει πως οι αλγόριθμοι που βασίζονται στη σχέση (3.3) επαναλαμβάνουν συνεχώς ένα πλήθος αριθμών το οποίο καλείται περίοδος. Η περίοδος του προηγούμενου παραδείγματος (για τις δεδομένες επιλογές παραμέτρων) είναι 5 και αυτό σημαίνει πως η περίοδος ενός αλγόριθμου παραγωγής τυχαίων αριθμών δεν μπορεί να ξεπεράσει ποτέ την τιμή m. Έτσι αν στη σχέση (3.3) επιλέγαμε m = 5 θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε το πολύ 4 διαφορετικούς τυχαίους αριθμούς. Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι παραγόμενοι αριθμοί παίρνουν διακριτές τιμές από τις οποίες λείπουν τιμές όπως οι π.χ. $\frac{3}{10}$ και $\frac{8}{10}$. Συνεπώς οι παραγόμενοι τυχαίοι αριθμοί δεν είναι ούτε συνεχώς κατανεμημένοι αλλά ούτε και ομοιόμορφα κατανεμημένοι. Επιλέγοντας λοιπόν το m όσο το δυνατό μεγαλύτερο:

- λαμβάνουμε όσο το δυνατό περισσότερους τυχαίους αριθμούς (είδαμε στην παράγραφο
 3.2 ότι το μεγάλο μέγεθος της περιόδου, χαρακτηρίζει τους «καλούς» αλγόριθμους) ενώ
- 2. οι παραγόμενοι τυχαίοι αριθμοί προσεγγίζουν πάρα πολύ καλά την ομοιόμορφη κατανομή.

Η επιλογή των παραμέτρων a, c, x_1 και m πρέπει να είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει 1) την παραγωγή τυχαίων αριθμών με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά 2) την επίτευξη της μέγιστης περιόδου του αλγόριθμου και 3) την ακριβή εκτέλεση των πράξεων από τον H/Y σε οποιαδήποτε από τις σχέσεις (3.2) (3.3) και (3.4) (Hippel and McLeod, 1994). Κανόνες για την εύρεση της περιόδου για κάθε επιλογή των a, c και m παρουσιάζονται από τον Marsaglia (1972), ενώ βιβλιογραφικές αναφορές πάνω στην επιλογή των καταλλήλων παραμέτρων της εξίσωσης (3.3) δίνονται μεταξύ άλλων από τους Janson (1966), Dieter (1972) και Knuth (1981).

Αν και οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ντετερμινιστικοί, μπορεί να δειχθεί (Knuth, 1981) ότι οι παραγόμενοι αριθμοί είναι κατανεμημένοι ομοιόμορφα και στατιστικά ανεξάρτητοι. Επίσης έχουν το πλεονέκτημα να είναι πολύ γρήγοροι (αφού απαιτούν λίγες πράξεις ανά επανάληψη) και για τον λόγο αυτό είναι ευρύτατα διαδεδομένοι.

Γνωστοί LCG's με μεγάλη περίοδο που προτάθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν κατά καιρούς (όχι όμως και όλοι ικανοποιητικοί) είναι οι:

Ονομασία	Περιγραφἡ LCG[m,a,c,x ₁]
ANSI – C	LCG[2 ³¹ , 1103515245, 12345, 12345]
Minimal Standard	LCG[2 ³¹ - 1, 16807, 0]
RANDU	LCG[2 ³¹ , 65539, 0]
SIMSCRIPT	LCG[2 ³¹ – 1, 630360016, 0]
NAG	LCG[2 ⁵⁹ , 13 ¹³ , 0, 123456789·(2 ³¹ + 1)]
Maple	LCG[10 ¹² – 11, 427419669081, 0, 1]

Αν σε κάποιες εξειδικευμένες εργασίες απαιτείται ακόμη μεγαλύτερη περίοδος, ο L'Ecuyer (1988) έδειξε ότι μπορούν να συνδυαστούν δυο αλγόριθμοι με διαφορετικές περιόδους. Το αποτέλεσμα του συνδυασμού θα είναι ένας αλγόριθμος με περίοδο τουλάχιστον το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των επιμέρους περιόδων. Αν και οι Press et al. (1997) πιστεύουν ότι για τους υπολογιστές του σήμερα, η εξάντληση της περιόδου είναι κάτι αδύνατο, ο L' Ecuyer (1998) αντιπαραθέτει ότι για τις προσομοιώσεις στη σημερινή εποχή ακόμη και η περίοδος της τάξης του 2³¹-1 είναι απαράδεκτα πολύ μικρή, μιας και έχουν εμφανιστεί αλγόριθμοι με περιόδους μεγαλύτερες από 2²⁰⁰. Εμπειρικά τεστ δείχνουν ότι ο συνδυασμός αλγορίθμων βελτιώνει επίσης και τη στατιστική συμπεριφορά των παραγόμενων τυχαίων αριθμών.

Περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στους προαναφερθέντες αλλά και άλλους αλγόριθμους πέρα από τους LCG's, μπορεί κανείς να βρει στις διευθύνσεις INTERNET: <u>http://random.mat.sbg.ac.at/</u> και <u>http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer</u>.

3.5 Δομή πλέγματος των LCG's.

Έστω μια σειρά τυχαίων ομοιόμορφων αριθμών R₁, R₂, ... R_n, R_{n+1} που δημιουργήθηκαν από έναν αλγόριθμο LCG. Επειδή εξ ορισμού ισχύει 0 < R_n < 1 είναι λογικό ότι το ζεύγος (R₁, R₂) θα αντιπροσωπεύει ένα σημείο μέσα σε ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Αν παρθούν όλα τα σημεία (R_n, R_{n+1}) τότε θα περίμενε κανείς μια καλή κάλυψη του μοναδιαίου τετραγώνου με τυχαία διάταξη των σημείων αυτών (Σχήμα 3.2). Μια διάταξη όμως κατά την οποία τα σημεία θα ήταν π.χ. μαζεμένα στην κάτω δεξιά γωνία του τετραγώνου, θα έβαζε σε υποψίες τον χρήστη των τυχαίων αριθμών όσον αφορά την ποιότητα του αλγόριθμου που χρησιμοποίησε.



Σχήμα 3.2 Τυχαία διάταξη των σημείων (R_n, R_{n+1}) στο μοναδιαίο τετράγωνο.

Ένα χαρακτηριστικό των LCG's είναι ότι τα ζεύγη (R_n, R_{n+1}) δημιουργούν διατάξεις (lattice structures) που μοιάζουν με γραμμές (Σχήμα 3.3) οι οποίες είναι πολλές φορές διακριτές μόνο όταν κάποιος εστιάζει στο μοναδιαίο τετράγωνο. Οι διατάξεις αυτές ήταν γνωστές αρκετά παλαιότερα (Greenberger, 1961, Greenberger, 1965) όμως δεν έτυχαν ιδιαίτερης προσοχής. Ο πρώτος που απέδειξε ότι αυτές οι διατάξεις αποτελούν εγγενές χαρακτηριστικό των LCG's ήταν ο Marsaglia (Marsaglia, 1968).



Σχήμα 3.3 Διάταξη των σημείων (R_n, R_{n+1}) για τον LCG[509,10,0,1]

Στη διάταξη του Σχήματος 3.3 τα σημεία μεταξύ των γραμμών έχουν πολύ μεγαλύτερη απόσταση από ότι τα σημεία εντός μιας γραμμής. Το επιδιωκόμενο από ένα «καλό» αλγόριθμο είναι οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων (είτε μεταξύ είτε επί των γραμμών) να είναι ελάχιστες ώστε να υπάρχει καλή κάλυψη του μοναδιαίου τετραγώνου και να αποφευχθούν προβλήματα από των τυχαίων αριθμών που παράγει. Με τη χρήση μεγαλύτερου πολλαπλασιαστή (a=108), ο προηγούμενος αλγόριθμος θα παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά από τον LCG[509,10,0,1] (Σχήμα 3.4). Αυτό μπορεί να δειχθεί και για άλλες τιμές του πολλαπλασιαστή και έτσι να προκύψει το συμπέρασμα (L' Ecuyer, 1998) πως **μικρού μεγέθους πολλαπλασιαστές αποτελούν εγγύηση για μεγάλες αποστάσεις**



Σχήμα 3.4 Διάταξη των σημείων (R_n, R_{n+1}) για τον LCG[509,108,0,1]

Αλγόριθμοι σαν αυτούς των σχημάτων 3.2 ως 3.4, με τόσο μικρές τιμές πολλαπλασιαστή και διαιρέτη, δεν χρησιμοποιούνται στην πράξη επειδή από τη μια η περίοδος είναι πολύ μικρή, ενώ από την άλλη οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων είναι πολύ μεγάλες. Σε «καλύτερους» και πιο δοκιμασμένους αλγόριθμους, όπως ο Minimal Standard LCG[2³¹–1, 16807, 0] παρατηρείται πολύ καλή κάλυψη του μοναδιαίου τετραγώνου με σημεία που απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους. Βέβαια η δομή πλέγματος εξακολουθεί να υπάρχει, αλλά για να γίνει ευκρινής πρέπει το μοναδιαίο τετράγωνο να μεγεθυνθεί υπό κατάλληλη κλίμακα (Σχήμα 3.5). Θα πρέπει ακόμη να τονισθεί πως οι επιδράσεις της δομής πλέγματος σε μια προσομοίωση που χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς, κάνουν την εμφάνισή τους όταν χρησιμοποιήθεί το σύνολο των αριθμών της περιόδου του αλγόριθμου. Αυτό σημαίνει πως χρησιμοποιώντας μόνο ένα μικρό μέρος της περιόδου για προσομοίωση, οι επιδράσεις μπορούν να μηδενιστούν.



Σχήμα 3.5 Μεγέθυνση του μοναδιαίου τετραγώνου για τον αλγόριθμο Minimal Standard.

Η τοποθέτηση των σημείων (R_n, R_{n+1}) στο μοναδιαίο τετράγωνο και ο έλεγχος της απόστασης μεταξύ των σημείων είναι πλέον ένα από τα πολύ γνωστά τεστ τυχαιότητας που εφαρμόζονται στους αλγόριθμους παραγωγής ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών. Προτάθηκε από τους Coveyou and McPherson (1967) και καλείται φασματικό τεστ (spectral test).

Ενώ στα Σχήματα 3.2 ως 3.5 παρουσιάστηκε η δομή πλέγματος των σημείων (R_n, R_{n+1}) σε δυο διαστάσεις πρέπει να τονισθεί ότι αυτό έγινε για λόγους παρουσίασης και μόνο. Η δομή πλέγματος εμφανίζεται και σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Έτσι για παράδειγμα, στις τρεις διαστάσεις τα σημεία (R_n, R_{n+1}, R_{n+2}) μπορεί να σχηματίζουν επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους (Σχήμα 3.6):



Σχήμα 3.6 Διάταξη των σημείων του LCG(2³¹, 65539, 0, 1) σε 15 επίπεδα στις 3 διαστάσεις (Hellekalek, 1988)

3.6 Η υπορουτίνα ran1.

Οι Park and Miller (1988), διερεύνησαν πάνω από 50 αλγόριθμους παραγωγής τυχαίων αριθμών από αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν τα τελευταία 19 χρόνια. Μαζί με ικανοποιητική θεωρητική διερεύνηση, παρουσίασαν μια συλλογή μη ικανοποιητικών αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα. Οι ίδιοι συγγραφείς θεωρούν ότι η σχέση (3.3) είναι καλύτερη από τη σχέση (3.2), αν επιλεγούν οι κατάλληλες τιμές για τα α και c. Μάλιστα προτείνουν τη χρήση μιας σχέσης «Minimal standard» που ανήκει στην κατηγορία των LCG's και διατυπώθηκε από τους Lewis, Goodman and Miller (1969), η οποία χρησιμοποιεί τις τιμές:

$$a = 7^5 = 16807$$
, $c = 0$, kai $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$ (3.5)

Το βασικότερο μειονέκτημα της σχέσης «Minimal standard» είναι πως δεν είναι δυνατό να προγραμματιστεί σε μια γλώσσα υψηλού επιπέδου: αν χρησιμοποιηθούν οι τιμές της (3.5) τότε η μέγιστη τιμή του γινομένου $a \cdot x_j = 16807 \cdot 2147\,483\,646 \approx 1.03 \cdot 2^{45}$, απαιτεί 46 bit για την αποθήκευσή του, μια τιμή που ξεπερνά τη μέγιστη τιμή για ένα 32– μπιτο ακέραιο. Ένα «τρικ» που αποδίδεται στον Schrage (1979) δίνει στη σχέση Minimal Standard όμως και αυτή τη δυνατότητα: πολλαπλασιάζονται δυο 32–μπιτοι ακέραιοι και λαμβάνεται το υπόλοιπο της διαίρεσης του γινομένου τους, με έναν τρίτο 32–μπιτο ακέραιο.

Ο αλγόριθμος του Schrage βασίζεται στην προσεγγιστική παραγοντοποίηση του m:

Av
$$m = aq + r$$
 τότε $q = \left[\frac{m}{a}\right]$ και $r = m \mod a$ (3.6)

όπου οι αγκύλες συμβολίζουν το ακέραιο μέρος του αριθμού. Αν το r είναι μικρό (ειδικότερα όταν r < q) και αν 0 < z < m - 1, μπορεί να δειχθεί ότι τόσο ο αριθμός: $a (z \mod q)$ όσο και ο: $r \left[\frac{z}{q} \right]$ βρίσκονται στο διάστημα [0, m - 1] και πως:

$$a z \mod m = \begin{cases} a (z \mod q) - r \begin{bmatrix} z/q \end{bmatrix} & \alpha v \ \varepsilon i \, v \alpha \iota \ge 0 \\ a (z \mod q) - r \begin{bmatrix} z/q \end{bmatrix} + m & \alpha v \ \varepsilon i \, v \alpha \iota < 0 \end{cases}$$
(3.7)

Για την προσεγγιστική παραγοντοποίηση του m της σχέσης «Minimal standard» σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Schrage πρέπει: q = 127773 και r = 2836. Η

ενσωμάτωση των σχέσεων (3.2) ως (3.7) σε ένα αλγόριθμο παρουσιάζει όμως ορισμένα μειονεκτήματα:

- Ο αλγόριθμος αυτός αν και θα έχει περίοδο ≈ 2.1_10⁹, δεν είναι τέλειος. Μια φορά στο 1.000.000 αριθμούς, θα επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό με τιμή κοντά στο 1.000.000, ο οποίος όμως πάντα θα ακολουθείται από άλλον τυχαίο αριθμό με τιμή μικρότερη από ≈0.0168. Μία τέτοιου είδους απότομη διαδοχή ακραίων τιμών, μπορεί πολύ εύκολα να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα, τις εφαρμογές που αφορούν σπάνια φαινόμενα.
- Δυσκολίες παρουσιάζονται επίσης στην εκκίνηση της επαναληπτικής διαδικασίας: αν σαν πρώτη τιμή ληφθεί το 0 τότε δημιουργούνται μόνο μηδενικοί αριθμοί, ενώ αν η πρώτη τιμή είναι διάφορη του 0, τότε ο αλγόριθμος δεν παράγει ποτέ μηδενική τιμή.
- Εμφανίζονται σειριακές συσχετίσεις μεταξύ των παραγομένων τιμών κοντινών μετατοπίσεων (lags) (low – order serial correlations).

```
ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
FUNCTION ran1(idum)
      INTEGER idum, IA, IM, IQ, IR, NTAB, NDIV
      REAL ran1, AM, EPS, RNMX
      PARAMETER (IA=16807, IM=2147483647, AM=1./IM, IQ=127773, IR=2836,
     *NTAB=32,NDIV=1+(IM-1)/NTAB,EPS=1.2e-7,RNMX=1.-EPS)
      INTEGER j,k,iv(NTAB),iy
      SAVE iv, iy
      DATA iv /NTAB*0/, iy /0/
      if (idum.le.0.or.iy.eq.0) then
        idum=max(-idum,1)
        do 11 j=NTAB+8,1,-1
          k=idum/IQ
          idum=IA*(idum-k*IQ)-IR*k
          if (idum.lt.0) idum=idum+IM
          if (j.le.NTAB) iv(j)=idum
11
        continue
        iy=iv(1)
      endif
      k=idum/IO
      idum=IA*(idum-k*IQ)-IR*k
      if (idum.lt.0) idum=idum+IM
      j=1+iy/NDIV
      iy=iv(j)
      iv(j)=idum
      ran1=min(AM*iy,RNMX)
      return
      END
```

Η υπορουτίνα που χρησιμοποιήθηκε στη διατριβή αυτή και που παρουσιάζεται σ' αυτήν την παράγραφο είναι γραμμένη σε γλώσσα FORTRAN, ακολουθεί την λογική Minimal Standard ενώ χρησιμοποιεί και το «τρικ» του Schrage. Περιέχει όμως τέτοιες βελτιώσεις ώστε να μην εμφανίζει κανένα από τα προηγούμενα μειονεκτήματα: δέχεται την τιμή 0 σαν τιμή εκκίνησης ενώ χρησιμοποιεί μια διαδικασία μετατόπισης των τιμών για να «σπάει» τις σειριακές συσχετίσεις μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον Knuth (1981) ο αλγόριθμος αυτός αποδίδεται στους Bays και Durham. Αν και στη βιβλιογραφία έχουν κατά καιρούς παρουσιαστεί καλύτεροι αλγόριθμοι (π.χ. L' Ecuyer, 1988) και όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5, οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του δεν είναι οι καλύτερες δυνατές, ο συγκεκριμένος συνδυάζει τα καλά στατιστικά χαρακτηριστικά και το σημαντικό ότι έχει τύχει ευρείας χρήσης, είναι ικανοποιητικός για πολλές εφαρμογές (CS.E.P. e-book, 1995), τον προτείνουν οι Schrage (1979), Bratley et al., (1987) κ.α., εμφανίζεται σε πακέτα λογισμικού όπως τα SLAM II, SIMAN, MATLAB, στις γνωστές βιβλιοθήκες IMSL (IMSL, 1987), και σε λειτουργικά συστήματα για υπολογιστές IBM και Macintosh. Επίσης σύμφωνα με τους Press et al. (1997), ικανοποιεί όλα τα γνωστά στατιστικά τεστ, εκτός από την περίπτωση που το πλήθος των αριθμών που ζητάμε πλησιάζει την τάξη της περιόδου m (αν είναι δηλαδή μεγαλύτερο από 10⁸ που αντιστοιχεί περίπου στο m/20).

