Γραμμική Άλγεβρα για πρωτοετείς.

Χαρα Χαραλαμπους

Οι σημειωσεις αυτες βασιζονται στις διαλεξεις του μαθηματος Γραμμικη Αλγεβρα που διδαχθηκε το χειμερινο εξαμηνο του 2010 στο Τμημα Πληροφορικης του ΑΠΘ. Οι σημειωσεις αυτες εμπλουτιζονται και διορθωνονται κατα τη διαρκεια του χειμερινου εξαμηνου του 2011.

22 Νοεμβρίου 2011

Περιεχόμενα

1 Γραμμικά συστήματα **5**

1.1 Εισαγωγικά 5

Ασκήσεις ενότητας 1.1 10

1.2 Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών 11

Ασκήσεις ενότητας 1.2 18

1.3 Επίλυση Γραμμικών συστημάτων 19

Ασκήσεις ενότητας 1.3 23

1.4 Εφαρμογές 24

Ασκήσεις ενότητας 1.4 30

1.5 Επίλογος 30

2 Πίνακες **33**

2.1 Πράξεις πινάκων 33

Ασκήσεις ενότητας 2.1 44

2.2 Αντιστρέψιμοι πίνακες 45

Ασκήσεις ενότητας 2.2 55

2.3 Ορίζουσες πινάκων 56

Ασκήσεις ενότητας 2.3 72

2.4 Επίλογος. 74

3 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ **77**

3.1 Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ 77

Ασκήσεις ενότητας 3.1 86

3.2 Υποχώροι του $\mathbb{R}^n$ 86

Ασκήσεις ενότητας 3.2 97

3.3 Βάσεις και Γραμμική ανεξαρτησία 98

Ασκήσεις ενότητας 3.3 110

3.4 Γραμμικές συναρτήσεις. 112

Ασκήσεις ενότητας 3.4 125

3.5 Πίνακες Αλλαγής Βάσης 127

Ασκήσεις ενότητας 3.5 133

3.6 Επίλογος. 134

4 Ιδιοτιμές **137**

4.1 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα 137

Ασκήσεις ενότητας 4.1 160

4.2 Ορθογώνιοι πίνακες και εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ 162

Ασκήσεις ενότητας 4.2 171

4.3 Προβολές και Βέλτιστες λύσεις 172

Ασκήσεις ενότητας 4.3 183

Κεφάλαιο 1

Γραμμικά συστήματα

1.1 Εισαγωγικά

Σε αυτές τις σημειώσεις όταν γράφουμε $\mathbb{k}$ εννοούμε το $\mathbb{R}$ (το σώμα των πραγματικών αριθμών) ή το $\mathbb{C}$ (το σώμα των μιγαδικών αριθμών). Ένα **γραμμικό σύστημα** (linear system) m εξισώσεων με n αγνώστους με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{k}$ είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n &= \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου όλα τα a_{ij} και όλες οι σταθερές β_i ανήκουν στο $\mathbb{k}$. Θα αναφερθούμε λίγο παραπάνω στους δείκτες των συντελεστών a_{ij} και των σταθερών β_i. Εδώ το i παίρνει τιμές $1, \ldots m$ και το j παίρνει τιμές $1, \ldots, n$. Τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι άγνωστοι του γραμμικού συστήματος. **Λύση** (solution) του συστήματος (1.1) στο $\mathbb{k}$ είναι μία διατεταγμένη n-άδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ στοιχείων του $\mathbb{k}$ που ικανοποιεί κάθε μία από τις εξισώσεις (1.1), δηλ.

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i\ , \quad 1 \le i \le m.$$

Λέμε ότι το σύστημα (1.1) είναι **συμβατό** (consistent) αν έχει λύση. Αν το σύστημα δεν έχει λύση λέγεται **ασύμβατο** (inconsistent).

Το σύστημα (1.1) μπορεί να γραφεί στη γλώσσα των πινάκων ως

$$AX = B, \tag{1.2}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A γράφεται σε συντομογραφία $A = (a_{ij})$ και λέγεται **πίνακας συντελεστών** (coefficient matrix), ο πίνακας B λέγεται **πίνακας των σταθερών όρων** (fixed terms) και ο πίνακας

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}$$

λέγεται **επαυξημένος** (extended) πίνακας. Θα γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$ και ως

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

για να τονίσουμε ότι η τελευταία στήλη είναι στήλη σταθερών ενός συστήματος.