3.6 Κανονικά κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί.

3.6.1. Εισαγωγικά

Η πιο σημαντική κατανομή πιθανότητας είναι η κανονική κατανομή που είναι γνωστή και ως κατανομή Gauss. Η κανονική κατανομή Ν(μ,σ) με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$
(3.8)

ενώ η κανονική κατανομή για την οποία μ=0 και σ=1, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
 -\omega < x < \omega (3.9)

καλείται **τυπική κανονική κατανομή** και συμβολίζεται με **N(0,1)**. Το σημαντικό με την τυπική κανονική κατανομή είναι πως οι τιμές που την ακολουθούν μπορούν πολύ εύκολα να μετασχηματιστούν ώστε να ακολουθούν μια κανονική κατανομή με επιθυμητή μέση τιμή και τυπική απόκλιση: αν τους τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή τους πολλαπλασιάσουμε με μια επιθυμητή τυπική απόκλιση σ, τότε οι νέοι αριθμοί που θα προκύψουν θα ακολουθούν την κανονική κατανομή N(0,σ), ενώ αν προσθέσουμε σ' αυτούς και μια επιθυμητή μέση τιμή μ, τότε θα ακολουθούν τελικά την κανονική κατανομή N(μ,σ). Η κανονική κατανομή χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα λόγω της από παλιά σύνδεσής της με τη «θεωρία των σφαλμάτων» ενώ και πολλές στατιστικές τεχνικές βασίζονται στην υπόθεση της κανονικότητας (Haan, 1977). Στη φύση επίσης πολλές υδρολογικές μεταβλητές, ιδιαίτερα αυτές των μεγάλων χρονικών βημάτων, θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή. Έτσι για παράδειγμα την κανονική κατανομή ακολουθούν οι ετήσιες τιμές βροχοπτώσεων ενός βροχομετρικού σταθμού, αλλά όχι και οι μηνιαίες ή οι ημερήσιες (Παπαμιχαήλ, 1993).

Όσον αφορά την προσομοίωση των μεταβολών μιας παραμέτρου Υ στο χώρο με το μοντέλο nearest neighbor, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.3 η παράμετρος Υ θεωρείται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή Ν(0,σ). Για τον λόγο αυτό και οι τυχαίοι αριθμοί ε_{i,j} που πρέπει να εισάγονται στο μοντέλο πρέπει να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Όμως οι κανονικά κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί μπορούν να δημιουργηθούν από ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς με μια διαδικασία που θα περιγραφεί αμέσως πιο κάτω.

3.6.2. Μετατροπή ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών σε κανονικά κατανεμημένους.

Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στη διατριβή αυτή είναι των Box and Muller (1958) Σύμφωνα με αυτή, θεωρούμε δυο ομοιόμορφους (0,1) τυχαίους αριθμούς x₁ και x₂ και δυο ποσότητες y₁ και y₂ τέτοιες ώστε:

$$y_1 = \sqrt{-2\ell n x_1} \cos(2\pi x_2)$$
(3.10)

$$y_2 = \sqrt{-2\ell n x_1} \sin(2\pi x_2)$$
(3.11)

Από όπου προκύπτει ότι:

$$y_1^2 + y_2^2 = -2\ell n x_1 \Leftrightarrow x_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right]$$
 (3.12)

каі

$$\frac{y_2}{y_1} = \tan(2\pi x_2) \iff x_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1}$$
(3.13)

Συνεπώς η Ιακωβιανή ορίζουσα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = -\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{y_1^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{y_2^2}{2}}\right]$$
(3.14)

Η (3.14) λοιπόν είναι το γινόμενο δύο συναρτήσεων: μιας του y₁ και μιας του y₂. Επειδή η συνάρτηση κάθε μιας από τις ποσότητες y είναι η συνάρτηση κανονικής κατανομής N(μ=0,σ=1), όπως ορίστηκε στην (3.9) γίνεται φανερό ότι οι ποσότητες y₁ και y₂ θα ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Η ακρίβεια του αλγόριθμου των Box and Muller εξαρτάται τόσο από την ακρίβεια του υπολογιστή (64-μπιτος, 32-μπιτος ή 16-μπιτος) όσο και από την ακρίβεια (απλή ή διπλή) υπολογισμού των λογαριθμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων στις σχέσεις (3.10) και (3.11). Για να βελτιώσουμε την ακρίβεια των υπολογισμών καταφεύγουμε στην εξής τεχνική με σκοπό να αποφύγουμε τις λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις: αν στις (3.10) και (3.11) αντί για ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς x_1 και x_2 , επιλέξουμε δυο αριθμούς u_1 και u_2 σαν την τεταγμένη και την τετμημένη αντίστοιχα, ενός τυχαίου σημείου εντός του μοναδιαίου κύκλου:



τότε θα ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων τους $R^2 \equiv u_1^2 + u_2^2$ είναι και αυτό ένας ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός. Το $u_1^2 + u_2^2$ μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί στη σχέση (3.12) στη θέση του $-2 \ell n x_1$ αποφεύγοντας έτσι την λογαριθμική σχέση. Επίσης η γωνία που ορίζει το διάνυσμα \overrightarrow{OA} με το διάνυσμα $\overrightarrow{Ou_1}$ θα έχει εφαπτομένη $\frac{u_2}{u_1}$ και θα μπορεί να θεωρηθεί – σχέση (3.13) – σαν η τυχαία γωνία $2\pi x_2$. Άρα το συνημίτονο και το ημίτονο των

(3.10) και (3.11) μπορούν πλέον να γραφούν σαν $u_1 / \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ και $u_2 / \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ αντίστοιχα

αποφεύγοντας τη χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Η προσέγγιση των Box and Muller, σε συνδυασμό με το παραπάνω τρικ, προγραμματισμένη σε γλώσσα FORTRAN παρουσιάζεται στην υπορουτίνα gasdev (Press et al., 1997), η οποία χρησιμοποιεί την υπορουτίνα παραγωγής ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών ran1 της παραγράφου 3.5 για να παράγει κανονικά κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς:

```
FUNCTION gasdev(idum)
       INTEGER idum
       REAL gasdev
       THIS FUNCTION USES THE ran1 FUNCTION
 С
       INTEGER iset
       REAL fac,gset,rsq,v1,v2,ran1
       SAVE iset, gset
       DATA iset/0/
       if (iset.eq.0) then
1
        v1=2.*ran1(idum)-1.
         v2=2.*ran1(idum)-1.
        rsq=v1**2+v2**2
if(rsq.ge.1..or.rsq.eq.0.)goto 1
fac=sqrt(-2.*log(rsq)/rsq)
         gset=v1*fac
         gasdev=v2*fac
          iset=1
        else
          gasdev=gset
          iset=0
        endif
        return
        END
```

Κεφάλαιο 4. Η μέθοδος Monte Carlo

4.1 Εισαγωγή στις μεθόδους Monte Carlo.

Οι αριθμητικές μέθοδοι που είναι γνωστές ως «μέθοδοι Monte Carlo» μπορούν να περιγραφούν – όχι αυστηρά – ως μέθοδοι στοχαστικής προσομοίωσης, όπου ως στοχαστική προσομοίωση ορίζεται γενικά κάθε μέθοδος που χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς για να εκτελέσει την προσομοίωση. Άρα λοιπόν ο τίτλος «μέθοδος Monte Carlo» στην πραγματικότητα δεν αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη μέθοδο αλλά σε ένα πλήθος μεθοδολογιών, των οποίων κοινό χαρακτηριστικό είναι ότι προσπαθούν να προσεγγίσουν την πραγματική λύση ενός προβλήματος με την επαναληπτική χρήση τυχαίων αριθμών.

Ο Freeze (1975) χρησιμοποιώντας τον όρο «μέθοδος Monte Carlo» αναφέρεται σε ένα σύνολο επαναλαμβανόμενων προσομοιώσεων μιας διαδικασίας με τη χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου και στη μετέπειτα στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων. Από τη στατιστική αυτήν επεξεργασία θα προκύψουν κάποια όρια μέσα στα οποία μπορεί να βρεθεί η λύση του προβλήματος υπό δεδομένη βεβαιότητα – ακρίβεια. Έτσι π.χ. αν δοθούν τα 95% όρια εμπιστοσύνης, αυτό σημαίνει ότι με βεβαιότητα 95% η λύση που επιζητούμε θα βρίσκεται εντός αυτών των ορίων.

Στην ξένη βιβλιογραφία αναφέρονται διάφορες μεθοδολογίες τύπου Monte Carlo όπως: crude Monte Carlo, hit or miss Monte Carlo, sample mean Monte Carlo κ.α. (Hammersley and Handscomb, 1964, Rubinstein, 1981). Κάθε μια από αυτές έχει διαφορετική απόδοση, τρόπο εφαρμογής, πεδίο εφαρμογής και πολυπλοκότητα στην επίλυση προβλημάτων, όπως ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων, η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, ο υπολογισμός ιδιοτιμών κ.α. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου σε πολλά διαφορετικά προβλήματα που μπορούν να αφορούν π.χ. το σχεδιασμό πυρηνικών αντιδραστήρων, τη θεραπεία καρκίνου με ακτινοβολία, την προσομοίωση της κυκλοφορίας των μεγαλουπόλεων, την αστρική εξέλιξη, την οικονομετρία, την πρόβλεψη του χρηματιστηριακού δείκτη Dow–Jones κ.α..

Έστω ότι υπάρχει μοντέλο προσομοίωσης ενός φαινομένου και μια παράμετρός του θεωρείται στοχαστική (είναι γνωστή δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την οποία ακολουθεί). Η επαναληπτική διαδικασία εισαγωγής η τυχαίων τιμών (που θα πρέπει να προέρχονται από την ίδια κατανομή με τη στοχαστική παράμετρο) στη θέση της στοχαστικής παραμέτρου και η εξαγωγή η διαφορετικών αποτελεσμάτων, περιγράφει την πιο απλή σε εφαρμογή μεθοδολογία Monte Carlo από τις διάφορες που αναφέρθηκαν πιο πάνω: την **crude Monte Carlo**.

Οι απαντήσεις της μεθόδου Monte Carlo, που θα προκύψουν από στατιστική επεξεργασία, αποτελούν προσεγγίσεις της πραγματικότητας καθώς εμπεριέχουν ποσά αβεβαιότητας που προκύπτουν από τη χρήση τυχαίων αριθμών. Μπορούν όμως να αποτελέσουν σημαντικό εργαλείο λήψης αποφάσεων, αν καταστεί δυνατή η μείωση της αβεβαιότητας αυτής σε μη σημαντικά επίπεδα. Μία κοινή πρακτική είναι να προέλθουν τα αποτελέσματα μετά από περισσότερες επαναλήψεις (μετά από χρήση μεγαλύτερου αριθμού τυχαίων αριθμών n). Με τη χρήση περισσοτέρων επαναλήψεων οι απαντήσεις της μεθόδου Monte Carlo συγκλίνουν προς στην πραγματική λύση. Γενικά έχει παρατηρηθεί πως η ακρίβεια είναι ανάλογη του όρου $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Πιο απλά, πρέπει να εκατονταπλασιαστεί ο αριθμός των επαναλήψεων για να επιτευχθεί μείωση του σφάλματος κατά δέκα φορές (Hammersley

and Handscomb, 1964). Η πρακτική αυτή αν και βοηθά πάρα πολύ, προφανώς αποβαίνει εις βάρος του υπολογιστικού χρόνου.

Πλεονεκτήματα της μεθόδου Monte Carlo αποτελούν:

- η ευκολία ενσωμάτωσής της μέσα στον αλγόριθμο ενός μοντέλου.
- ότι οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί της θεωρητικά αντιστοιχούν σε μια σειρά παρατηρήσεων ή μετρημένων στο πεδίο τιμών και
- ότι η μέθοδος μπορεί να χειριστεί δεδομένα εισόδου που χαρακτηρίζονται από μεγάλη μεταβλητότητα.

Αντίθετα μειονεκτήματα της μεθόδου αποτελούν:

- ο υπέρμετρος υπολογιστικός χρόνος για την επίτευξη ικανοποιητικής ακρίβειας
- η έστω και μικρή αβεβαιότητα των αποτελεσμάτων

Τόσο η δειγματοληψία μεγάλου πλήθους τυχαίων αριθμών, όσο και η επαναληπτική επίλυση του μοντέλου που χρησιμοποιείται, είναι δύο χαρακτηριστικά που καθιστούν επιτακτική όχι μόνο τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, αλλά και την ύπαρξη ικανοποιητικής υπολογιστικής ισχύος.

4.2 Ιστορικά.

Σύμφωνα με τους Hammersley and Handscomb (1964) η μέθοδος Monte Carlo πρωτοχρησιμοποιήθηκε στην αρχή του αιώνα και συγκεκριμένα το 1901, για την μελέτη της εξίσωσης Boltzmann από το Λόρδο Kelvin, ο οποίος όμως έδωσε μεγαλύτερη σημασία στα αποτελέσματα της μεθόδου παρά στην ίδια τη μέθοδο. Το 1908 ο διάσημος στατιστικολόγος Student (W. S. Gosset 1876–1937) χρησιμοποίησε επίσης τη μέθοδο Monte Carlo για την εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης της t – κατανομής του.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται, αλλά παραμένει χωρίς όνομα μέχρι το 1944. Ο όρος Monte Carlo εισήχθηκε από τους John von Neumann και Stanislas Ulam σαν κωδική λέξη νια τις μυστικές εργασίες του προγράμματος Manhattan γύρω από την ατομική βόμβα στα εργαστήρια του Los Alamos των Η.Π.Α. (Rubinstein, 1981): Το δυσκολότερο κομμάτι της έρευνάς τους αφορούσε το σχεδιασμό ασπίδων και επιβραδυντήρων των νετρονίων που εκλύονται μετά από την έκρηξη. Μιας και ήταν πρακτικά αδύνατο να γίνουν πειράματα, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά έπρεπε να δώσουν τη λύση. Όμως δεν ήταν δυνατό να βρεθεί μια εξίσωση που θα έδινε την πιθανότητα που έχει ένα νετρόνιο να διανύσει μια ορισμένη απόσταση χωρίς να απορροφηθεί. Οι δύο ερευνητές πρότειναν σα λύση του προβλήματος, τη συνένωση πιθανοτήτων ξεχωριστών τυχαίων γεγονότων (κινήσεων νετρονίων) προς σχηματισμό μιας σύνθετης εικόνας. Η σύνθετη αυτή εικόνα θα είναι μια προσεγγιστική μεν, χρήσιμη δε, λύση στο πρόβλημα. Έτσι επέλεξαν τυχαίους αριθμούς που θεωρήθηκε ότι αναπαριστούν την τυχαία κίνηση των νετρονίων. Με τον τρόπο αυτό δεν γινόταν πειραματισμός και υπήρχε κέρδος χρόνου, χρήματος και ασφάλειας (Meyer, 1985). Επειδή η μελέτη των τυχαίων γεγονότων θύμιζε ρουλέτα και καζίνο και επειδή ο Ulam είχε πάθος με το poker, δόθηκε στη νέα μέθοδο το όνομα της πόλης Monte Carlo του Monaco, όπου υπάρχουν πολλά καζίνο (Rubinstein, 1981).

Η πιθανότητα εφαρμογής της μεθόδου Monte Carlo σε ντετερμινιστικά προβλήματα, εξετάστηκε και διαφημίστηκε από τους Fermi, von Neumann και Ulam, ιδιαίτερα στα μεταπολεμικά χρόνια (Hammersley and Handscomb, 1964). Γύρω στα 1948 οι Fermi, Metropolis και Ulam χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo, έλαβαν εκτιμήσεις των ιδιοτιμών της γνωστής από την κβαντομηχανική εξίσωσης Schrödinger, η οποία για το άτομο του υδρογόνου γράφεται:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V\Psi = E\Psi$$
(4.1)

όπου: με h συμβολίζεται η σταθερά του Planc (= 6,625×10⁻³⁴ Joule-sec), με m, V, E συμβολίζονται αντίστοιχα η μάζα, η δυναμική ενέργεια και η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Τέλος με τη συνάρτηση Ψ(x,y,z) συμβολίζεται το μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο (x,y,z) του χώρου, το οποίο δημιουργείται από την κίνηση του ηλεκτρονίου. Τη δεκαετία του 1950, ιδιαίτερα στις Η.Π.Α., έγιναν προσπάθειες για την επίλυση σχεδόν κάθε προβλήματος με τη μέθοδο Monte Carlo. Οι προσπάθειες αυτές όμως δεν έφεραν ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Το συμπέρασμα στο οποίο κατάληξαν οι διάφοροι ερευνητές ήταν πως η μέθοδος είναι σημαντικά κατώτερης ακρίβειας των μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης (Morton, 1956). Σα συνέπεια οι εφαρμογές της μεθόδου σιγά – σιγά περιορίστηκαν.

Μετά το 1960 παρατηρείται επιστροφή στη χρήση της μεθόδου. Αυτή τη φορά σημασία δόθηκε στο ποια προβλήματα μπορούν να λυθούν ικανοποιητικά και ποια όχι, κάτι που δεν είχε γίνει στο παρελθόν. Σύμφωνα με τους Hammersley και Handscomb (1964) μάλιστα, σε ορισμένα προβλήματα η μέθοδος Monte Carlo αποτελεί τη μόνη διαθέσιμη τεχνική.

Σε θέματα που αφορούν τον Γεωπόνο Εγγείων Βελτιώσεων η μέθοδος Monte Carlo δεν έχει τύχει ακόμη ευρείας εφαρμογής. Από αυτή τη σκοπιά η διατριβή αυτή είναι καινοτόμος και ανοίγει νέες προοπτικές έρευνας.