Παραδείγματα 1.1.1.

- Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 5x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{array}$$

  Ο πίνακας των συντελεστών A είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

  ενώ ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

  Το σύστημα αυτό είναι συμβατό αφού η 5-άδα $(0, 0, 0, 0, 0)$ ικανοποιεί κάθε μία από τις 4 εξισώσεις. Η 5-άδα $(2, 1, 1, 0, 0)$ δεν είναι λύση του

συστήματος γιατί ενώ ικανοποιεί την συνθήκη που περιγράφεται από την πρώτη εξίσωση δεν ικανοποιεί την συνθήκη που περιγράφεται από την δεύτερη εξίσωση. Θα δούμε αργότερα ότι το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις.

- Το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{array}$$

και είναι ασύμβατο όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί. Πράγματι αν (ξ_1, ξ_2) ήταν λύση του συστήματος τότε σύμφωνα με την πρώτη εξίσωση $\xi_1 = 1 + \xi_2$ ενώ σύμφωνα με την δεύτερη εξίσωση $2\xi_1 = 2\xi_2$, δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$. Συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις για το ξ_1 βλέπουμε ότι $\xi_1 = 1 + \xi_1$, άρα $0 = 1$ που είναι αδύνατον. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι (ξ_1, ξ_2) ήταν λύση του συστήματος. Επομένως το σύστημα είναι ασύμβατο.

- Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Η τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4 = 1$$

δηλαδή στην ισότητα $0 = 1$ που είναι αδύνατη. Έπεται ότι το γραμμικό σύστημα με τον παραπάνω επαυξημένο πίνακα είναι ασύμβατο. Γενικότερα αν ο επαυξημένος πίνακας $[A \mid B]$ του γραμμικού συστήματος $AX = B$ έχει μία γραμμή της μορφής

$$[\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \ \mid \ c\ ] \tag{1.3}$$

όπου $c \neq 0$ τότε το γραμμικό σύστημα είναι ασύμβατο.

Έστω τώρα ότι έχουμε κάποιο γραμμικό σύστημα και αλλάζουμε τη θέση των εξισώσεων i και j. Έτσι στο νέο γραμμικό σύστημα η i-στή εξίσωση είναι η παλιά j, και αντίστοιχα η j-στή εξίσωση είναι η παλιά i. Είναι ξεκάθαρο ότι το νέο γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις όπως το αρχικό σύστημα. Ο επαυξημένος πίνακας του καινούριου συστήματος προκύπτει από τον επαυξημένο του συστήματος (1.1) *αντιμεταθέτοντας* τις γραμμές i και j. Στην επόμενη ενότητα θα ονομάσουμε αυτή τη γραμμοπράξη *στοιχειώδη πράξη γραμμών τύπου 2*.

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως επηρεάζονται οι λύσεις του συστήματος (1.1) αν πολλαπλασιάσουμε την i-στή εξίσωση με το μη μηδενικό στοιχείο k. Προκύπτει ένα καινούριο σύστημα που διαφέρει από το παλιό μόνο στην i-στή εξίσωση: η i-στή εξίσωση του συστήματος (1.1) είναι η

$$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n = \beta_i \ ,$$

ενώ η i-στή εξίσωση του καινούριου συστήματος είναι

$$k\alpha_{i1}x_1 + \cdots + k\alpha_{in}x_n = k\beta_i \ .$$

Εύκολα επιβεβαιώνει κανείς ότι οι λύσεις των δύο συστημάτων είναι ακριβώς οι ίδιες. Παρατηρούμε ότι ο επαυξημένος πίνακας του καινούριου συστήματος προκύπτει από τον παλιό *πολλαπλασιάζοντας* την i-στή γραμμή με k. Στην επόμενη ενότητα θα ονομάσουμε αυτή τη πράξη στις γραμμές του πίνακα *στοιχειώδη πράξη γραμμών τύπου 3*.

Τέλος αν στην i-στή εξίσωση του συστήματος (1.1) προσθέσουμε k φορές την l-στή εξίσωση του συστήματος (1.1) προκύπτει ένα καινούριο σύστημα που διαφέρει από το παλιό μόνο στην i-στή εξίσωση που τώρα γίνεται

$$(\alpha_{i1} + k\alpha_{l1})x_1 + \cdots + (\alpha_{in} + k\alpha_{ln})x_n = \beta_i + k\beta_l \ .$$

Και πάλι τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Πράγματι αν $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ είναι λύση του συστήματος (1.1) αρκεί να βεβαιώσουμε ότι $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ικανοποιεί την i-στή γραμμή του νέου συστήματος. Αφού $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ είναι λύση του συστήματος (1.1) έχουμε ότι

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i \tag{1.4}$$

και

$$\alpha_{l1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{ln}\xi_n = \beta_l \ .$$

Έπεται ότι

$$k\alpha_{l1}\xi_1 + \cdots + k\alpha_{ln}\xi_n = k\beta_l \ . \tag{1.5}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1.4) και (1.5) προκύπτει ότι

$$(\alpha_{i1} + k\alpha_{l1})\xi_1 + \cdots + (\alpha_{in} + k\alpha_{ln})\xi_n = \beta_i + k\beta_l \ .$$

Για το αντίστροφο, δηλαδή ότι μία λύση του νέου συστήματος είναι και λύση του παλιού αρκεί να παρατηρήσουμε ότι από το νέο σύστημα μπορούμε να πάμε πίσω στο παλιό *αφαιρώντας* από την i-στή εξίσωση k φορές την l-στή εξίσωση, και άρα το έχουμε ήδη αποδείξει(!) με το προηγούμενο βήμα. Ο επαυξημένος πίνακας του καινούριου συστήματος προκύπτει από τον παλιό *προσθέτοντας* στην i-στή γραμμή k φορές την l-στή γραμμή. Στην επόμενη ενότητα θα ονομάσουμε αυτή τη γραμμοπράξη *στοιχειώδη πράξη γραμμών τύπου 1*. Συγκεντρώνουμε τις παρατηρήσεις μας στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα με συντελεστές από το $\Bbbk$. Αν ο πίνακας $[A'|B']$ προκύπτει από τον πίνακα $[A|B]$ μετά από μία από τις επόμενες γραμμοπράξεις:*

- *αντιμετάθεση δύο γραμμών*
- *πολλαπλασιασμό μίας γραμμής με κάποιο μη μηδενικό στοιχείο του $\Bbbk$*
- *άθροισμα σε μία γραμμή πολλαπλάσιο μίας άλλης*

τότε το γραμμικό σύστημα $A'X = B'$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το σύστημα $AX = B$.

Όταν όλες οι σταθερές είναι 0, τότε γράφουμε $B = \mathbf{0}$ και το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ λέγεται **ομογενές** (homogeneous). Σημειώνουμε μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των ομογενών συστημάτων:

Πρόταση 1.1.3. *Έστω το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{0}$ με συντελεστές από το σώμα $\Bbbk$. Τότε $(0, \ldots, 0)$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$ και $AX = \mathbf{0}$ είναι πάντα συμβατό. Έστω $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ δύο λύσεις. Τότε $kP + tQ$ είναι επίσης λύση του ομογενούς συστήματος για κάθε $k, t \in \Bbbk$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η i-στή εξίσωση του συστήματος $AX = 0$ είναι

$$\alpha_{i1}\, x_1 + \alpha_{i2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{in}\, x_n = 0 \ .$$

Είναι φανερό ότι

$$\alpha_{i1}\, 0 + \alpha_{i2}\, 0 + \cdots + \alpha_{in}\, 0 = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

και άρα $(0,\dots,0)$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$. Παρατηρούμε ότι $kP + tQ = (kp_1 + tq_1, \dots, kp_n + tq_n)$. Για να δείξουμε λοιπόν ότι $kP + tQ$ είναι λύση του $AX = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\alpha_{i1}\,(kp_1 + tq_1) + \cdots + \alpha_{in}\,(kp_n + tq_n) = 0\ .$$