Κεφάλαιο 5. Μαθηματική προσομοίωση της μονοδιάστατης κίνησης του νερού στο ἑδαφος, με το μοντἑλο S.W.BA.CRO.S.

5.1 Εισαγωγή.

Η χρήση μαθηματικών μοντέλων για την προσομοίωση της κίνησης του νερού στο έδαφος έχει διαδοθεί πολύ μεταξύ των ερευνητών τα τελευταία χρόνια. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην επίλυση της εξίσωσης που περιγράφει την κίνηση του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους υπό ισόθερμες και ισοβαρείς συνθήκες και είναι γνωστή ως **εξίσωση Richards**:

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right] - S(h, z)$$
(5.1)

όπου:

h = το ύψος πίεσης του εδαφικού νερού [L],

C(h) = υδραυλική χωρητικότητα του εδάφους, C(h)=dθ/dh [L⁻¹],

θ = εδαφική υγρασία κατ' όγκο [L³ L⁻³],

 z = κατακόρυφη συντεταγμένη με θετική φορά προς τα κάτω και με αρχή την επιφάνεια του εδάφους [L],

K(h) = ακόρεστη υδραυλική αγωγιμότητα [L T⁻¹].

S(h,z) = πρόσληψη του νερού από τις ρίζες του φυτού [T⁻¹].

5.2 Το μοντέλο S.W.BA.CRO.S.

<u>5.2.1 Γενικά</u>

Το μοντέλο SWBACROS αναπτύχθηκε το 1995 στο εργαστήριο Γενικής και Γεωργικής Υδραυλικής και Βελτιώσεων από τον καθηγητή κ. Χρήστο Μπαμπατζιμόπουλο (Babajimopoulos et al., 1995). Βασίζεται στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Richards (5.1) με τη μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης Douglas – Jones (Douglas and Jones, 1963). Ο όρος S(h,z) της εξίσωσης Richards προσεγγίζεται από μία σχέση της μορφής:

$$S(h,z) = \alpha(h)S_{\max}(z) \tag{5.2}$$

όπου a(h) είναι μία αδιάστατη συνάρτηση της εδαφικής τάσης και S_{max}(z,t) είναι η μέγιστη δυνατή πρόσληψη νερού από τις ρίζες που γενικά είναι συνάρτηση του βάθους του ριζοστρώματος.

Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται η μεταβολή του όρου S σε σχέση με την απόλυτη τιμή του ύψους πίεσης του εδαφικού νερού. Σύμφωνα και με το σχήμα αυτό, η τιμή της S μεταβάλλεται γραμμικά για 0 > h ≥ h₁, παίρνει τη μέγιστη τιμή της για h₁ > h ≥ h₂ και μεταβάλλεται γραμμικά για h₂ > h ≥ h₃. Η τιμή της h₂ κυμαίνεται μεταξύ -1000 και -500 cm ενώ η τιμή της h₃ κυμαίνεται μεταξύ -20000 και -15000 cm (Hoogland et al., 1981).

Η διαπνεόμενη από το φυτό ποσότητα νερού Τ_a, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_a = \int_0^L S(h, z) dz \tag{5.3}$$

όπου L είναι το βάθος του ριζικού συστήματος.



Σχήμα 5.1 Μεταβολή του όρου S με την τάση (Feddes, et al., 1978).

Όταν το έδαφος βρίσκεται στην υδατοϊκανότητα, τότε η πρόσληψη του νερού από το φυτό είναι μέγιστη – δηλαδή a(h)=1 – όπως και η διαπνοή του. Η μέγιστη λοιπόν διαπνοή (δυναμική) Τ_p, υπολογίζεται από τη σχέση (5.3) για a(h) = 1:

$$T_p = \int_0^L S_{\max}(z) dz$$
(5.4)

όπου L είναι το βάθος του ριζικού συστήματος.

Το μοντέλο δίνει δύο επιλογές για τον υπολογισμό του S_{max}. Κατά την πρώτη αυτό λαμβάνεται σταθερό σε σχέση με το βάθος (Feddes et al., 1978) οπότε επιλύωντας την (5.4) προκύπτει:

$$S_{\max} = \frac{T_p}{L}$$
(5.5)

Κατά τη δεύτερη επιλογή το S_{max} μεταβάλλεται σε σχέση με το βάθος σύμφωνα με τη σχέση (Prasad, 1988):

$$S_{max}(z) = a - bz \tag{5.6}$$

Αντικαθιστώντας την (5.6) στην (5.4) προκύπτει:

$$T_p = \alpha L - \frac{b L^2}{2} \tag{5.7}$$

και αν θεωρηθεί ότι S_{max} = 0 για z = L από την (5.6) θα προκύψει:

$$a - bL = 0 \tag{5.8}$$

Από το αλγεβρικό σύστημα των (5.7) και (5.8) προκύπτει:

$$S_{\max}(z) = \frac{2T_p}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right)$$
(5.9)

όπου θα πρέπει να σημειωθεί ότι η δυναμική διαπνοή Τ_p και το βάθος του ριζικού συστήματος L, είναι μεταβλητά σε σχέση με το χρόνο. Η δυναμική διαπνοή Τ_p, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_p = ET_p - E_p \tag{5.10}$$

όπου ΕΤ_p είναι η δυναμική εξατμισοδιαπνοή που υπολογίζεται με την τροποποιημένη μέθοδο του Penman και E_p είναι η δυναμική εξάτμιση από την επιφάνεια του εδάφους που υπολογίζεται από τη σχέση (Ritchie, 1972, Al–Khafaf et al., 1978):

$$E_p = ET_p \exp(-0.623LAI) \tag{5.11}$$

όπου LAI είναι ο δείκτης φυλλικής επιφάνειας (leaf area index).

Αν η ἀρδευση (ἡ βροχόπτωση) είναι μικρότερη από 1 cm/day τότε η εξἀτμιση από την επιφἀνεια του εδἀφους, Ε_a δίνεται από τη σχέση:

$$E_a = \sigma t^b - \sigma (t-1)^b \tag{5.12}$$

όπου:

σ = είναι παράμετρος εξαρτώμενη από το έδαφος,

t = χρόνος σε ημέρες μετά την έναρξη της ξηράς περιόδου,

b = ένας εκθέτης

5.2.2 Περιγραφή της ακόρεστης υδραυλικής αγωγιμότητας και της υδραυλικής χωρητικότητας του εδάφους.

Η ακόρεστη υδραυλική αγωγιμότητα K(h), περιγράφεται από το μοντέλο του Mualem (1976):

$$K(Se) = K_s Se^{\ell} \left[\frac{f(Se)}{f(1)} \right]^2$$
(5.13)

όπου: $f(Se) = \int_0^{Se} \frac{1}{h(x)} dx$

Se = ο αποτελεσματικός βαθμός κορεσμού. Σύμφωνα με τον Van Genuchten (1980):

$$Se = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\left[1 + \left(\alpha h\right)^n\right]^m}$$
(5.14)

όπου:

θ = περιεχόμενη στο έδαφος υγρασία κατ' όγκο [L³ L⁻³],

- θ_r = υπολειμματική υγρασία [L³ L⁻³] και
- $θ_s = υγρασία κορεσμού [L³ L⁻³].$
- a = εμπειρική παράμετρος [L⁻¹]
- n = εμπειρική παράμετρος

m = εμπειρική παράμετρος. Συνήθως θεωρείται ότι ισχύει: $m = 1 - \frac{1}{n}$

- K_s = η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό (saturated hydraulic conductivity)
- μια pore connectivity παράμετρος που ο Mualem υπολόγισε ότι κατά μέσο
 όρο στα διάφορα εδάφη είναι ίση με 1/2.
- h(x) = η συνάρτηση που θα προκύψει από την επίλυση της (5.14) ως προς την πίεση h.

Από το συνδυασμό των (5.13) και (5.14) προκύπτει ότι η υδραυλική αγωγιμότητα δίνεται από τη σχέση (Van Genuchten, 1980):

$$K(h) = K_s \frac{\left\{1 - (\alpha h)^{mn} \left[1 + (\alpha h)^n\right]^{-m}\right\}^2}{\left[1 + (\alpha h)^n\right]^{m/2}}$$
(5.15)

Αντίστοιχα η υδραυλική χωρητικότητα C(h) προκύπτει με παραγώγιση της (5.15) ως προς h:

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh} = \frac{-(\theta_s - \theta_r) \cdot m \cdot \left[1 + (\alpha h)^n\right]^{m-1} \cdot n \cdot \alpha \cdot (\alpha h)^{(n-1)}}{\left[1 + (\alpha h)^n\right]^{2m}}$$
(5.16)

Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι εξισώσεις (5.15) και (5.16) δεν λαμβάνουν υπόψη τους το φαινόμενο της υστέρησης.

5.2.3 Αριθμητική επίλυση

Η εξίσωση (5.1) επιλύεται με τη μέθοδο πρόβλεψης – διόρθωσης των Douglas–Jones (Douglas and Jones, 1963). Η μέθοδος αυτή είναι μια πεπλεγμένη (implicit) μέθοδος που έχει αποδειχθεί μια από τις πιο ικανοποιητικές, στην προσομοίωση της μονοδιάστατης κίνησης του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους (Haverkamp et al., 1977, Hornung and Messing, 1980, Babajimopoulos et al., 1995).

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή οι τιμές των συντελεστών C(h) και K(h) της εξίσωσης Richards, εκφράζονται από μια πρόβλεψη της πίεσης h στο ½ χρονικό βήμα (πεπλεγμένη γραμμικοποίηση).

Θεωρώντας το δίκτυο κόμβων του Σχήματος 5.2, η μέθοδος περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις (Μπαμπατζιμόπουλος, 1995):

.

Σχήμα 5.2 Δίκτυο υπολογισμών για τη μελέτη της μονοδιάστατης ακόρεστης ροής.

Εξίσωση πρόβλεψης:

$$\delta_{z} \left[K^{n} \left(\delta_{z} h^{n+\frac{1}{2}} - 1 \right) - S^{n} \right] = C^{n} \frac{h^{n+\frac{1}{2}} - h^{n}}{\frac{\Delta t}{2}}$$
(5.17)

Εξίσωση διόρθωσης:

$$\frac{1}{2} \left[\delta_z \left[K^{n+\frac{1}{2}} \left(\delta_z h^{n+1} - 1 \right) + K^{n+\frac{1}{2}} \left(\delta_z h^n - 1 \right) \right] - S^{n+\frac{1}{2}} \right] = C^{n+\frac{1}{2}} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}$$
(5.18)

όπου δ_z είναι ο τελεστής των κεντρικών διαφορών και με n συμβολίζεται η χρονική στιγμή. Έτσι: $\Delta t = t^{n+1} - t^n$.

Η εξίσωση (5.17) γράφεται τελικά:

$$\left[-\frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j}+\Delta z_{j+1})\Delta z_{j} C_{j}^{n}}\right]h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}+$$

$$+ \left[\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + \frac{\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1 \right] h_{j}^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+\left[\frac{-\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}}\right] h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n}\right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.19)

Η εξίσωση (5.19) μπορεί να γραφεί υπό τριδιαγωνική μορφή ως εξής:

$$A_{j}h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + B_{j}h_{j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{j}h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = D_{j}$$
(5.20)

όπου:

$$A_{j} = -\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}$$
(5.21)

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + \frac{\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1$$
(5.22)

$$C_{j} = \frac{-\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}$$
(5.23)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.24)

Αντίστοιχα η εξίσωση διόρθωσης (5.18) μπορεί να γραφεί:

$$\left[-\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j}+\Delta z_{j+1}\right)\Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}\right] h_{j+1}^{n+1} +$$

$$+ \left[\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + 1 \right] h_{j}^{n+1} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}} + \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}}$$

$$+ \left[\frac{-\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \right] h_{j-1}^{n+1} =$$

$$= \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1} + 1)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j+1}^{n} - h_{j}^{n} \right) - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n} - h_{j-1}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$(5.25)$$

Η εξίσωση (5.25) μπορεί να γραφεί με τριδιαγωνική μορφή ως εξής:

$$A_{j}h_{j+1}^{n+1} + B_{j}h_{j}^{n+1} + C_{j}h_{j-1}^{n+1} = D_{j}$$
(5.26)

όπου:

$$A_{j} = -\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}$$
(5.27)

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j+1/2}^{n+1/2}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+1/2}} + \frac{\Delta t \, K_{j+1/2}^{n+1/2}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+1/2}} + 1$$
(5.28)

$$C_{j} = -\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}$$
(5.29)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1} + 1) \Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j+1}^{n} - h_{j}^{n} \right) - \frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1} + 1) \Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \right)$$
$$-\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j}+\Delta z_{j-1}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)+h_{j}^{n}-\frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.30)

5.2.4 Οριακές συνθήκες

5.2.4.1 Επάνω οριακή συνθήκη

Η οριακή συνθήκη στην επιφάνεια του εδάφους είναι γνωστή εισροή και δίνεται από τη σχέση:

$$P = -K \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1\right) \tag{5.31}$$

Η εισροή Ρ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P = R - E_a - INT \tag{5.32}$$

όπου:

Αντικατάσταση της (5.31) στην εξίσωση πρόβλεψης (5.17) δίνει τελικά:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}} \end{bmatrix} h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n}\\ (\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}} + 1 \end{bmatrix} h_{j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(P_{j}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.33)

η οποία μπορεί να γραφεί:

$$A_{j}h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + B_{j}h_{j}^{n+\frac{1}{2}} = D_{j}$$
(5.34)

όπου:

$$A_{j} = -\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}$$
(5.35)

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1$$
(5.36)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(P_{j}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.37)

Η εξίσωση διόρθωσης (5.18) δίνει επίσης:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} h_{j+1}^{n+1} + \begin{bmatrix} \Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ (\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}} + 1 \end{bmatrix} h_{j}^{n+1} = \\ = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(-K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{P^{n} - P^{n+1}}{2} \right) + \\ + \frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1} + 1)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j+1}^{n} - h_{j}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$
(5.38)

Η εξίσωση (5.36) μπορεί να γραφεί:

$$A_j h_{j+1}^{n+1} + B_j h_j^{n+1} = D_j$$
(5.39)

όπου:

$$A_{j} = -\frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}$$
(5.40)

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j+1}\right) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + 1$$
(5.41)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(-K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{P^{n} + P^{n+1}}{2} \right) + \Delta t K^{n+\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\Delta t K_{j+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j}+\Delta z_{j+1}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j+1}^{n}-h_{j}^{n}\right)+h_{j}^{n}-\frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.42)

5.2.4.2 Κάτω οριακές συνθήκες

Το πρόγραμμα είναι έτσι γραμμένο έτσι ώστε να δέχεται μία από τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

- 1. Γνωστή υπόγεια στάθμη
- 2. Ελεύθερη στράγγιση
- 3. Μηδενική ροή

1. Γνωστή υπόγεια στάθμη

Όταν ο τελευταίος κόμβος του δικτύου βρίσκεται στο όριο της υπόγειας στάθμης του νερού τότε η τάση στο σημείο αυτό θα τείνει προς το μηδέν αφού το έδαφος θα είναι κορεσμένο.

Έτσι με γνωστή την τιμή της εδαφικής τάσης στον τελευταίο κόμβο Ν, η λύση σταματά στον κόμβο Ν-1. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις πρόβλεψης (5.18) και διόρθωσης (5.24) γράφονται για j = N-1:

$$h_{j}^{M} = F_{j} + G_{j} h_{j+1}^{M}$$
(5.43)

όπου στην εξίσωση πρόβλεψης $M = n + \frac{1}{2}$ ενώ στην εξίσωση διόρθωσης M = n + 1. Οι συντελεστές F_j και G_j εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$F_{j} = \frac{D_{j} - C_{j}F_{j-1}}{B_{j} + C_{j}G_{j-1}}$$
(5.44)

$$G_{j} = \frac{-A_{j}}{B_{j} + C_{j}G_{j-1}}$$
(5.45)

όπου F1 και G1 προσδιορίζονται από την επάνω οριακή συνθήκη.

2. Ελεύθερη στράγγιση

Κατά την ελεύθερη στράγγιση, η ροή στο κάτω όριο q_b ισούται με K(h). Έτσι η εξίσωση πρόβλεψης στο κάτω όριο (j = N) δίνει τελικά:

$$\left[\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}} + 1\right] h_{j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}} h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n}\right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.46)

η οποία μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$B_{j}h_{j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{j}h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = D_{j}$$
(5.47)

όπου:

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j-1/2}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1 \tag{5.48}$$

$$C_{j} = \frac{-\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}$$
(5.49)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.50)

Η εξίσωση (5.47) δίνει:

$$h_{j}^{n+\frac{1}{2}} = F_{j} = \frac{D_{j} - C_{j}F_{j-1}}{B_{j} + C_{j}G_{j-1}}$$
(5.51)

Αντίστοιχα η εξίσωση διόρθωσης δίνει:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + 1 \end{bmatrix} h_{j}^{n+1} - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} h_{j-1}^{n+1} = \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1})\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n} - h_{j-1}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.52)

Η εξίσωση (5.52) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$B_j h_j^{n+1} + C_j h_{j-1}^{n+1} = D_j$$
(5.53)

όπου:

$$B_{j} = \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} + 1$$
(5.54)

$$C_{j} = -\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}$$
(5.55)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) -$$

$$-\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j}+\Delta z_{j-1}\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)+h_{j}^{n}-\frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.56)

Η (5.53) δίνει τελικά:

$$h_j^{n+1} = F_j \tag{5.57}$$

3. Μηδενική ροή

Όταν η ροή είναι μηδενική στο κάτω όριο (j=N) τότε σύμφωνα με το νόμο του Darcy:

$$P = -K \left(\frac{\partial h}{\partial y} - 1\right)_{j=N} = 0$$
(5.58)

οπότε η εξίσωση πρόβλεψης γράφεται τελικά:

$$\left[\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}} + 1\right] h_{j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}}\right] h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n}\right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.59)

Η εξίσωση (5.59) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$B_{j}h_{j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{j}h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} = D_{j}$$
(5.60)

όπου:

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j-1/2}^{n}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1 \tag{5.61}$$

$$C_{j} = -\frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \Delta z_{j} C_{j}^{n}}$$
(5.62)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{2\Delta z_{j} C_{j}^{n}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n} \right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{2C_{j}^{n}} S_{j}^{n}$$
(5.63)

Από την (5.60) προκύπτει ότι:

$$h_j^{n+1/2} = F_j$$
 (5.64)

Επίσης η εξίσωση διόρθωσης γράφεται:

$$\left[\frac{\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1\right] h_{j}^{n+1} + \left[\frac{-\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}\right] h_{j-1}^{n+1} =$$

$$=\frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1} + 1\right)\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n} - h_{j-1}^{n}\right) + h_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.65)

Η (5.65) μπορεί να γραφεί:

$$B_j h_j^{n+1} + C_j h_{j-1}^{n+1} = D_j$$
(5.66)

όπου:

$$B_{j} = \frac{\Delta t \, K_{j-1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z_{j-1} + \Delta z_{j}) \, \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}} + 1$$
(5.67)

$$C_{j} = -\frac{\Delta t \, K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1}) \Delta z_{j} \, C_{j}^{n}}$$
(5.68)

$$D_{j} = \frac{\Delta t}{\Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t K_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta z_{j} + \Delta z_{j-1} + 1 \right) \Delta z_{j} C_{j}^{n+\frac{1}{2}}} \left(h_{j}^{n} - h_{j-1}^{n} \right) +$$

$$+h_{j}^{n}-\frac{\Delta t}{C_{j}^{n+\frac{1}{2}}}S_{j}^{n+\frac{1}{2}}$$
(5.69)

Η (5.66) δίνει τελικά:

$$h_j^{n+1} = F_j$$
 (5.70)

Κεφάλαιο 6. Εφαρμογές – Αποτελέσματα

6.1 Γενικά.

Για να φανούν οι δυνατότητες του συνδυασμού του μοντέλου nearest neighbor και της μεθόδου Monte Carlo, στην περιγραφή της ανομοιογένειας των εδαφών, έγινε εφαρμογή τους με δεδομένα που λήφθηκαν από τη βιβλιογραφία. Τα δεδομένα αυτά αφορούν τέσσερα εδάφη:

- ἐνα αργιλοπηλώδες (clay loam) ἑδαφος στην περιοχή της Σίνδου, στο οποίο είχε γίνει εγκατάσταση καλλιέργειας βαμβακιού (Μπαμπατζιμόπουλος, 1995).
- ἐνα ιλυοαργιλοπηλώδες (silty clay loam) ἐδαφος του οποίου οι υδραυλικές παράμετροι περιγράφονται από τους Deju and Jingwen (1993) και
- δυο αμμοπηλώδη (sandy loam) εδάφη από μελέτες των Kool et al. (1985) και Mallants et al. (1997).

Το κριτήριο επιλογής των τριών αυτών εδαφών ήταν η τάξη μεγέθους της υδραυλικής αγωγιμότητας. Το υδατικό ισοζύγιο των εδαφών αυτών είναι καθαρά υποθετικό: θεωρείται ότι σε κάθε ένα από αυτά αναπτυσσόταν η καλλιέργεια βαμβακιού του εδάφους της Σίνδου, υπό τις ίδιες κλιματικές συνθήκες και την ίδια αρδευτική πρακτική (όπως περιγράφονται από τον Μπαμπατζιμόπουλο, 1995). Τα εδάφη αυτά για λόγους απλοποίησης θεωρήθηκαν μη στρωματωμένα μέχρι του βάθους των 70cm. Η επιλογή του συγκεκριμένου βάθους έγινε γιατί το κυρίως ριζικό σύστημα του βαμβακιού βρίσκεται συνήθως σε βάθος από 40 ως και 60cm.

Στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Richards χρησιμοποιήθηκαν οι εξής οριακές συνθήκες:

 πάνω οριακή συνθήκη: γνωστές εισροές στο πάνω όριο (από τα μετεωρολογικά δεδομένα και τις εφαρμοσθείσες αρδεύσεις), κάτω οριακή συνθήκη: ελεύθερη στράγγιση (στο έδαφος της Σίνδου δεν παρατηρήθηκε αδιαπέρατος ορίζοντας μέχρι του βάθους των 70cm.)

6.2 Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo, στη μελέτη της ροής του νερού στην ακόρεστη ζώνη του εδάφους.

Η εισαγωγή της «στοχαστικότητας» στην παρούσα διατριβή γίνεται με την παραδοχή ότι μόνο η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό μεταβάλλεται μέσα στα όρια της περιοχής. Αν και αναγνωρίζεται ότι αυτό δεν είναι απόλυτα ακριβές, δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι άλλες υδραυλικές παράμετροι του εδάφους μεταβάλλονται σε πολύ στενότερα πλαίσια σε σχέση με την υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό (Nielsen et al., 1973, Smith and Hebbert, 1979). Οι Dagan and Bresler (1983) και Polman et al. (1991) χρησιμοποιούν επίσης την υδραυλική αγωγιμότητα σαν στοχαστική μεταβλητή, θεωρώντας άλλες παραμέτρους όπως η υγρασία κορεσμού θ_s και η υπολειμματική υγρασία θ_r, σαν σταθερές.

Χωρίζοντας την υπό μελέτη περιοχή σε *n* μικρότερες «υποπεριοχές», με γνωστή τιμή υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό σε κάθε μια, θεωρείται πως η συμπεριφορά της περιοχής περιγράφεται από τις επί μέρους συμπεριφορές των υποπεριοχών. Άρα λοιπόν απαιτείται η επίλυση της εξίσωσης Richards για την κάθε μια από αυτές. Κάνοντας δεκτό ότι η υδραυλική αγωγιμότητα ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, μπορεί να εξαχθεί από την κατανομή αυτή (και σε συνδυασμό με το nearest neighbor μοντέλο) ένα πλήθος *n* νέων τιμών και να ξαναγίνουν οι υπολογισμοί της εξίσωσης Richards. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί με άλλες τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας, όσες φορές είναι επιθυμητό, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής του Σχήματος 6.1.

Στη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards που παρουσιάζεται στη διατριβή αυτή, θεωρήθηκε ότι η περιοχή μελέτης έχει τετράγωνο σχήμα και ότι είναι χωρισμένη σε 9 μόνο υποπεριοχές (n=9). Το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo επιλέχθηκε να είναι 10. Έτσι έγιναν 90 εκτελέσεις του μοντέλου S.W.BA.CRO.S.. Οι επιλογές αυτές αν και υπεραπλουστεύουν την στοχαστική ανάλυση μιας ανομοιογενούς περιοχής, έγιναν με μόνο κριτήριο το χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος στον Η/Υ.

Αναφέρεται ότι χρησιμοποιώντας μεταβλητό χρονικό βήμα Δt, που κυμαινόταν από 0.001 min ως 2 min η μια εκτέλεση του μοντέλου S.W.BA.CRO.S. για ολόκληρη την καλλιεργητική περίοδο απαιτούσε από ≈4.5 (Pentium Celeron 300MHz) ως και ≈34 λεπτά (Pentium 100MHz). Έτσι οι 90 εκτελέσεις του προγράμματος απαιτούσαν από ≈7 ώρες ως και ≈51 ώρες.

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, η εφαρμογή του μοντέλου nearest neighbor απαιτεί τον προσδιορισμό της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α και της τυπικής απόκλισης σ των τυχαίων αριθμών. Λόγω έλλειψης πειραματικών δεδομένων υδραυλικής αγωγιμότητας από τα οποία θα μπορούσαν να προσδιοριστούν οι παράμετροι αυτές, επιλέχθηκαν από τη βιβλιογραφία (Chung, 1985) οι τιμές α=0.35 και σ=40% \overline{K}_s αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό η υγρασιακή κατάσταση εκφράζεται στοχαστικά από μια συνάρτηση του τύπου $\theta\left(z, t, \overline{K}_s, a = 0.35, \sigma = 40\% \overline{K}_s\right)$.



Σχήμα 6.1 Διάγραμμα ροής για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo.

6.3 Ανάλυση ευαισθησίας της μεθόδου Monte Carlo.

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 6.2 το υδατικό ισοζύγιο που προκύπτει από τη μέθοδο Monte Carlo είναι του τύπου $\theta\left(z, t, \overline{K_s}, a = 0.35, \sigma = 40\%\overline{K_s}\right)$. Για μια καλλιέργεια

σε ένα ορισμένο έδαφος (ορισμένη \overline{K}_s), οι παράμετροι που μπορούν να επιφέρουν αλλαγές στα στοχαστικά αποτελέσματα είναι η αυτοσυσχετιστική παράμετρος α και η τυπική απόκλιση σ. Οι παράμετροι αυτές όπως είδαμε στην παράγραφο 2.5 πρέπει να εκτιμώνται από πειραματικά δεδομένα αγρού.

Επειδή η επίδραση των παραμέτρων αυτών στα τελικά αποτελέσματα είναι ιδιαίτερης σημασίας, κρίθηκε απαραίτητο να μελετηθεί η ευαισθησία του μοντέλου στις μεταβολές των παραμέτρων αυτών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου (Μπαμπατζιμόπουλος, 1995). Τα πρώτα 60cm του εδάφους αυτού χαρακτηρίζονται από τις εξής υδραυλικές παραμέτρους:

Υγρασία στον κορεσμό, θ _s : 0.434 (cm³cm⁻³)	Παρἁμετρος Van Genuchten, α: 0.011552 (cm ⁻¹)
Υπολειμματική υγρασία, θ _r : 0.049 (cm ³ cm ⁻³)	Παρἁμετρος Van Genuchten, n: 1.13528
Υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό K _s : 0.2855	(m·day ⁻¹)

Πίνακας 6.1 Υδραυλικές παράμετροι του εδάφους της Σίνδου

6.3.1 Ανάλυση ευαισθησίας της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α.

Η αυτοσυσχετιστική παράμετρος α έλαβε τις τιμές 0.15, 0.35, 0.55, 0.75 και 1.00. Έτσι μελετήθηκαν τα υδατικά ισοζύγια:

$$\theta\left(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, 0.15 \le a \le 1.00, \sigma = 40\%\overline{K_s}\right)$$

Ακολουθώντας τις αρχές τις παραγράφου 6.2 επιλύθηκε επαναληπτικά η εξίσωση Richards. Στα αποτελέσματα ελέγχθηκαν – σαν δείκτες διαφοροποίησης της στοχαστικής από τη ντετερμινιστική λύση – για τα διάφορα υδατικά ισοζύγια τρεις παράμετροι:

Το εύρος μέσα στο οποίο κυμαίνονται οι τιμές της υγρασίας των δυο προσεγγίσεων

Η παράμετρος αυτή υπολογίστηκε επειδή το μέγεθος του εύρους επηρεάζει την αρδευτική πρακτική

Η μέση διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο προσεγγίσεων

Αν η ντετερμινιστική προσέγγιση συμβολιστεί με $\hat{\theta}(z,t,K_s)$ και αν θεωρηθεί ότι η στοχαστική επίλυση προσεγγίζει καλύτερα τη φυσική πραγματικότητα, τότε το μέγεθος της διαφοράς της ντετερμινιστικής από τη στοχαστική προσέγγιση:

$$\theta\left(z,t,\overline{K_{s}},a,\sigma\right)-\widehat{\theta}\left(z,t,K_{s}\right)$$

θα δηλώνει και το μέγεθος της υπεροχής της στοχαστικής προσέγγισης έναντι της (μέχρι τώρα συνηθέστερης) ντετερμινιστικής περιγραφής του υδατικού ισοζυγίου.

Η διαφορά της στοχαστικής επίλυσης για τις ακραίες αυτοσυσχετιστικές τιμές: 1.00 και 0.15.

Η διαφορά αυτή θα δείξει το πόσο επηρεάζει τη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards η λανθασμένη εκλογή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου.

Οι τρεις αυτοί δείκτες διαφοροποίησης χρησιμοποιήθηκαν, για λόγους παρουσίασης, μόνο σε τρία βάθη: 12.5cm, 32.5cm και 42.5cm, ενώ τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 6.2:

		12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
	Μἑγιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0157	0.0197	0.0402
	Μἑση διαφορἁ (cm³⋅cm⁻³)	0.0065	0.0065	0.0077
a=0.15	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm-³)	0.0003	0.0001	0.0009
	Τυπική απόκλιση (cm³.cm⁻³)	0.0037	0.0037	0.0055
	Εὑρος (cm³·cm⁻³)	0.2006 (≈104%) [*]	0.1961 (≈104%) [*]	0.2191 (≈116%) [*]
	Μἑγιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0160	0.0192	0.0400
	Μἑση διαφορἁ (cm³⋅cm⁻³)	0.0066	0.0065	0.0076
a=0.35	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm-³)	0.0004	0.0001	0.0009
	Τυπικἡ απὀκλιση (cm³.cm⁻³)	0.0038	0.0038	0.0054
	Εὑρος (cm³⋅cm⁻³)	0.2009 (≈104%) [*]	0.1952 (≈104%) [*]	0.2188 (≈117%) [*]
	Μέγιστη διαφορά (cm ³ ·cm ⁻³)	0.0168	0.0195	0.0524
	Μἑση διαφορἁ (cm³.cm³)	0.0069	0.0067	0.0078
a=0.55	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm-³)	0.0005	0.0001	0.0010
	Τυπικἡ απὀκλιση (cm³.cm⁻³)	0.0039	0.0039	0.0057
	Εὑρος (cm³·cm⁻³)	0.2014 (≈104%) [*]	0.1952 (≈104%) [*]	0.2184 (≈116%) [*]
	Μέγιστη διαφορά (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.0192	0.0214	0.0710
	Μἑση διαφορἁ (cm³⋅cm⁻³)	0.0074	0.0072	0.0084
a=0.75	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0007	0.0001	0.0011
	Τυπική απόκλιση (cm³⋅cm⁻³)	0.0042	0.0041	0.0067
	Εὑρος (cm³·cm⁻³)	0.2025 (≈105%) [*]	0.1957 (≈104%) [*]	0.2280 (≈121%) [*]
	Μέγιστη διαφορά (cm ³ ·cm ⁻³)	0.0272	0.0335	0.0974
	Μἑση διαφορἁ (cm³⋅cm⁻³)	0.0093	0.0090	0.0114
a=1.00	Ελάχιστη διαφορά (cm³.cm-³)	0.0012	0.0004	0.0017
	Τυπική απόκλιση (cm³.cm⁻³)	0.0051	0.0050	0.0102
	Εὑρος (cm³·cm⁻³)	0.2057 (≈107%) [*]	0.1996 (≈106%) [*]	0.2500 (≈133%) [*]
Εύρος ντετ	ερμινιστικἡς προσἑγγισης (cm³⋅cm³)	0.1931 (100%)	0.1883 (100%)	0.1878 (100%)
Μέγιστη δι	афора̀ a=1.00 ка। a=0.15, (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.0122	0.0201	0.0604
Μἑση διαφ	ора̀ a=1.00 ка। a=0.15, (ст ^{3.} ст ⁻³)	0.0029	0.0025	0.0036
Ελἁχιστη δ	ιаφорἀ a=1.00 каι a=0.15, (cm³·cm⁻³)	0.0004	0.0003	0.0003

* Ως 100% θεωρείται το εύρος της ντετερμινιστικής προσέγγισης.

Πίνακας 6.2 Στατιστικά στοιχεία για διάφορες τιμές της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου.

Στο Σχήμα 6.2 пароυσιάζεται η σύγκριση στοχαστικής – ντετερμινιστικής λύσης για τα τρία βάθη. Με τη μαύρη γραμμή απεικονίζεται η ντετερμινιστική λύση, με την κόκκινη γραμμή απεικονίζονται τα 95% όρια εμπιστοσύνης της στοχαστικής λύσης: $θ(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, a = 0.15, \sigma = 40\%\overline{K_s})$, ενώ με τη μπλε γραμμή τα 95% όρια εμπιστοσύνης της στοχαστικής λύσης: $θ(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, \alpha = 1.00, \sigma = 40\%\overline{K_s})$. Σε ορισμένες χρονικές στιγμές οι τιμές του άνω ορίου εμπιστοσύνης ήταν μεγαλύτερες από τον κορεσμό. Επειδή τέτοιες τιμές δεν έχουν φυσική σημασία δεν παρουσιάζονται αν και λαμβάνονται υπόψη στη στατιστική επεξεργασία. Τέλος, στο Σχήμα 6.2 για λόγους ευκρίνειας, δεν έγινε η παρουσίαση των στοχαστικών λύσεων για α=0.35, α=0.55 και α=0.75.



Βάθος 32.5 cm





Βάθος 42.5 cm

Σχήμα 6.2 Παρουσίαση της ντετερμινιστικής λύσης (K_s=0.2855m/day) και των στοχαστικών λύσεων για α=0.15 και α=1, στο έδαφος της Σίνδου

Από τον Πίνακα 6.2 μπορούν ευχερώς* να βγουν τα εξής συμπεράσματα:

- 1. με την αύξηση του μεγέθους της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου, αυξάνει η διαφοροποίηση της ντετερμινιστικής λύσης από τη στοχαστική (φυσική πραγματικότητα). Κατά την παρατήρηση των σχημάτων, αυτό γίνεται φανερό καθώς τα 95% όρια εμπιστοσύνης για τη λύση $\theta(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, \alpha = 1.00, \sigma = 40\%\overline{K_s})$ εμπεριέχουν τα 95% όρια εμπιστοσύνης για τη λύση $\theta(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, \alpha = 0.15, \sigma = 40\%\overline{K_s})$.
- η μέση διαφορά ντετερμινιστικής στοχαστικής λύσης κυμαίνεται από ένα ελάχιστο 0.0065 cm³·cm⁻³ ως ένα μέγιστο 0.0114 cm³·cm⁻³. Η τάξη αυτή μεγέθους φαίνεται πως δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντική, όταν επιχειρείται προγραμματισμός των αρδεύσεων μιας περιοχής.
- 3. οι διαφορές μεταξύ των ακραίων επιλογών αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου είναι μικρές. Έτσι, η μέση διαφορά μεταξύ των τιμών α=0.15 και a=1.00 είναι 0.0029 cm³·cm⁻³ στα 12.5cm, 0.0025 cm³·cm⁻³ στα 32.5 cm και 0.0036 cm³·cm⁻³ στα 42.5 cm. Συνεπώς ο ακριβής προσδιορισμός της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου δεν φαίνεται να είναι καθοριστικός παράγοντας για τη στοχαστική μελέτη του υδατικού ισοζυγίου του εδάφους.
- 4. αυξανομένου του βάθους, η στοχαστική λύση τείνει να απομακρύνεται από την ντετερμινιστική και να παράγει τιμές υγρασίας που βρίσκονται μεταξύ συνεχώς ευρύτερων ορίων. Παράγοντες, όπως η πρόσληψη νερού από τα φυτά και η εξάτμιση, οι οποίοι μειώνουν το υγρασιακό περιεχόμενο του εδάφους στα πρώτα εκατοστά του, αποτελούν πιθανή ερμηνεία αυτής της παρατήρησης.