Αφού P, Q είναι λύσεις του $AX = \mathbf{O}$ προκύπτει ότι

$$\alpha_{i1}\,p_1 + \cdots + \alpha_{in}\,p_n = 0\ ,$$

και

$$\alpha_{i1}\,q_1 + \cdots + \alpha_{in}\,q_n = 0\ .$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο ισότητες με k και t αντίστοιχα και προσθέτοντας βρίσκουμε την ζητούμενη ισότητα. □

Ασκήσεις ενότητας 1.1

1. Να βρείτε τους επαυξημένους πίνακες των συστημάτων:

   i) $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$ ii) $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$

2. Να βρείτε τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Αν $(1,2,3)$ και $(1,5,6)$ είναι δύο λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ να βρείτε τις πιθανές διαστάσεις των πινάκων A και X και να βρείτε 3 άλλες λύσεις.

4. Να βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ όταν A είναι ο μηδενικός 3×4 πίνακας, δηλαδή ο πίνακας με 3 γραμμές και 4 στήλες που κάθε του στοιχείο είναι ίσο με 0.

5. Αν $(1,2,3)$ είναι λύση του συστήματος $AX = B$ να βρείτε

   (α′) τις πιθανές διαστάσεις των πινάκων A και B

(β′) μία λύση του συστήματος $A'X = B'$ όπου A' και B' προκύπτουν από τους A και B αντίστοιχα αν πολλαπλασιάσουμε τη πρώτη γραμμή τους με 2

(γ′) μία λύση του συστήματος $A'X = B$ όπου A' προκύπτει από τον A αν αντιμεταθέσω τη πρώτη και τη τρίτη στήλη του A.

1.2 Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές ενός πίνακα. Με τη βοήθεια των στοιχειωδών πράξεων γραμμών θα ορίσουμε τον αλγόριθμο του Gauss προκειμένου από δοθέν πίνακα D να μεταβούμε σε απλούστερο πίνακα που έχει όσο το δυνατό περισσότερα μηδενικά στοιχεία. Ο πίνακας αυτός θα μας βοηθήσει στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με επαυξημένο πίνακα τον πίνακα D.

Ορισμός 1.2.1. *Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ενός πίνακα A είναι οι παρακάτω:*

(τύπου 1) *αντικατάσταση της i-γραμμής Γ_i με τη γραμμή $\Gamma_i + a\Gamma_j$, για κάποιο $a \in K$ και για $1 \leq i, j \leq n$. Συμβολισμός: $\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j$.*

(τύπου 2) *αντιμετάθεση της i-γραμμής με την j-γραμμή, $1 \leq i, j \leq n$. Συμβολισμός: $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$.*

(τύπου 3) *αντικατάσταση της γραμμής Γ_i με τη γραμμή $b\Gamma_i$, για $1 \leq i \leq n$ και για κάποιο $b \neq 0$ του K. Συμβολισμός: $\Gamma_i \to b\Gamma_i$.*

Τονίζουμε ότι στη πράξη τύπου 1, η σειρά των δεικτών έχει μεγάλη σημασία. Χρησιμοποιούμε κάποιο πολλαπλάσιο της γραμμής Γ_j για να αλλάξουμε τη γραμμή Γ_i και το αποτέλεσμα πρέπει να αντικαταστήσει τη γραμμή Γ_i. Στα παρακάτω παραδείγματα γράφουμε $A \to B$ όταν μεταβαίνουμε από τον πίνακα A στον πίνακα B με κάποια στοιχειώδη πράξη γραμμών.

Παραδείγματα 1.2.2.

α) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

β) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

γ) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to 2\Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ενός πίνακα για να μεταβούμε σε ένα νέο απλούστερο πίνακα. Ο στόχος μας είναι να φέρουμε τον πίνακα σε **κλιμακωτή μορφή γραμμών** όπως εξηγούμε παρακάτω.

Ορισμός 1.2.3. *Ο πίνακας είναι σε* **κλιμακωτή μορφή γραμμών** *(row echelon form) αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Σε κάθε γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο από τα αριστερά είναι 1, και το ονομάζουμε* **καθοδηγητική μονάδα** *(leading one).*

2. *Κάθε καθοδηγητική μονάδα είναι δεξιότερα των καθοδηγητικών μονάδων των παραπάνω γραμμών από αυτή που ανήκει, δηλ. τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με την καθοδηγητική μονάδα και είναι κάτω από αυτήν, είναι ίσα με μηδέν.*

3. *Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, είναι οι τελευταίες γραμμές του πίνακα.*

Ένας πίνακας είναι σε **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών** *(row reduced echelon form) αν είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και αν τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με την καθοδηγητική μονάδα και είναι πάνω από αυτήν, είναι ίσα με το μηδέν.*

Παραδείγματα 1.2.4. Στα παρακάτω παραδείγματα θα κυκλώσουμε τις καθοδηγητικές μονάδες για να τις ξεχωρίζουμε.

- Ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας $\mathbf{0}$ έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 0. Ο πίνακας $\mathbf{0}$ είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

- Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

- Οι πίνακες

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε τον **αλγόριθμο του Gauss** (Gaussian elimination algorithm). Ξεκινάμε με τη πρώτη γραμμή. Θα δημιουργήσουμε την καθοδηγητική μονάδα (όταν αυτό είναι εφικτό) με τη χρήση των στοιχειωδών πράξεων γραμμών τύπου 2 και 3. Στη συνέχεια θα μετατρέψουμε τα στοιχεία κάτω από την καθοδηγητική μονάδα σε μηδέν με τη χρήση της στοιχειώδους πράξης γραμμών τύπου 1, ώστε να φέρουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Όταν η διαδικασία αυτή ολοκληρωθεί θα προχωρήσουμε στην επόμενη γραμμή. Στον παρακάτω αλγόριθμο τα βήματα 2-5 φέρνουν έναν μη μηδενικό πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, ενώ στη συνέχεια το βήμα 6 ολοκληρώνει τη διαδικασία φέρνοντας τον πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Αλγόριθμος του Gauss.

- **Βήμα 1** Αν ο $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, τότε συνεχίζουμε με το Βήμα 6.

- **Βήμα 2** Αν $a_{11} \neq 0$ προχωράμε στο Βήμα 3 με $j = 1$. Διαφορετικά για $i = 2, \ldots, m$ ελέγχουμε αν υπάρχει κάποια γραμμή με μη μηδενικό στοιχείο στη πρώτη στήλη. Αν υπάρχει μία τέτοια γραμμή τότε εφαρμόζουμε $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_i$. Αν δεν υπάρχει τέτοια γραμμή τότε βρίσκουμε το μικρότερο j έτσι ώστε $a_{ij} \neq 0$ για κάποιο i: με άλλα λόγια όταν $l < j$ θα πρέπει $a_{tl} = 0$ για κάθε $t = 1, \ldots, m$. Αν $i \neq 1$ τότε εφαρμόζουμε $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_i$.

- **Βήμα 3** Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a_{1j}$ για να κατασκευάσουμε την καθοδηγητική μονάδα στη πρώτη γραμμή: $\Gamma_1 \to 1/a_{1j}\Gamma_1$.

- **Βήμα 4** Αφαιρούμε πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τις χαμηλότερες γραμμές για να δημιουργήσουμε μηδενικά κάτω από την καθοδηγητική μονάδα: $\Gamma_i \to \Gamma_i - a_{ij}\Gamma_1$ για $i = 2, \ldots m$.

Τα βήματα 2, 3, 4 ολοκληρώνουν τις μετατροπές που χρησιμοποιούν την πρώτη γραμμή. Όλες οι επόμενες στοιχειώδεις πράξεις γίνονται στις υπόλοιπες γραμμές και δε θα επηρεάσουν την πρώτη γραμμή ή τα μηδενικά κάτω από τη καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής.

- **Βήμα 5** Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-4 στον υποπίνακα του A που αποτελείται από τις γραμμές $2, \ldots, n$ και τις στήλες $1, \ldots m$.