6.3.2 Ανάλυση ευαισθησίας της τυπικής απόκλισης σ.

Για τη μελέτη της επίδρασης της τυπικής απόκλισης στα τελικά αποτελέσματα, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με την παράγραφο 6.3.1 με τη διαφορά ότι η παράμετρος που μεταβαλλόταν εδώ ήταν η τυπική απόκλιση, ενώ η αυτοσυσχετιστική παράμετρος α είχε σταθερή τιμή (α=0.35). Η τυπική απόκλιση σ έλαβε τις τιμές 20% $\overline{K_s}$, 30% $\overline{K_s}$, 40% $\overline{K_s}$, 50% $\overline{K_s}$ και 60% $\overline{K_s}$. Έτσι μελετήθηκαν οι υγρασιακές καταστάσεις:

$$\theta\left(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, a = 0.35, 20\%\overline{K_s} \le \sigma \le 60\%\overline{K_s}\right)$$

^{*} με την επιφύλαξη όμως του μικρού αριθμού υποπεριοχών και επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας που αφορούν τη μεταβολή του εύρους των τιμών της υγρασίας, για τις διάφορες μεταβολές της τυπικής απόκλισης φαίνονται στον Πίνακα 6.3:

		12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
	Μἑγιστη διαφορά (cm³.cm-³)	0.0084	0.0079	0.0098
	Μἑση διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0034	0.0035	0.0038
σ=20%	Ελάχιστη διαφορά (cm³.cm-³)	0.0001	<0.0001	0.0003
	Τυπική απόκλιση (cm³·cm⁻³)	0.0021	0.0021	0.0021
	Eὑρος (cm³·cm⁻³)	0.1961 (≈102%) [*]	0.1909 (≈101%) [*]	0.1904 (≈101%) [*]
	Μέγιστη διαφορά (cm ³ .cm ⁻³)	0.0125	0.0122	0.0259
	Μἑση διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0050	0.0051	0.0056
σ=30%	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0002	<0.0001	0.0005
	Τυπική απὀκλιση (cm³⋅cm⁻³)	0.0030	0.0030	0.0033
	Eὑρος (cm³·cm⁻³)	0.1986 (≈103%) [*]	0.1929 (≈102%) [*]	0.1977 (≈105%) [*]
	Μἑγιστη διαφορά (cm³.cm⁻³)	0.0160	0.0192	0.0400
	Μἑση διαφορἁ (cm³.cm³)	0.0066	0.0065	0.0076
σ=40%	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0004	0.0001	0.0009
	Τυπική απὀκλιση (cm³⋅cm⁻³)	0.0038	0.0038	0.0054
	Eὑρος (cm³·cm⁻³)	0.2009 (≈104%) [*]	0.1952 (≈104%) [*]	0.2188 (≈117%) [*]
	Μἑγιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0236	0.0423	0.0877
	Μἑση διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0080	0.0084	0.0166
σ=50%	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0006	0.0001	0.0013
	Τυπική απόκλιση (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.0045	0.0057	0.0100
	Εὐρος (cm³·cm⁻³)	0.2028 (≈105%) [*]	0.2243 (≈119%) [*]	0.2387 (≈127%) [*]
	Μἑγιστη διαφορά (cm³.cm⁻³)	0.0321	0.0483	0.1123
	Μἑση διαφορἁ (cm³·cm³)	0.0092	0.0113	0.0152
σ=60%	Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³.cm³)	0.0007	0.0002	0.0016
	Τυπική απόκλιση (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.0053	0.0082	0.0142
	Εὐρος (cm³·cm⁻³)	0.2050 (≈106%) [*]	0.2273 (≈121%) [*]	0.2612 (≈139%) [*]
Εύρος ντετ	ερμινιστικής προσἑγγισης (cm³.cm⁻³)	0.1931 (100%)	0.1883 (100%)	0.1878 (100%)
Μἑγιστη δια	ιφορἁ σ=60% και σ=20%, (cm³·cm⁻³)	0.0266	0.0442	0.1037
Μέση διαφο	ορἀ σ=60% και σ=20%, (cm³·cm⁻³)	0.0058	0.0078	0.0114
Ελάχιστη δι	αφορά σ=60% και σ=20%, (cm³⋅cm⁻³)	0.0005	0.0002	0.0013

* Ως 100% θεωρείται το εύρος της ντετερμινιστικής προσέγγισης.

Πίνακας 6.3 Στατιστικά στοιχεία για διάφορες τιμές της τυπικής απόκλισης.

Στο Σχήμα 6.3 пароυσιάζεται η σύγκριση στοχαστικής – ντετερμινιστικής λύσης για τα τρία βάθη. Στο σχήμα αυτό, με μαύρη γραμμή απεικονίζεται η ντετερμινιστική λύση, με κόκκινη γραμμή τα 95% όρια εμπιστοσύνης της στοχαστικής λύσης: $\theta\left(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, a = 0.35, \sigma = 20\%\overline{K_s}\right)$, ενώ με μπλε γραμμή τα 95% όρια εμπιστοσύνης της στοχαστικής λύσης: $\theta\left(z, t, \overline{K_s} = 0.2855, \alpha = 0.35, \sigma = 60\%\overline{K_s}\right)$. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 6.3.1 όσες τιμές του άνω ορίου εμπιστοσύνης ήταν μεγαλύτερες από τον κορεσμό επειδή δεν έχουν φυσική υπόσταση δεν παρουσιάζονται αλλά λαμβάνονται υπόψη στη στατιστική επεξεργασία. Η παρουσίαση των στοχαστικών λύσεων για σ=30%, σ=40% και σ=50% δεν έγινε για λόγους ευκρίνειας του σχήματος.

Βάθος 12.5 cm



------ $K_s = 0.2855 \text{ m/day}$ SD = 20% K_s SD = 60% K_s



Βάθος 42.5 cm



Σχήμα 6.3 Παρουσίαση της ντετερμινιστικής λύσης (K_s=0.2855m/day) και των στοχαστικών λύσεων για σ=20% και σ=60%, στο έδαφος της Σίνδου

Από τον Πίνακα 6.3 γίνεται φανερό πως αύξηση της τυπικής απόκλισης των τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό απομακρύνει τη στοχαστική λύση από τη ντετερμινιστική. Η παρατήρηση αυτή είναι απόλυτα αναμενόμενη εφόσον αύξηση της τυπικής απόκλισης σημαίνει απομάκρυνση των τιμών από τη μέση τιμή ενός δείγματος.

Όπως και στην ανάλυση ευαισθησίας της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου, παρατηρείται και εδώ αύξηση της διαφοράς ντετερμινιστικής και στοχαστικής λύσης με το βάθος. Η εξήγηση που υιοθετείται είναι ίδια με την περίπτωση της παραγράφου 6.3.1.

Εξετάζοντας τους Πίνακες 6.2 και 6.3 παρατηρείται πως η επίδραση που έχει η μεταβολή της τυπικής απόκλισης στη στοχαστική προσέγγιση είναι σημαντικότερη από την επίδραση που έχει η μεταβολή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου. Πιο συγκεκριμένα η μεταβολή της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου από 0.15 σε 1.00 επιφέρει μέσες διαφορές 0.0029, 0.0025, 0.0036 cm³·cm⁻³ για τα τρία βάθη, ενώ η μεταβολή της τυπικής απόκλισης από 20%K_s σε 60%K_s δίνει αντίστοιχα 0.0058, 0.0078, 0.0114 cm³·cm⁻³. Για τη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards λοιπόν, ιδιαίτερο βάρος πρέπει να δίνεται στον ακριβή προσδιορισμό της κατανομής που ακολουθεί η υδραυλική παράμετρος που θεωρείται στοχαστική, στο χώρο.

6.4 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αργιλοπηλώδες έδαφος.

Η πρώτη εφαρμογή αναφέρεται στην κίνηση του νερού σε ένα αργιλοπηλώδες έδαφος. Τα πειραματικά δεδομένα προέρχονται από μελέτη του υδατικού ισοζυγίου του εδάφους σε έναν αγρό της περιοχής Σίνδου, που καταλαμβάνεται από βαμβάκι ποικιλίας Ουρανία (Μπαμπατζιμόπουλος, 1995).

Η έκταση του πειραματικού αγρού ήταν πέντε στρέμματα. Από εδαφοτρήσεις που έγιναν, το έδαφος αυτό φάνηκε ότι είχε τρεις διακεκριμένους ορίζοντες: 0–60cm, 60–100cm και 100–140cm. Επειδή η στοχαστική μελέτη στη διατριβή αυτή περιορίζεται στα 70 πρώτα εκατοστά του εδάφους αυτού, θεωρήθηκε ότι η χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας (XKY) τους μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση Van Genuchten που χαρακτηρίζει τον ορίζοντα 0–60 cm. Μετά από τον προσδιορισμό των παραμέτρων με μη γραμμική συσχέτιση, η εξίσωση van Genuchten παίρνει τη μορφή:

$$\theta(h) = 0.049 + \frac{0.434 - 0.049}{\left[1 + (0.011552h)^{1.13528}\right]^{0.11916}} \quad h \to [\text{cm}]$$
(6.1)

Γραφικά η ΧΚΥ του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου, παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.4. Για τον ίδιο ορίζοντα η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό K_s μετρήθηκε με περατόμετρο Guelph και βρέθηκε να είναι ίση με 0.2855 m/day. Για τη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards, η τιμή αυτή θεωρήθηκε ότι είναι η μέση τιμή των τιμών υδραυλικής αγωγιμότητας αυτού του εδάφους. Έτσι αφού χωρίστηκε ο αγρός σε υποπεριοχές, με τη βοήθεια του μοντέλου nearest neighbor, δημιουργήθηκαν τυχαίες τιμές που ακολουθούσαν τη λογαριθμοκανονική κατανομή: LN(μ=0.2855 m/day, σ=40% $\overline{K_s}$ =0.1142 m/day).



Σχήμα 6.4 Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου.

Υπό τις κλιματικές και αρδευτικές συνθήκες που περιγράφει ο Μπαμπατζιμόπουλος (1995) και με τη βοήθεια του μοντέλου S.W.BA.CRO.S. επιλύθηκε η εξίσωση Richards. Από τη στατιστική επεξεργασία που ακολούθησε προέκυψαν τα όρια εκείνα μέσα στα οποία βρίσκεται με πιθανότητα 95% η διακύμανση της υγρασίας του αγρού. Τα 95% όρια εμπιστοσύνης (κόκκινη γραμμή) και η σύγκριση της στοχαστικής – ντετερμινιστικής λύσης φαίνονται στο Σχήμα 6.5:





——— K_s = 0.2855 m/day ——— 95% όρια εμπιστοσύνης

Βάθος 32.5 cm





Ημέρες

Σχήμα 6.5 Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40%K_s) του υγρασιακού περιεχομένου του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου και σύγκρισή της με τη ντετερμινιστική διακύμανση.

Πέρα από τα όρια εμπιστοσύνης η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδωσε επιπλέον τα στοιχεία του Πίνακα 6.4:

	12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
Μἑγιστη διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0160	0.0192	0.0400
Μἑση διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	0.0066	0.0065	0.0076
Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0004	0.0001	0.0009
Τυπική απόκλιση διαφορών (cm³·cm⁻³)	0.0038	0.0038	0.0054
Εύρος στοχαστικής λύσης (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.2009 (≈104%)	0.1952 (≈104%)	0.2188 (≈117%)
Εύρος ντετερμινιστικής λύσης (cm³.cm³)	0.1931	0.1883	0.1878

Πίνακας 6.4 Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του αργιλοπηλώδους εδάφους της Σίνδου.

6.5 Μελέτη της ανομοιογένειας στο ιλυοαργιλοπηλώδες έδαφος.

Σκοπός αυτής της εφαρμογής είναι να μελετηθεί η κίνηση του νερού σε ένα ιλυοαργιλοπηλώδες έδαφος. Τα δεδομένα για την εφαρμογή πάρθηκαν από τους Deju and Jingwen (1993), οι οποίοι μελέτησαν την αποδοτικότητα κατανάλωσης του νερού από καλλιέργειες σιταριού και καλαμποκιού σε εδάφη της πεδιάδας Huang Huai Hai στην Kiva. Σκοπός τους ήταν η βέλτιστη διαχείριση του αρδευτικού νερού καθώς οι πολύ μικρές κλίσεις του εδάφους, η έλλειψη στραγγιστικού δικτύου, η άρδευση και οι κλιματικές συνθήκες κάνουν ορατό τον κίνδυνο της αλάτωσης των εδαφών της μεγαλύτερης (έκταση 320000 km²) και πιο παραγωγικής γεωργικής περιοχής στην Kiva.

Τα πειράματα διεξήχθησαν σε πειραματικό αγρό του Beijing Agricultural University στην επαρχία Quzhou. Ο πειραματικός αγρός (36° 46' B και 114° 57' A) βρισκόταν 34.9 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας και είχε κλίση 0.0007 m/m. Από την ανάλυση μηχανικής σύστασης του εδάφους προέκυψαν οι παρακάτω ιδιότητες:

Βάθος	Ф.Е.В.	θ_{s}	% Ката	νομή μεγέθο	υς (μm) εδα	ιφικών τει	ιαχιδίων	Ταξινόμηση
(cm)	(g cm ⁻³)	(cm ³ cm ⁻³)	≥ 2000	250 – 2000	50 – 250	2 – 50	< 2	
0–120	1.42	0.43	0.00	0.17	15.27	70.44	14.12	SL
120–200	1.41	0.47	0.00	0.12	9.60	51.03	39.25	SiCL

Πίνακας 6.5 Μηχανική ανάλυση του πειραματικού αγρού των Deju and Jingwen (1993).

Για την περιγραφή της Χ.Κ.Υ. του εδάφους χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση Van Genuchten, της οποίας οι παράμετροι α, n, θ_r, και m εκτιμήθηκαν χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα RET.C. του Van Genuchten. Οι τιμές τους παρατίθενται στον Πίνακα 6.6:

Βάθος (cm)	a (cm⁻¹)	n	θ _r	m
0 - 120	0.0104	1.6064	0.106	0.3775
120 – 200	0.0014	1.4008	0.185	0.2861

Πίνακας 6.6 Παράμετροι της εξίσωσης van Genuchten του πειραματικού αγρού των Deju and Jingwen (1993).

Για τη μελέτη της ανομοιογένειας στην εφαρμογή αυτή, χρησιμοποιήθηκε το έδαφος του ορίζοντα 120 – 200 cm το οποίο όπως φάνηκε στον Πίνακα 6.5, ταξινομήθηκε ως ιλυοαργιλοπηλώδες. Σύμφωνα με τους συγγραφείς η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό του εδάφους παίρνει τιμές κοντά στα 0.1 m/day μέχρι του βάθος των 3.5m, στο οποίο βρέθηκε αργιλικός ορίζοντας πολύ μικρής υδραυλικής αγωγιμότητας. Συνεπώς για τη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards, η περιοχή χωρίστηκε σε υποπεριοχές στις οποίες ορίστηκαν τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό που ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή LN(μ=0.1 m/day, σ=40% $\overline{K_s}$ = 0.04 m/day).

Υποθέτοντας ότι η καλλιέργεια βαμβακιού αναπτυσσόταν σ' αυτόν τον τύπο εδάφους υπό τις κλιματικές συνθήκες και την αρδευτική πρακτική που περιέγραψε ο Μπαμπατζιμόπουλος (1995) επιλύθηκε στοχαστικά η εξίσωση Richards. Για τα τρία βάθη 12.5, 32.5 και 42.5cm το υδατικό ισοζύγιο παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 6.6:







Βάθος 42.5 cm

Σχήμα 6.6 Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40%K_s) του υγρασιακού περιεχομένου του ιλυοαργιλοπηλώδους εδάφους και σύγκρισή της με τη ντετερμινιστική διακύμανση

	12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
Μἑγιστη διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0203	0.0241	0.0192
Μἑση διαφορά (cm³.cm⁻³)	0.0063	0.0072	0.0074
Ελάχιστη διαφορά (cm ^{3.} cm ⁻³)	0.0006	0.0011	0.0002
Τυπική απόκλιση διαφορών (cm³·cm⁻³)	0.0044	0.0038	0.0036
Εύρος στοχαστικής λύσης (cm³.cm⁻³)	0.2179 (≈105%)	0.2083 (≈108%)	0.1863 (≈99%)
Εὑρος ντετερμινιστικἠς λὑσης (cm³.cm⁻³)	0.2067	0.1926	0.1889

Από τα αποτελέσματα και μετά από στατιστική επεξεργασία προέκυψε ο Πίνακας 6.7:

Πίνακας 6.7 Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του ιλυοαργιλοπηλώδους εδάφους των Deju and Jingwen (1993).

6.6 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αμμοπηλώδες έδαφος των Kool et al. (1985).