- **Βήμα 6** Έστω ότι η τελευταία μη μηδενική γραμμή είναι η Γ_i. Αν η καθοδηγητική μονάδα είναι στην t-στήλη, θα αφαιρέσουμε το κατάλληλο πολλαπλάσιο της Γ_i από τις προηγούμενες γραμμές, δηλ.

$$\Gamma_j \to \Gamma_j - a'_{jt}\,\Gamma_i\,, \quad 1 \le j \le i-1.$$

Συνεχίζουμε κινούμενοι προς τα πάνω.

Παραδείγματα 1.2.5.

1. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Gauss προκειμένου να φέρουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to -\frac{1}{3}\Gamma_3]{} A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Ο A' είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Για να φέρουμε τον A' σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή την τρίτη:

$$A' \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3]{} A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Ο A'' είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

2. Ο πίνακας

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ήδη σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ο αλγόριθμος του Gauss δεν μπορεί να συνεχιστεί.

3. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss στον παρακάτω πίνακα B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\frac{1}{2}\Gamma_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{3}{2}\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to -2\Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{2}{3}\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Το πρώτο βήμα σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Gauss είναι η πράξη γραμμών $\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1$. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα η πρώτη γραμμή του A να αντικατασταθεί με τη γραμμή $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Θα καθυστερήσουμε την εμφάνιση κλασμάτων ανταλλάσοντας Γ_1 με Γ_2.

$$A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5. Θεωρούμε τον 3×3-πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Θα φέρουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \frac{1}{4}\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε τη καθοδηγητική μονάδα της δεύτερης γραμμής (στη δεύτερη στήλη) για να κάνουμε μηδενικά ταυτόχρονα στη πρώτη και τρίτη γραμμή. Ο τρόπος αυτός συνήθως απαιτεί περισσότερες πράξεις.

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to -\frac{1}{8}\Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_2 \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο αλγόριθμος του Gauss *εγγυάται* ότι θα φέρει τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Είναι όμως φανερό ότι κάποιες φορές μπορούμε να φέρουμε έναν πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών χρησιμοποιώντας διαφορετικές στοιχειώδεις γραμμοπράξεις. Αναφέρουμε την επόμενη πρόταση χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.2.6. *Έστω ότι οι πίνακες A_1, A_2 είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών και ότι προκύπτουν από τον πίνακα A μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Τότε $A_1 = A_2$. Ο μοναδικός πίνακας σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών που προκύπτει από τον A με την εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών λέγεται η* **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του** A.

Δεν ισχύει το ίδιο αν στην παραπάνω πρόταση δεν είχαμε την απαίτηση οι δύο πίνακες να είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών αλλά ζητούσαμε οι πίνακες να είναι μόνο σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στο Παράδειγμα 1.2.5 (1) ο πίνακας A' δεν είναι ίσος με τον πίνακα A'' παρόλο που και οι δύο είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Όμως εκείνο όμως που μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα είναι ότι ο αριθμός των καθοδηγητικών μονάδων σε δύο τέτοιους πίνακες θα είναι πάντα ο ίδιος.

Ορισμός 1.2.7. *Έστω $A \in M_{n\times m}(K)$. Η* **βαθμίδα** *(rank) του πίνακα A λέγεται το πλήθος των καθοδηγητικών μονάδων στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A. Η βαθμίδα του A συμβολίζεται με* $\operatorname{rank}(A)$.

Παραδείγματα 1.2.8.

1. $\operatorname{rank}(\mathbf{0}) = 0$.
2. Στο Παράδειγμα 1.2.5 $\operatorname{rank}(B) = 3$.

Έστω A' η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $m \times n$ πίνακα A. Κάθε μη μηδενική γραμμή του A' έχει καθοδηγητική μονάδα. Άρα ο αριθμός των καθοδηγητικών μονάδων στον A' είναι μικρότερος ή ίσος του αριθμού γραμμών του A και $\operatorname{rank}(A) \leq m$. Επίσης σύμφωνα με τον ορισμό κάθε στήλη του A' έχει το πολύ μία καθοδηγητική μονάδα. Είναι όμως δυνατόν μία στήλη να μην έχει όλα τα στοιχεία της ίσα με μηδέν και κανένα από τα στοιχεία της να μην είναι καθοδηγητική μονάδα. Άρα ο αριθμός των καθοδηγητικών μονάδων στον A' είναι μικρότερος ή ίσος του αριθμού στηλών του A και $\operatorname{rank}(A) \leq n$. Συνοψίζοντας

$$\text{Αν } A \text{ είναι } m \times n \text{ τότε } \operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n)\ .$$