Οι Kool et al. (1985) θεωρώντας ότι η σχέσεις θ(h) και K(h) περιγράφονται από τις γνωστές συναρτήσεις Van Genuchten (εξισώσεις 5.14 & 5.15 – Κεφάλαιο 5) διερεύνησαν την πιθανότητα του ταυτόχρονου προσδιορισμού των σχέσεων αυτών από μετρήσεις της αθροιστικής εκροής του νερού με το χρόνο (cumulative outflow measurements) από αρχικά κορεσμένα δείγματα εδάφους. Σύμφωνα με το σκεπτικό των συγγραφέων αν σε ένα κορεσμένο δείγμα εδάφους που βρίσκεται πάνω σε μια κεραμική πλάκα, ασκηθεί στιγμιαία πίεση τότε η σχέση της αθροιστικής εκροής του νερού με το χρόνο θα είναι:

$$Q(t) = A \int_0^L \left[\theta(x,0) - \theta(x,t) \right] dx$$
(6.2)

όπου Α είναι η κάθετη στην εκροή του νερού επιφάνεια του δείγματος και θ η περιεχόμενη υγρασία του δείγματος. Καταγράφοντας την αθροιστική εκροή νερού με το χρόνο, το πρόβλημα του ταυτόχρονου προσδιορισμού των σχέσεων θ(h) και K(h), γίνεται πρόβλημα προσδιορισμού των παραμέτρων θ_r, α και η που θα ικανοποιούν τη σχέση (6.2). Πειραματικά οι Kool et al. (1985) χρησιμοποίησαν δυο εδάφη:

Εδάφη	θ_{s}	θ _r	Ks	a	n
	m ³	m⁻³	- m sec ⁻¹	m⁻¹	
αμμοπηλώδες	0.47	0.17	$8.7\times10^{\text{-6}}$	1.00	2.00
αργιλοπηλώδες	0.45	0.24	$6.9\times10^{\text{-9}}$	0.67	1.395

Πίνακας 6.8 Υδραυλικές παράμετροι των δυο εδαφών των Kool et al. (1985).

Από τα δυο εδάφη επιλέχθηκε για την εφαρμογή αυτή το αμμοπηλώδες έδαφος, του οποίου η Χ.Κ.Υ. παρατίθεται στο Σχήμα 6.7:



Σχήμα 6.7 Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et al. (1985).

Οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας που δημιουργήθηκαν ακολουθούσαν την λογαριθμοκανονική κατανομή LN(μ=0.75168m/day, σ=40% $\overline{K_s}$ =0.300672m/day). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στο Σχήμα 6.8:







Σχήμα 6.8 Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40%K_s) του υγρασιακού περιεχομένου του αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et al., 1985 και σύγκρισή της με τη ντετερμινιστική διακύμανση.

	12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
Μἑγιστη διαφορά (cm³·cm³)	0.0381	0.0335	0.0742
Μἑση διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0106	0.0116	0.0123
Ελἀχιστη διαφορἁ (cm³.cm⁻³)	<0.0001	<0.0001	< 0.0001
Τυπική απόκλιση διαφορών (cm³·cm⁻³)	0.0075	0.0073	0.0090
Εύρος στοχαστικής λύσης (cm³·cm⁻³)	0.2315 (≈118%)	0.2142 (≈118%)	0.2127 (≈125%)
Εὑρος ντετερμινιστικής λὑσης (cm³·cm⁻³)	0.1964	0.1817	0.1706

Η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδωσε τα στοιχεία του Πίνακα 6.9:

Πίνακας 6.9 Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του αμμοπηλώδους εδάφους των Kool et al. (1985).

6.7 Μελέτη της ανομοιογένειας στο αμμοπηλώδες έδαφος των Mallants et al. (1997).

Οι Mallants et al. (1997) διερεύνησαν την καταλληλότητα των σύνθετων συναρτήσεων (multimodal retention functions) van Genuchten για την περιγραφή της χαρακτηριστικής καμπύλης υγρασίας ενός μη ομογενούς εδάφους. Τα δεδομένα τους προήλθαν από δειγματοληψίες κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής 31m, σε ένα πειραματικό αγρό στο Bekkenvoort ανατολικά της πόλης Leuven του Βελγίου. Στο έδαφος αυτό που ταξινομήθηκε σαν ένα καλώς αποστραγγιζόμενο αμμοπηλώδες έδαφος (Udifluvent ή Eutric Regosol) αναγνωρίστηκαν 3 ορίζοντες: ο Ap (0–25cm), ο C1 (25–55cm) και ο C2 (55–100cm).

Από κάποιο δείγμα του ορίζοντα Αρ οι συγγραφείς προσδιόρισαν τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων της εξίσωσης Van Genuchten:

θ _s	θ _r	a	n
$(cm^3 cm^{-3})$	(cm ³ cm ⁻³)	(cm ⁻¹)	
0.3809	0.0577	0.0055	1.9279

Πίνακας 6.10 Παράμετροι της συνάρτησης Van Genuchten για το αμμοπηλώδες έδαφος των Mallants et al. (1997).

η οποία θα δίνεται συνεπώς από τη σχέση:

$$\theta(h) = 0.0577 + \frac{0.3809 - 0.0577}{\left[1 + (0.0055h)^{1.9279}\right]^{0.4813}} \qquad h \to [\text{cm}]$$
(6.3)

και της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Σχήμα 6.9 Χαρακτηριστική καμπύλη υγρασίας του αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants et al. (1997).

Για το έδαφος αυτό βρέθηκε ότι η υδραυλική αγωγιμότητα στον κορεσμό έχει την τιμή 1.488 m/day και συνεπώς για τη στοχαστική επίλυση της εξίσωσης Richards δημιουργήθηκαν τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας που ανήκουν στην λογαριθμοκανονική κατανομή LN(μ=1.488 m/day, σ=40% $\overline{K_s}$ =0.5952 m/day). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στο Σχήμα 6.10:

Βάθος 12.5 cm



Βάθος 32.5 cm







Σχήμα 6.10 Στοχαστική διακύμανση (α=0.35, σ=40%K_s) του υγρασιακού περιεχομένου του αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants et al. (1997) και σύγκρισή της με τη ντετερμινιστική διακύμανση. Από τη στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων προἑκυψαν τα στοιχεία του Πίνακα 6.11:

	12.5 cm	32.5 cm	42.5 cm
Μἑγιστη διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	0.0275	0.0767	0.0260
Μἑση διαφορά (cm³·cm⁻³)	0.0107	0.0117	0.0113
Ελἁχιστη διαφορἁ (cm³·cm⁻³)	<0.0001	< 0.0001	<0.0001
Τυπική απόκλιση διαφορών (cm³⋅cm⁻³)	0.0071	0.0087	0.0070
Εύρος στοχαστικής λύσης (cm³.cm⁻³)	0.2027 (≈116%)	0.2075 (≈125%)	0.1925 (≈118%)
Εὑρος ντετερμινιστικής λὑσης (cm³·cm⁻³)	0.1752	0.1658	0.1629

Πίνακας 6.11 Στατιστικά στοιχεία της στοχαστικής προσέγγισης για το υδατικό ισοζύγιο του αμμοπηλώδους εδάφους των Mallants et al. (1997).

Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα

Η μεταβλητότητα των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ένα έδαφος στο χώρο, είναι γεγονός αδιαμφισβήτητο. Αν και γνωστό εδώ και δεκαετίες, το φαινόμενο αυτό «αγνοήθηκε» από πολλούς ερευνητές στην προσπάθεια περιγραφής των φυσικών διεργασιών. Όμως μαζί με την ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών, ήρθαν και οι πρώτες σοβαρές προσπάθειες περιγραφής και κατανόησής του.

Κατά καιρούς διάφορες μεθοδολογίες προτάθηκαν και δυο από αυτές παρουσιάζονται σε συνδυασμό μεταξύ τους στην παρούσα διατριβή: η μέθοδος Monte Carlo σε συνδυασμό με το μοντέλο nearest neighbor.

Στόχος της διατριβής αυτής δεν ήταν να προταθεί ένα υπέρ – εργαλείο που λύνει μονομιάς το πρόβλημα της χωρικής μεταβλητότητας. Αντίθετα η μεθοδολογία που περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια σκοπό είχε να προσεγγίσει μόνο μια από τις πλευρές ενός πολύπλευρου θέματος. Έτσι λοιπόν έγινε προσπάθεια κατανόησης των βασικών θεωρητικών αρχών αντιμετώπισής του και δοκιμαστική εφαρμογή τους σε δεδομένα της βιβλιογραφίας.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια αυτής της διατριβής μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω:

Η πρακτική της παραδοχής μιας ενδεικτικής τιμής κάποιας υδραυλικής παραμέτρου σε μια περιοχή είναι παρακινδυνευμένη ακόμη και αν πρόκειται για περιοχές με επιφάνεια της τάξης ενός πειραματικού αγρού. Η εισαγωγή της ενδεικτικής αυτής τιμής σε κάποιο μοντέλο περιγραφής ενός φαινομένου, μπορεί να δώσει αποτελέσματα αρκετά μακριά από την πραγματικότητα. Έχει όμως αποδειχθεί ότι οι υδραυλικές παράμετροι μεταβάλλονται τόσο περισσότερο, όσο πιο ανομοιογενής και μεγαλύτερη σε έκταση είναι η μελετούμενη περιοχή. Είναι λοιπόν φανερό πως η στοχαστική προσέγγιση δίνει σαφώς πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Για τη στοχαστική προσέγγιση απαραίτητη είναι η αναπαράσταση με κάποιο τρόπο της χωρικής μεταβλητότητας μιας υδραυλικής παραμέτρου. Στο σημείο αυτό το μοντέλο nearest neighbor πλεονεκτεί της θεώρησης ότι η παράμετρος ακολουθεί απλά μια κατανομή, αφού λαμβάνει υπόψη και τις αλληλοεξαρτήσεις μεταξύ των τιμών της κατανομής. Για την αποτελεσματικότερη εφαρμογή του μοντέλου nearest neighbor απαιτείται ο κατά το δυνατόν λεπτομερέστερος διαμερισμός της περιοχής μελέτης σε υποπεριοχές. Με το λεπτομερή διαχωρισμό πρώτον προσεγγίζονται πιστότερα προς τη φυσική πραγματικότητα οι μεταβολές της υδραυλικής παραμέτρου στο χώρο και δεύτερον μειώνεται σημαντικά το ποσοστό των υποπεριοχών που επηρεάζονται από το πρόβλημα των οριακών υποπεριοχών. Για την κατανόηση του προβλήματος αυτού απαιτείται η σύγκριση των διαφόρων προτάσεων αντιμετώπισης.

Ο λεπτομερής διαχωρισμός της περιοχής όμως πρέπει να συνδυαστεί με μετρήσεις πεδίου σε κάθε μια από τις υποπεριοχές. Από τις μετρήσεις και μετά από στατιστική επεξεργασία θα προσδιοριστούν: η αυτοσυσχετιστική παράμετρος α, η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ. Η επίδραση του μεγέθους των υποπεριοχών στον ακριβή προσδιορισμό των τριών αυτών παραμέτρων πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Επίσης αντικείμενο μελέτης μπορεί να αποτελέσει η ίδια η αυτοσυσχετιστική παράμετρος: η σύγκριση της επιλογής μιας κοινής για κάθε κατεύθυνση αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α, έναντι της επιλογής δυο ξεχωριστών παραμέτρων α_x, α_y για κάθε κατεύθυνση, όπως επίσης και ο υπολογισμός της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου για διάφορους τύπους εδαφών. Με τον τρόπο αυτό θα μπορεί να τυποποιηθεί η στοχαστική μελέτη του υδατικού ισοζυγίου και έτσι να διευρυνθεί η χρήση της.

Για την εισαγωγή των τυχαίων αριθμών στο μοντέλο nearest neighbor χρησιμοποιείται κάποιος αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών. Η εκλογή του πρέπει να είναι τόσο πιο προσεκτική όσο περισσότεροι αριθμοί απαιτούνται.

Η μέθοδος Monte Carlo είναι εύχρηστη και συνδυάζεται πολύ εύκολα με τα μοντέλα nearest neighbor και S.W.BA.CRO.S. Οι απαντήσεις της είναι προσεγγιστικές, μπορούν όμως να βελτιωθούν σε ακρίβεια αν βασιστούν σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων (εκατοντάδες ή και χιλιάδες).

Από την ανάλυση ευαισθησίας προκύπτει ότι για την ίδια μέση τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας στον κορεσμό, οι μεταβολές που προκαλεί η τυπική απόκλιση φαίνονται να είναι πιο σημαντικές από αυτές που προκαλεί η αυτοσυσχετιστική παράμετρος.

Μετά τις εφαρμογές στους διάφορους τύπους εδαφών, φαίνεται πως οι διαφορές ντετερμινιστικής – στοχαστικής λύσης μεταβάλλονται με το βάθος και με τον τύπο εδάφους. Είναι δε τέτοιας τάξης μεγέθους που μπορούν να επηρεάσουν την αρδευτική πρακτική, μεταβάλλοντας τις ημερομηνίες άρδευσης.

Η μελέτη του υδατικού ισοζυγίου σε περιοχές μεγάλης έκτασης δεν ήταν εφικτή μέχρι τώρα λόγω της μεταβολής των υδραυλικών παραμέτρων στο χώρο. Η εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, βοηθά προς την κατεύθυνση αυτή. Προσφέρει δε τη δυνατότητα σε έναν ευρύτερο, επιτελικό φορέα να προγραμματίσει τις αρδεύσεις της περιοχής με τον βέλτιστο τρόπο.

99

Βιβλιογραφία

<u>Ξένη βιβλιογραφία</u>

- 1. Aitchison, J., and J. A. C. Brown, 1957. The lognormal distribution. 176pp., Cambridge University Press, London.
- Al–Khafaf, S., P. J. Wierenga and B. C. Williams, 1978. Evaporative flux from irrigated cotton as related to leaf area index, soil water and evaporative demand. Agronomy J., pp. 912–917.
- Anderson, J., and A. M. Shapiro, 1983. Stochastic analysis of one-dimensional steady state unsaturated flow: A comparison of Monte Carlo and perturbation methods. Water Resour. Res., 19(1):121–133.
- Anderson, S.L., 1990. Random Number Generators on Vector Supercomputers and Other Advanced Architectures. SIAM Review, **32(2)**, pp. 221–251.
- Antonopoulos, V.Z., and G.C.L. Wyseure, 1998. Modeling of water and nitrogen dynamics on an undisturbed soil and a restored soil after open–cast mining. Agric. Water Manag., 37, 21–40.
- Babajimopoulos, C., 1991. A Douglas–Jones predictor–corrector program in simulating one – dimensional usaturated flow in soil. Ground Water, **29(2)**, 267–270.
- Babajimopoulos, C., A. Budina and D. Kalfountzos, 1995. S.W.BA.CRO.S: A model for the estimation of the water balance of a cropped soil. Environmental Software, Vol. 10, No. 3, pp. 211–220.
- Babajimopoulos, C., A. Panoras, I. Mavroudis, and G. Bilas, 1996. The computation of the water balance and the modeling of the irrigation schedule of a cotton crop with the model S.W.BA.CRO.S, In: Blain W.R. (ed.) Hydraulic engineering software VI. Proc. of the 6th Intern. Conf. on hydraulic engineering software (HYDROSOFT 96), 10–12 Sept. Penang, Malaysia.
- 9. Baker, F. G., and J. Bouma, 1976. Variability of hydraulic conductivity in two subsurface horizons of two silt loam soils. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., **40**, 219–222.
- Bakr, A. A., L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr, and J. R. MacMillan, 1978. Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows, 1. Comparison of one– and three– dimensional flows. Water Resour. Res., 14(2): 263–271.
- 11. Bartlett, M. S., 1975. The statistical analysis of spatial pattern. Chapman and Hall, London.
- Belmans, C., J. G. Wesseling and R. A. Feddes, 1983. Simulation model of the water balance of a cropped soil. SWATRE., J. of Hydrology, 63, 271–286.

- Besag, J., 1974. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. **36**, No. 2, 192–236.
- Biggar, J. W., and D. R. Nielsen, 1976. The spatial variability of the leaching characteristics of a field soil. Water Resour. Res., 12:78–84.
- 15. Bratley, P., B. L. Fox and L. E. Schrage 1987. A Guide to Simulation. 2nd edition. Springer–Verlag, New York
- Bresler, E., and G. Dagan, 1983. Unsaturated flow in spatially variable fields, 2. Application of water flow models to various fields. Water Resour. Res., 19(2):421–428.
- 17. Brooks, R. H., and A. T. Corey, 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydrology paper No. 3, Colorado State Univ., Fort Collins.
- Buckingham, E., 1907. Studies on the movement of soil moisture. Bur. of soils Bull.,
 38, U.S. Dept. of Agric., Washington, D.C..
- C.S.E.P. e-book (1995). Available through the Internet from: <u>http://csep1.phy.ornl.gov/CSEP/TEXTOC.html/</u>. Copyright © 1991, 1992, 1993, 1994, 1995 by the Computational Science Education Project, sponsored by the U.S. Department of Energy.
- Carsel, R. F., and R. S. Parrish, 1988. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. Water Resour. Res., 24(5):755–769.
- Childs, E. C. and N. Collis–George, 1950. The permeability of porous materials. Proc. R. Soc. London, Ser. A, **201**, 392–405.
- 22. Childs, E. C., 1969. An introduction to the physical basis of soil water phenomena. Wiley, London.
- Chung, S. O., 1985. Stochastic modeling of water movement in the saturated unsaturated zone. Thesis presented to Iowa State University, at Ames, Iowa, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (University Microfilm International Order No 85–14383, Ann Arbor, Mich.).
- Clarke, R. D., 1946. An application of the Poisson distribution. J. Inst. Actuar., 72, 481.
- Cohran, W. G., 1936. The statistical analysis of the distribution of field counts of diseased plants. J. R. Statist. Soc. Supplt, 3, 49–67.
- Cordoba, J. R. and R. L. Bras. Physically based probabilistic models of infiltration, soil moisture and actual evapotranspiration. Water Resour. Res., **17(1)**:93–106.
- Coveyou, R. R. and R. D. MacPherson (1967). Fourier analysis of uniform random number generators. Journal of the ACM, 14, 100–119.
- Cressie, N. A. C., 1993. Statistics for spatial data (Revised Edition). Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Dagan, G., and E. Bresler, 1983. Unsaturated flow in spatially variable fields, 1. Derivation of models of infiltration and redistribution. Water Resour. Res., 19(2):413–428.
- 30. Darcy, H., 1956. Les fontaines publique de la Ville de Dijon. Dalmont, Paris, pp. 570.
- De Jong, R. and P. Kabat, 1990. Modeling water balance and grass production. Soil Sci. Soc. Am. J., 54, 1725–1732.
- De Jong, R., and D. R. Cameron, 1979. Computer simulation model for predicting soil water content profiles. Soil Sci., **128**, 41–48.
- Deju, Z. and L. Jingwen, 1993. The water use efficiency of winter wheat and maize on a salt–affected soil in the Huang Huai Hai river plain of China. Agric. Water Manag., 23, 67–82.
- Dieter, V., 1972. Statistical interdependence of pseudo-random numbers generated by the linear congruential method. In: Zaremba, S., editor, Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Academic Press, New York, pp. 289–318.
- Douglas, J. J., and B. F. Jones, 1963. One predictor–corrector method for non linear parabolic differential equations. J. SIAM, **11**, pp. 195–204.
- Durner, W., 1994. Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. Water Resour. Res., **30(2)**:211–223
- Durner, W., 1995. SHYPFIT 0.22 User's Manual. Research Report 95.1, Department of Hydrology, University of Bayreuth, D–95440 Bayreuth, Germany, 25pp.
- Elrick, D. E., J. H. Scandrett and E. E. Miller 1959. Tests of capillary flow scaling. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 22, 329–332.
- 39. Feddes, R. A., 1987. Simulating water management and crop production with the SWACRO–model, Proc. 3rd Intern. Workshop on land drainage, Colombus, Ohio.
- Feddes, R. A., J. G. Wesseling and R. Wiebing, 1984. Simulation of transpiration and yield of potatoes with the SWACRO – model, 9th Triennial Conference of the European Association of Potato Research (E.A.P.R.), Interlaken, Switzerland.
- Feddes, R. A., M. de Graaf, J. Bouma and C. D. van Loon, 1988. Simulation of water use and production of potatoes as affected by soil compaction, Potato Research, 31, 225–239.
- 42. Feddes, R. A., P.J., Kowalik, and H. Zaradny, 1978. Simulation of field water use and crop yield. Simulation Monograph, Pudoc, Wageningen.
- 43. Feller, W., 1957. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. New York: Wiley.
- 44. Fiering M. B., and B. B. Jackson, 1971. Synthetic streamflows. Water Resources Monograph 1, American Geophysical Union, Washington.
- 45. Freeze, R. A., 1975. A stochastic–conceptual analysis of one–dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. Water Resour. Res., **11(5)**: 725–741.