Όποια διαδικασία και να επιλέξουμε για να φέρουμε τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών ενός πίνακα, είναι σημαντικό να 'κλειδώνεται' η θέση των γραμμών στις οποίες έχει ήδη δημιουργηθεί καθοδηγητική μονάδα και που ικανοποιούν τις ιδιότητες 1 και 2 του Ορισμού 1.2.3. Παραπάνω ορίσαμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ενός πίνακα A και τον φέραμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss.

Οι **στοιχειώδεις πράξεις στηλών** ενός πίνακα A και η **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών** του A ορίζονται ανάλογα. Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος του Gauss μπορεί να προσαρμοστεί για να φέρει τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών. Ο αναγνώστης παροτρύνεται να δώσει τους αντίστοιχους ορισμούς και να προσαρμόσει τον αλγόριθμο.

Ασκήσεις ενότητας 1.2

1. Να δείξετε ότι η γραμμοπράξη $\Gamma_1 = 2\Gamma_1 + 3\Gamma_2$ αντιστοιχεί σε συνδυασμό δύο στοιχειωδών γραμμοπράξεων.

2. Να φέρετε τους παρακάτω πίνακες σε κλιμακωτή μορφή και σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 9 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Να υπολογίσετε τη βαθμίδα των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός πράξεων που απαιτούνται στο αλγόριθμο του Gauss; Έστω η παρακάτω παραλλαγή του αλγορίθμου του Gauss: ξεκινάμε από τη πρώτη γραμμή, κατασκευάζοντας τη καθοδηγητική μονάδα με τα μηδενικά από κάτω. Για τη δεύτερη μη μηδενική γραμμή όμως, αφού κατασκευασθεί η καθοδηγητική μονάδα μετατρέπουμε *όλα* τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης και πάνω και κάτω σε 0. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός πράξεων που απαιτούνται για να μετατραπεί ένας πίνακας σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών με αυτόν τον τρόπο;

5. Να δείξετε ότι σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Gauss θα χρειάζονται 6 στοιχειώδεις πράξεις γραμμών για να φέρουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Να δείξετε ότι μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών με 3 στοιχειώδεις πράξεις γραμμών.

1.3 Επίλυση Γραμμικών συστημάτων

Είμαστε έτοιμοι να επιχειρήσουμε την συστηματική επίλυση γραμμικών συστημάτων. Μέχρι τώρα έχουμε δει ότι το γραμμικό σύστημα $AX = B$ με συντελεστές από ένα σώμα $\mathbb{k}$ αποτυπώνεται στον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$. Έχουμε δει ότι αν στον πίνακα $[A \mid B]$ εφαρμόσουμε κάποια από τις στοιχειώδεις γραμμοπράξεις τότε το σύστημα που αντιστοιχεί στον καινούριο πίνακα έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό σύστημα, (βλ. Πρόταση 1.1.2). Γνωρίζουμε επίσης πως να φέρουμε τον πίνακα $[A \mid B]$ σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών με τον αλγόριθμο του Gauss. Τέλος μπορούμε να αναγνωρίσουμε από την κλιμακωτή μορφή γραμμών ποια συστήματα δεν είναι συμβατά, (βλ. Παράδειγμα 1.1.1). Συγκεντρώνουμε αυτές τις παρατηρήσεις στον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος εύρεσης λύσεων για το σύστημα $AX = B$, όπου A είναι $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{k}$.

- **Βήμα 1** Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τον φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή γραμμών $[A' \mid B']$. Αν μία οποιαδήποτε γραμμή του $[A' \mid B']$ είναι της μορφής

$$[\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad | \quad a\ ]$$

  όπου $a \neq 0$ τότε το αρχικό σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

- **Βήμα 2** Φέρνουμε τον $[A'|B']$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[A''|B'']$. Οι άγνωστοι που αντιστοιχούν στις στήλες χωρίς καθοδηγητικές μονάδες γίνονται παράμετροι και μπορούν να πάρουν χωρίς περιορισμό οποιαδήποτε τιμή από το σώμα $\mathbb{k}$. Βρίσκουμε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του $[A''|B'']$ και λύνουμε ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.