- Gajem, Y. M., A. W. Warrick, and D. E. Myers, 1981. Spatial dependence of physical propeties of a Typic Torrifluvent soil. Soil Sci. Soc. Am. J., 45:709–715.
- Gallichand, J., S. O. Prasher, R. S. Broughton and D. Marcotte, 1990. Kriging of hydraulic conductivity for subsurface drainage design. J. Irrig. Drainage Eng., 117(5), 667–681.
- Gleeson, A. C. and C. A. McGilchrist, 1980. Bilateral processes on a rectangular lattice. Australian Journal of Statistics, **22**, 197–206.
- 49. Greenberger, M., 1961. An a priori determination of serial correlation in computer generated random numbers. Math. Comp., **15**:383–389.
- 50. Greenberger, M., 1965. Method in randomness. Communications of the ACM, vol. **8**, 177–179.
- 51. Haan, C. T., 1977. Statistical methods in Hydrology. The Iowa State University Press, Ames, Iowa 50010.
- 52. Hammersley, J. M., and D. C. Handscomb, 1964. Monte Carlo methods. Wiley, N.Y..
- Haverkamp, R., M. Vauclin, J. Touma, P. J. Wierenga and G. Vachaud, 1977. A comparison of numerical simulation models for one – dimensional infiltration, Soil Sci. Soc. Am. J., 41, 285–294.
- 54. Hellekalek, P., 1998. Good random numbers are (not so) easy to find. Mathematics and computers in simulation, **46**, 485–505.
- Higuchi, M., 1984. Numerical simulations of soil water flow during wetting in a nonhomogenoeus soil. J. of Hydrology, **74**, 323–334.
- 56. Hippel K. W. and A. I. McLeod, 1994. Time series modeling of water resources and environmental systems. Elsevier, pp. 296–304.
- Hoogland, J. C., R. A. Feddes and C. Belmans, 1981. Root water uptake model depending on soil water pressure head and maximum extraction rate. Acta Horticulture, **119**, pp. 123–136.
- Hopmans, J. W. and E. Gutièrez–Ravé, 1988. Calibration of root water uptake model in spatially variable soils. J. of Hydrology, **103**, 53–65.
- 59. Hopmans, J. W. and J. N. M. Stricker, 1989. Stochastic analyses of soil water regime in a watershed, J. of Hydrology, **105**, 57–84.
- Hornung, V. and W. Messing, 1980. A predictor–corrector alternating direction implicit method for two–dimensional unsteady saturated – unsaturated flow in porous media. Ground water, 23(1), 90–96.
- 61. IMSL, 1987. IMSL Library User's Manual, Vol. 3, IMSL, Houston, Texas.
- 62. Janson, B., 1966. Random number generators. Victor Pettersons, Bokindustri, Akiebolag, Stockholm.
- King, P.R. and P.J. Smith, 1988. Generation of correlated properties in heterogeneous porous media. Mathematical Geology, 20(7), 863–877.

- Klute, A,. and G. E. Wilkinson, 1958. Some tests of the similar media concept of capillary flow, I, Reduced capillary conductivity and moisture characteristic data, Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 22, 278–281.
- Knuth, D. E., 1981. The art of computer programming Volume 2: Seminumerical algorithms. Second edition, Addison – Wesley, Reading, Mass.
- Kool, J. B., J. C. Parker, and M.Th. Van Genuchten, 1985. Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiments by parameter estimation, I, Theory and numerical studies. Soil Sci. Soc. Am. J., 49, 1348–1354.
- Krige, D. G., 1951. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwaters rand. J. Chimic. Min. Soc. South–Africa, **52**, 119–139.
- L' Ecuyer, P., 1988. Efficient and portable combined random number generators. Communications of the ACM, **31**, 742–748 & 774.
- 69. L' Ecuyer, P., 1998. Random number generation. In: Handbook on Simulation, Ed.: Jerry Banks, Wiley, 1998.
- 70. Law, J., 1944. A statistical approach to the interstitial heterogeneity of sand resrvoirs. Trans. AIME, **155**, 202–222.
- Lehmer, D. H., 1951. Mathematical methods in large scale computing units. Annu. Comput. Lab. Harvard Univ. 26, 141–146.
- Lewis, P.A., A.S. Goodman and J.M. Miller, 1969. A pseudo-random number generator for the system/360. IBM System's. Journal, 8(2), 136–146.
- 73. Mallants, D., D. Jacques, M. Vanclooster, J. Diels and J. Feyen, 1996. A stochastic approach to simulate water flow in a macroporous soil. Geoderma, **70**, 299–314
- Mallants, D., P. H. Tseng, N. Toride, A. Timmerman, and J. Feyen, 1997. Evaluation of multimodal hydraulic functions in characterizing a heterogeneous field soil. J. of Hydrology, **195**, 172–199.
- Marsaglia, G., 1968. Random numbers fall mainly in the planes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 61:25–28
- Marsaglia, G., 1972. The structure of linear congruential sequences. In: Zaremba, S., editor, Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Academic Press, New York, pp. 249–286.
- 77. Marsaglia, G., 1996. DIEHARD a battery of tests of randomness. See <u>http://stat.fsu.edu/~geo/diehard.html</u>
- Martin, R., 1974. On spatial dependence, bias, and use of first spatial differences in regression analysis. Area, 6, 185–194.
- 79. Matheron, G., 1962. Traite de Geostatistique Appliquee. Vol. 1, pp. 334, Technip, Paris.
- 80. Matheron, G., 1963. Principles of Geostatistics. Econ. Geology, 58, 1246–1266.
- 81. Matheron, G., 1965. Les variables regionalisees et leur estimation. pp. 306, Mason, Paris.

- Matheron, G., 1971. The theory of regionalized variables and its applications. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fasc. 5, Centre de Geostatistique, Fontainebleau, pp. 211.
- Mead, R., 1966. A relationship between individual plant spacing and yield. Ann. Bot., 30, 301–309.
- Mead, R., 1967. A mathematical model for the estimation of interplant competition. Biometrics, 23, 189–205.
- Mead, R., 1968. Measurement of competition between individual plants in a population. J. Ecol., 56, 35–45.
- 86. Meyer, W. J., 1985. Concepts of mathematical modeling. McGraw-Hill Inc.
- Miller, E. E., and R. D. Miller, 1956. Physical theory for capillary flow phenomena. J. Appl. Phys., 27(4):324–332.
- Milly, P.C.D., 1988. Advances in modeling of water in the unsaturated zone. Transport in porous media, 3, 491–514.
- Morton, K. W., 1956. On the treatment of Monte Carlo methods in textbooks. Math. Tab. Aids Comput. **10**, 223–224.
- Mualem, Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res., 12:513–522.
- 91. Nicholson, A., 1999. Analysis of spatial distributions of accidents. Safety Science **31**, 71–91.
- Nielsen, D. R., J. W. Biggar, and K. T. Erh, 1973. Spatial variability of field–measured soil–water properties. Hilgardia 42(7), 215–259.
- Ord, J. K., 1975. Estimation methods for models of spatial interaction. Journal of the American Statistical Association, **70**, 120–126.
- Papamichail, D. M. and I. G. Metaxa, 1996. Geostatistical analysis of spatial variability of rainfall and optimal design of a rain gauge network. Water Resources Management, **10**, 107–127.
- Park, S. K., and K.W. Miller, 1988. Random number generators: Good ones are hard to hafind. Communications of the ACM. Vol. **31**, pp. 1192–1201
- Parlange, J. Y., 1971. Theory of water movement in soils: 2. One dimensional infiltration. Soil Sci., 111:170–174.
- Philip, J. R. 1967. Sorption and infiltration in heterogeneous media. Aust. J. soil Res.,
 5, 1–10.
- 98. Philip, J. R., 1969. Theory of infiltration. Advances in Hydrosciences, 5, 215–296.
- Polman, D. J., D. McLaughlin, S. Lewis, L. Gelhar and R. Ababou, 1991. Stochastic modeling of large–scale flow in heterogeneous unsaturated soils. Water Resour. Res., 27(7):1447–1458.
- 100. Prassad, R., 1988. A linear root water uptake model. J. of Hydrology, 99, pp. 297–306.

- 101. Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, 1997. Numerical Recipes in Fortran 77: The art of Scientific Computing. Second Edition. (Vol. 1 of Fortran Numerical Recipes). Cambridge University Press, New York. (also available through Numerical Recipes Software Web Site: <u>http://www.nr.com</u>)
- 102. Rao, P.V., P.S.C. Rao, J.M. Davidson and L.C. Hammond. Use of goodness-of-fit tests for characterizing the spatial variability of soil properties. Soil Sci. Soc. Am. J., 43, 274–278.
- 103. RAND Corporation, 1955. A million random digits with 1000,000 normal deviates, Free Press, Clencoe, Illinois.
- 104. Rasiah, V., G. C. Carlson and R. A. Kohl, 1992. Assessment of functions and parameter estimation methods in root water uptake simulation. Soil Sci. Soc. Am. J., 56, 1267–1271.
- Richards, L. A., 1928. The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigators. J. Agric. Res., **37**, 719–742.
- 106. Richards, L. A., 1931. Capillary conduction of liquids through porous medium. Physics, 1, 318–333.
- 107. Ritchie, J. T., 1972. Model for predicting evaporation from a row crop with incomplete cover. Water Resour. Res., **8**: 1204–1213.
- Rogowski, A. S., 1972. Watershed physics: soil survey criteria. Water Resour. Res., 8:1015–1023.
- Romano, N. and A. Santini, 1997. Effectiveness of using pedo-transfer functions to quantify the spatial variability of soil water retention characteristics. J. of Hydrology, **202**, 1–4, pp. 137–157.
- 110. Rubinstein, R. Y., 1981. Simulation and the Monte Carlo method. Wiley series in probability and mathematical statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Russo, D. and M. Bouton, 1992. Statistical analysis of spatial variability in unsaturated flow parameters. Water Resour. Res., 28(7):1911–1925.
- Schrage, L., 1979. A more portable Fortran random number generator. ACM Transactions on Mathematical Software, 5, pp. 132–138.
- Sharma M.L., G.A. Gander and C.G. Hunt, 1989. Spatial variability of infiltration in a watershed. J. of Hydrology (45), pp. 101–122.
- 114. Smith, J. L., 1978. A stochastic analysis of steady–state groundwater flow in a bounded domain. Ph.D. Thesis. University of British Columbia, Canada.
- Smith, L., and R. A. Freeze, 1979a. Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1, One–dimensional simulations, Water Resour. Res., 15(3):521–528.

- Smith, L., and R. A. Freeze, 1979b. Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2, Two–dimensional simulations, Water Resour. Res., 15(6):1543–1559.
- 117. Smith, R. E., and R. H. B. Hebbert, 1979. A Monte Carlo analysis of the hydrologic effects of spatial variability of infiltration. Water Resour. Res., **15(2)**:419–429.
- 118. Soil Survey Staff, 1975. Soil Taxonomy. U.S.D.A. Handbook No. 436. U.S. Government Printing Office, Washington D.C..
- 119. Swartzendruber, D., 1969. The flow of water in unsaturated soils, In: R. J. M. De Wiest (edr.), Flow through porous media, Academic Press, New York.
- Tzimopoulos, C., 1978. Finite elements solution of unsaturated porous media flow.
 Proc. of 2nd Intern. Conf. on Finite Elements in water resources, London, Pentech
 Press, pp 1.37–1.49.
- 121. Tzimopoulos, C., M. Tziara and M. Dellios, 1986. Statistical analysis and estimation of saturated hydraulic conductivity from soil properties. International symposium in water management for agricultural development E.W.R.A., Pub. 1, pp. 264–265.
- 122. Vachaud, G., 1968. Contribution a l' etude des problemes d' ecoulement an milieux poreux non satures, These de Docteur – es – Sciences physiques, Universite de Grenoble.
- Van Genuchten, M. Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 44, pp. 892–898.
- 124. Van Wijk, A. L. M. and R. A. Feddes 1982. A model approach to the evaluation of drainage effects, In: Land Drainage (ed. M. J. Gardiner). A seminar in the E. C. Programme of co–ordination of Research on Land use and rural resources, Cambridge, UK, July 1981, Balkema, Rotterdam, 131–149.
- 125. Van Wijk, A. L. M. and R. A. Feddes, 1986. Simulating effects of soil type and drainage in arable crop yield, In: A. L. M. Van Wijk and J. Wesseling (eds.) Agricultural water management. Proc. Symp. On Agric. Water Management, Arnhem, June, 1985, A.A. Balkema, Rotterdam, 97–112.
- 126. Vanclooster, M., Viaene, P., Diels, J. and K. Christiaens, 1994. Water and agrochemicals in the soil and vadose environment. Reference and user's manual. Release 2.0, Institute for Land and Water Management, KU Leuven, Belgium.
- 127. Vieira, S. R., D. R. Nielsen and J. W. Biggar, 1981. Spatial variability of field–measured infiltration rate. Soil Sci. Soc. Am. J., **45**, 1040–1048.
- 128. Von Neumann, J., 1951. Various techniques used in connection with random digits.U.S. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser., No 12, 36–38.
- Wallach, R., 1990. Soilwater distribution in a nonuniformly irrigated field with root extraction. J. of Hydrology (**119**), pp. 137–150.

- Warrick, A. W., G. J. Mullen and D. R. Nielsen, 1977. Scaling field-measured soil hydraulic properties using a similar media concept. Water Resour. Res., **13(2)**: 355–362.
- Wesseling, J. G. and B. J. van der Broek, 1987. Prediction of irrigation scheduling with the numerical model SWATRE, Proceedings Symp. Agrohydrology, Sept. 29 – Oct. 1, IAC, Wageningen.
- 132. Whittle, P., 1954. On stationary processes in the plane. Biometrika, **41**, 434–449.
- Wilkinson, G. E. and A., Klute, 1959. Some tests of the similar media concept of capillary flow, II, Flow systems data, Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 23, 434–437.
- Willardson, L. S. and R. L. Hurst, 1965. Sample size estimates in permeability studies.
 J. Irrig. Drain. Div. Amer. Soc. Civil Eng., **91(IR1)**, 1–9.
- Yates, S. R. and A. W. Warrick, 1987. Estimating soil water content using cokriging. Soil Sci. Soc. Am. J., **51**, 23–30.

Ελληνική βιβλιογραφία

- Αντωνόπουλος, Β., 1998. W.A.NI.SIM.. Μονοδιάστατο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης της δυναμικής του νερού και του αζώτου στο έδαφος. Μονογραφία, Τμήμα Γεωπονίας, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
- Αντωνόπουλος, Β., 1999. Υδρολογία της ακόρεστης ζώνης του εδάφους. Έκδοση της Υπηρεσίας Δημοσιευμάτων του Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
- Κερκίδης, Π., Σ. Ελμαλόγλου και D. R. Nielsen, 1991. Γεωστατιστική και εφαρμογές της στην Εδαφολογία. Γεωργική Έρευνα, 15, 117–131.
- Μπαμπατζιμόπουλος, Χ. (επιστημονικός υπεύθυνος), 1995. Τελική έκθεση του ερευνητικού προγράμματος: «Προγραμματισμός των αρδεύσεων με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων». Γ.Γ.Ε.Τ., Θεσσαλονίκη.
- 5. Μπίλας, Γ. Α., 1995. Εφαρμογή του μοντέλου S.W.BA.CRO.S. στην πρόβλεψη της παραγωγής και στον προγραμματισμό της άρδευσης του βαμβακιού. Διπλωματική Μεταπτυχιακή διατριβή στο Τμήμα Γεωπονίας, Α.Π.Θ..
- Παπαμιχαήλ, Δ., 1991. Στοχαστική Υδρολογία. Σημειώσεις στο Π.Μ.Σ. του Τμήματος Γεωπονίας του Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
- Παπαμιχαήλ, Δ., 1993. Στατιστική Υδρολογία. Σημειώσεις στο Π.Μ.Σ. του Τμήματος Γεωπονίας του Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
- Τζιμόπουλος, Χ., και Ε. Παπαδοπούλου, 1992. Εφαρμογή της θεωρίας των Περιφερειακών Μεταβλητών για την εκτίμηση της απορροφητικότητας σε πειραματικό αγρό της πεδιάδας Θεσσαλονίκης. Πρακτικά του 5^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Υδροτεχνικής Ένωσης, Λάρισα, 9–12 Νοεμβρίου, σελ. 30–38.

Παρἁρτημα

W.for

```
C Το πρόγραμμα υπολογίζει τον weighting matrix W και τις ιδιοτιμές ***
                                                           * * *
C ενός 2D nearest neighbor μοντέλου, που εφαρμόζεται σε έναν
                                                                ***
C τετραγωνικό κάνναβο διαστάσεων από 3x3 ως 10x10.
dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10), lamda(10,10)
     integer side
     double precision lamda, pi
     open (2, file='eigenval.out')
     open (1, file='Wtable.out')
     write (*,2) ' Μέγεθος καννάβου : ' 2 format (2x,a\)
     read (*,*) side
     do 5 i=2, side-1
     A(1,2) = .25
     A(side, side-1) = .25
     k=i-1
     l=i+1
     A(i, k) = .25
   5 A(i, 1) = .25
     do 10 i=2, side-1
     do 10 j=2, side-1
     D(1,1) = .25
     D(side, side) = .25
     if (i.eq.j) then
     D(i,j)=.25
     else
     D(i,j)=0.
     endif
     F(i,j)=0.
  10 continue
     if (side.eq.3) then
     call three (side, A, D, F)
     call ethree(side,pi,lamda)
     else if (side.eq.4) then
     call four (side, A, D, F)
     call efour(side, pi, lamda)
     else if (side.eq.5) then
     call five (side, A, D, F)
     call efive(side,pi,lamda)
     else if (side.eq.6) then
     call six (side, A, D, F)
     call esix(side,pi,lamda)
     else if (side.eq.7) then
     call seven (side, A, D, F)
     call eseven(side, pi, lamda)
     else if (side.eq.8) then
     call eight (side, A, D, F)
     call eeight(side,pi,lamda)
     else if (side.eq.9) then
     call nine (side, A, D, F)
     call enine(side, pi, lamda)
     else
     call ten (side, A, D, F)
     call eten(side,pi,lamda)
     endif
     stop
     end
     subroutine three (side, A, D, F)
     integer side
     dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
     do 21 i=1, side
  21 write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
```

```
Αρχείο W.for
```

```
do 22 i=1, side
   write (1,39) (D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
22
    do 23 i=1, side
23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
 39 format (1x, (9f5.2))
    return
    end
    subroutine four (side, A, D, F)
    integer side
    dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
    do 21 i=1, side
21 write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side)
    do 22 i=1, side
22 write (1,39) (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side)
   do 23 i=1, side
23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
   $,(D(i,j),j=1,side)
    do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $, (A(i,j),j=1,side)
 39 format (1x, (16f5.2))
    return
    end
    subroutine five (side, A, D, F)
    integer side
    dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
    do 21 i=1, side
21
   write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)
    do 22 i=1, side
22 write (1,39) (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)
    do 23 i=1, side
23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
   $, (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $, (A(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side)
    do 25 i=1, side
25 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $, (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
 39 format (1x, (25f5.2))
    return
    end
    subroutine six (side, A, D, F)
    integer side
    dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
    do 21 i=1, side
21
   write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
    do 22 i=1, side
22 write (1,39) (D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
    do 23 i=1, side
23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side)
   $, (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
   $, (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
    do 25 i=1, side
25 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $, (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
    do 26 i=1, side
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

```
26 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side), (A(i,j), j=1, side)
 39 format (1x, (36f5.2))
    return
    end
    subroutine seven (side, A, D, F)
    integer side
    dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
    do 21 i=1, side
21
   write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1
   $,side)
    do 22 i=1, side
22 write (1,39) (D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1)
   $,side)
    do 23 i=1, side
23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
   $, (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1)
   $,side)
    do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $,(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side)
    do 25 i=1, side
25 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $,(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side)
    do 26 i=1, side
26 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1)
   $,side)
    do 27 i=1, side
27 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side), (A(i,j), j=1)
   $,side)
 39 format (1x, (49f5.2))
    return
    end
    subroutine eight (side, A, D, F)
    integer side
    dimension A(10,10), D(10,10), F(10,10)
    do 21 i=1, side
21 write (1,39) (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1
   $,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 22 i=1, side
22 write (1,39) (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1
   $, side), (F(i,j), j=1, side)
    do 23 i=1, side
23
   write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)
   $,(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1
   $,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
   $,(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 25 i=1, side
25 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $,(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 26 i=1, side
26 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1
   $,side),(F(i,j),j=1,side)
```

27 28 39	<pre>do 27 i=1,side write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side) \$,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1) \$,side),(D(i,j),j=1,side) do 28 i=1,side write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side) \$,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1) \$,side),(A(i,j),j=1,side) of format (1x,(64f5.2)) return end</pre>
	subroutine nine (side,A,D,F)
	integer side dimension A(10,10),D(10,10),F(10,10)
21	do 21 i=1, side write (1 39) (A(i i) i=1 side) (D(i i) i=1 side) (F(i i) i=1 side)
21	\$, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1)
	<pre>\$,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side) do 22 i=1,side</pre>
22	write (1,39) (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side) \$ (F(i,j), i=1, side) (F(i,j), i=1,
	<pre>\$,side), (F(i,j), j=1,side), (F(i,j), j=1,side)</pre>
23	do 23 1=1,side write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side)
	<pre>\$, (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1) \$, side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)</pre>
24	do 24 i=1, side (F(i, i), i=1, cide) ($F(i, i), i=1, cide$) ($F(i, i), i=1, cide$)
24	\$, (A(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j
	<pre>\$,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side) do 25 i=1,side</pre>
25	<pre>write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side) \$ (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,s</pre>
	\$, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)
26	<pre>ao 26 1=1, side write (1,39) (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)</pre>
	<pre>\$, (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1 \$,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)</pre>
27	do 27 i=1, side write (1.29) ($F(i, i)$ i=1 side) ($F(i, i)$ i=1 side) ($F(i, i)$ i=1 side)
21	\$, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side), (A(i,j), j=1)
	<pre>\$,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side) do 28 i=1,side</pre>
28	write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
	\$, side), (A(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side), (D(1,j), j=1, side),
29	do 29 i=1,side write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
	<pre>\$, (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1) \$ side) (D(i,j), j=1, side)</pre>
39) format (1x, (81f5.2))
	end
	subroutine ten (side,A,D,F)
	integer side dimension $A(10,10) \cdot D(10,10) \cdot F(10,10)$
0.1	do 21 i=1, side
21	<pre>write (1,39) (A(1,j),j=1,side), (D(1,j),j=1,side), (F(1,j),j=1,side) \$, (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1)</pre>
	<pre>\$,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side) do 22 i=1,side</pre>
22	write $(1,39)$ (D(i,j), j=1, side), (A(i,j), j=1, side), (D(i,j), j=1, side)
	<pre>\$, (r(1, j), j=1, side), (r(1, j), j=1, side), (r(1, j), j=1, side), (r(1, j), j=1, side)</pre>
	do 23 i=1,side

23 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side)

```
$, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)
    do 24 i=1, side
24 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side)
   $, (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1)
   $, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side), (F(i,j), j=1, side)
   do 25 i=1, side
25 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 26 i=1, side
26 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1,side), (A(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1)
   $,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 27 i=1, side
27 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1)
   $,side),(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
    do 28 i=1, side
28 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $, (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (D(i,j),j=1
   $,side), (A(i,j), j=1,side), (D(i,j), j=1,side), (F(i,j), j=1,side)
    do 29 i=1, side
29 write (1,39) (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side), (F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)
   $,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side)
    do 30 i=1, side
30 write (1,39) (F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side)
   $,(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1
   $,side),(F(i,j),j=1,side),(D(i,j),j=1,side),(A(i,j),j=1,side)
 39 format (1x, (100f5.2))
    return
    end
    subroutine ethree(side,pi,lamda)
    dimension lamda(3,3)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos(pi/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
   write (2,9) lamda(1,j)
10
    do 20 j=2, side
    lamda(3,j)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
   write (2,9) lamda(3,j)
    format (1x, (g13.7))
    return
    end
    subroutine efour(side,pi,lamda)
    dimension lamda(4,4)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    lamda(2,2)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((2*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(2,2)
    lamda(3,3)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((3*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(3,3)
    do 20 j=2, side
    lamda(4,j)=(dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20 write (2,9) lamda(4,j)
```

\$,(D(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1,side),(F(i,j),j=1)

```
9
    format (1x, (g13.7))
```

20

```
return
    end
    subroutine efive(side, pi, lamda)
    dimension lamda(5,5)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2, side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
   write (2,9) lamda(2,j)
20
    do 30 j=3, side-1
    lamda(4,j)=(dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(4,j)
    do 40 j=2, side
    lamda(5,j)=(dcos((5*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
40 write (2,9) lamda(5,j)
9
    format (1x, (g13.7))
   return
    end
    subroutine esix(side,pi,lamda)
    dimension lamda(6,6)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2, side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20 write (2,9) lamda(2,j)
    lamda(3,3)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((3*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(3,3)
    lamda(4,4) = (dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((4*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(4,4)
    do 30 j=3, side-1
    lamda(5,j)=(dcos((5*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(5,j)
    do 40 j=2, side
    lamda(6,j) = (dcos((6*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
40 write (2,9) lamda(6,j)
    format (1x, (g13.7))
    return
    end
    subroutine eseven(side,pi,lamda)
    dimension lamda(7,7)
    integer side
    double precision lamda, pi
   pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.le-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2,side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20 write (2,9) lamda(2,j)
    do 30 j=3, side-3
    lamda(3,j)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(3,j)
    do 40 j=4, side-2
    lamda(5,j)=(dcos((5*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
```

```
Αρχείο W.for
```

```
40 write (2,9) lamda(5,j)
    do 50 j=3, side-1
    lamda(6,j)=(dcos((6*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
50
   write (2,9) lamda(6,j)
    do 60 j=2, side
    lamda(7, j) = (dcos((7*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
60 write (2,9) lamda(7,j)
    format (1x, (g13.7))
9
    return
    end
    subroutine eeight(side,pi,lamda)
    dimension lamda(8,8)
    integer side
    double precision lamda,pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10
   write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2, side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20 write (2,9) lamda(2,j)
    do 30 j=3, side-3
    lamda(3,j)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(3,j)
    lamda(4,4) = (dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((4*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(4,4)
    lamda(5,5)=(dcos((5*pi)/(side+1))+dcos((5*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(5,5)
    do 40 j=4, side-2
    lamda(6,j)=(dcos((6*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
40 write (2,9) lamda(6,j)
    do 50 j=3, side-1
    lamda(7,j)=(dcos((7*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
50 write (2,9) lamda(7,j)
    do 60 j=2, side
    lamda(8,j)=(dcos((8*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
60 write (2,9) lamda(8,j)
9
   format (1x, (g13.7))
    return
    end
    subroutine enine(side,pi,lamda)
    dimension lamda(9,9)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2, side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20
   write (2,9) lamda(2,j)
    do 30 j=3, side-3
    lamda(3,j)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(3,j)
    do 40 j=4, side-4
    lamda(4,j)=(dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
40 write (2,9) lamda(4,j)
    do 50 j=5, side-3
    lamda(6,j)=(dcos((6*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
50 write (2,9) lamda(6,j)
    do 60 j=4, side-2
    lamda(7,j)=(dcos((7*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
60 write (2,9) lamda(7,j)
    do 70 j=3, side-1
```

```
lamda(8,j)=(dcos((8*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
70 write (2,9) lamda(8,j)
    do 80 j=2, side
    lamda(9,j)=(dcos((9*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
80
   write (2,9) lamda(9,j)
   format (1x, (g13.7))
Q
    return
    end
    subroutine eten(side,pi,lamda)
    dimension lamda(10,10)
    integer side
    double precision lamda, pi
    pi=3.1415926535
    do 10 j=1, side
    lamda(1,j)=(dcos((pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
    if (abs(lamda(1,j)).lt.1e-4) lamda(1,j)=0.
10 write (2,9) lamda(1,j)
    do 20 j=2, side-2
    lamda(2,j)=(dcos((2*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
20
   write (2,9) lamda(2,j)
    do 30 j=3, side-3
    lamda(3,j)=(dcos((3*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
30 write (2,9) lamda(3,j)
    do 40 j=4, side-4
    lamda(4,j)=(dcos((4*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
40 write (2,9) lamda(4,j)
    lamda(5,5)=(dcos((5*pi)/(side+1))+dcos((5*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(5,5)
    lamda(6,6)=(dcos((6*pi)/(side+1))+dcos((6*pi)/(side+1)))/2.
    write (2,9) lamda(6,6)
    do 50 j=5, side-3
    lamda(7,j)=(dcos((7*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
50 write (2, 9) lamda(7, j)
    do 60 j=4, side-2
    lamda(8,j)=(dcos((8*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
60
   write (2,9) lamda(8,j)
    do 70 j=3, side-1
    lamda(9,j)=(dcos((9*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
70 write (2,9) lamda(9,j)
    do 80 j=2, side
    lamda(10,j)=(dcos((10*pi)/(side+1))+dcos((j*pi)/(side+1)))/2.
80
   write (2,9) lamda(10,j)
9
    format (1x, (g13.7))
    return
    end
```

Detalhpa.for

```
*****
С
С
  *** Προσδιορισμός της αυτοσυσχετιστικής παραμέτρου α με τη
                                                              ***
  *** μέθοδο Newton - Raphson
                                                              ***
С
  *****
С
  *** conv -> κριτήριο σύγκλισης
С
                                                               ***
  *** itmax -> Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου N-R
                                                              ***
С
  *** conv -> κριτήριο σύγκλισης
                                                              ***
С
С
  *** number -> Το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα W
                                                               ***
  *** y1-> Γινόμενο {YT}*{Y}
*** y2-> Γινόμενο {YT}*{YL}
С
                                                              ***
                                                               ***
С
  *** v3-> Γινόμενο {YLT}*{YL}
                                                               ***
С
  *** inp -> Πίνακας με τα 4 προηγούμενα δεδομένα
                                                              ***
С
  *** r -> Πρώτη προσέγγιση του συντελεστή α
                                                               ***
С
  *** new -> Νέα προσέγγιση του συντελεστή α
*** suml -> Όρος αθροίσματος της σχέσης Α.
                                                               ***
С
      suml -> Όρος αθροίσματος της σχέσης Α.2 - βλ. Ord (1975) ***
С
  *** fr -> Ο υπόλοιπος όρος της σχέσης Α.2
С
                                                               ***
  *** sum2 -> Όρος αθροίσματος της σχέσης Α.3 -βλ. Ord (1975)
                                                              ***
С
  *** frr -> Ο υπόλοιπος όρος της σχέσης Α.3
                                                              ***
С
C
  dimension inp(4)
     double precision conv, new, lamda, sum1, r, sum2, y1, y2, y3, inp
     open (6, file='a NR.out')
     open (7, file='a NR.inp')
     conv=1e-6
     itmax=50
     read (7,*) (inp(j),j=1,4)
     number=idint(inp(1))
     y1=inp(2)
     y2=inp(3)
     y3=inp(4)
     close (7)
     r=y2/y1
     write (6,915)
     write (6,925) 0,r
     do 50 i=1, itmax
     new=r-((2*sum1(r)/number)+fr(r))/((2*sum2(r)/number)+frr(r))
     write (6,925) i,new
     if (abs((new-r)/new).le.conv) goto 60
     r=new
  50 continue
     write (6,930) itmax
     goto 80
  60 write (6,920) new,i
  80 stop
  915 format (5x,' Αριθμός επανάληψης
                                        Προσέγγιση '/)
  920 format (/5x,61('*')/5x,'* Το α είναι = ',g15.7,3x,' Μετά από',i5,'
    $ επαναλήψεις *'/5x,61('*'))
  925 format (12x, i3, 15x, g14.7)
  930 format (/5x,50('*')/5x,'* Μετά από ',i5,2x,' επαναλήψεις ΔΕΝ επήλθ
    $ε σύγκλιση *'/5x,50('*'))
     end
     function sum1(x)
     dimension lamda(100), inp(4)
     double precision x, sum1, lamda, inp
     open (7,file='a NR.inp')
     open (1, file='eigenval.out')
     read (7,*) (inp(j),j=1,4)
     number=idint(inp(1))
     do 10 i=1, number
  10 read (1,*) lamda(i)
     rewind 1
     close (7)
```

```
sum1=0.
    do 20 j=1, number
20 sum1=sum1+lamda(j)/(1.-x*lamda(j))
    return
    end
    function sum2(x)
    dimension lamda(100), inp(4)
    double precision x, sum2, lamda, inp
    open (7,file='a_NR.inp')
    open (1, file='eigenval.out')
    read (7,*) (inp(j),j=1,4)
    number=idint(inp(1))
    sum2=0.
    do 10 i=1, number
10 read (1,*) lamda(i)
    rewind 1
    close (7)
    do 20 j=1, number
2.0
   sum2=sum2+(lamda(j)/(1.-x*lamda(j)))**2.
    return
    end
    function fr(x)
    dimension inp(4)
    double precision x,y1,y2,y3,inp
    open (7,file='a NR.inp')
    read (7,*) (inp(j),j=1,4)
   y1=inp(2)
   y2=inp(3)
    y3=inp(4)
    close (7)
    fr=2*(x*y3-y2)/(y1-2*x*y2+x*x*y3)
    return
    end
    function frr(x)
    dimension inp(4)
    double precision x,y1,y2,y3,inp
   open (7,file='a NR.inp')
    read (7,*) (inp(j),j=1,4)
    y1=inp(2)
    y2=inp(3)
    y3=inp(4)
   close (7)
   frr=(2*y3/(y1-2*x*y2+x*x*y3))-(4*(x*y3-y2)**2)/((y1-2*x*y2+x*x*y3))
   $**2)
    return
    end
```