- **Βήμα 3** Οι λύσεις είναι το σύνολο με στοιχεία n-ακολουθίες όπου σε κάθε ακολουθία, οι συντεταγμένες προκύπτουν από το Βήμα 2.

Τα παρακάτω παραδείγματα θα διαφωτίσουν τη διαδικασία εύρεσης λύσεων. Θα χρησιμοποιούμε '$\to$' για να συμβολίσουμε τη συνολική διαδικασία που φέρνει έναν πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Παραδείγματα 1.3.1.

α) Θα λύσουμε πάνω από το $\mathbb{R}$ το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 5x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{array}$$

Τότε

$$[A\,|\mathbf{O}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Το αρχικό σύστημα γίνεται ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & & & +4x_5 & = 0 \\ & & x_3 & & -\ x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +3x_5 & = 0 \end{array}$$

Οι μεταβλητές x_2, x_5 είναι παράμετροι. Λύνουμε ως προς x_1, x_3, x_4. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{array}{rl} x_1 & = 2x_2 - 4x_5 \\ x_3 & = x_5 \\ x_4 & = -3x_5 \end{array}$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το σύνολο

$$\{\ (2x_2 - 4x_5, x_2, x_5, -3x_5, x_5)\ :\ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(2x_2, x_2, 0, 0, 0) + (-4x_5, 0, x_5, -3x_5, x_5)\ :\ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-4, 0, 1, -3, 1)\ :\ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Οι λύσεις του ιδίου συστήματος πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο

$$\{x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-4, 0, 1, -3, 1)\ :\ x_2, x_5 \in \mathbb{C}\}$$

β) Θα λύσουμε πάνω από το $\mathbb{R}$ το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3. \end{array}$$

Έστω A ο πίνακας των συντελεστών και B ο πίνακας των σταθερών. Τότε

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 5 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid B]) = 4$ και το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & & -1/3\,x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & & & & +8/3\,x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & & + \quad x_5 & = & 1 \\ & & & & & x_4 & + \quad x_5 & = & 1. \end{array}$$

Λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις ως προς x_1, x_2, x_3, x_4. Οι λύσεις του $AX = B$ είναι το σύνολο

$$\{\ (1,1,1,1,0) + t\ (1/3, -8/3, -1, -1, 1) : \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{O}$ είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} &\{\ (1/3x_5, -8/3x_5, -x_5, -x_5, x_5)\ /\ x_5 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_5(1/3, -8/3, -1, -1, 1) : \quad t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

γ) Θα λύσουμε πάνω από το $\mathbb{R}$ το γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του $[A \mid B']$ είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Το αρχικό σύστημα γίνεται ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rrcr} x_2 & +x_4 & = & 3 \\ x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array}$$

Οι μεταβλητές είναι x_1, x_4. Λύνουμε ως προς x_2, x_3. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 3 - x_4 \\ x_3 & = & -1 - x_4 \end{array}$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το σύνολο

$$\{(x_1, 3 - x_4, -1 - x_4, x_4) : \ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x_1(1,0,0,0) + x_4(0,-1,-1,1) + (0,3,-1,0) : \ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

δ) Θα βρούμε τις λύσεις του γραμμικού συστήματος $AX = B$ στο $\mathbb{R}^2$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του $[A \mid B']$ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα γίνεται ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -1 \end{array}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι το $(3, -1)$.

ε) Θα λύσουμε πάνω από το $\mathbb{C}$ τα γραμμικά συστήματα $AX = \mathbf{0}$, $AX = B$, $AX = C$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Θα λύσουμε τα συστήματα αυτά ταυτόχρονα αφού έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Θεωρούμε τον επαυξημένο (κατά τρεις στήλες) πίνακα $\left[A \mid \mathbf{0}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right]$ και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & | & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έπεται ότι

- το $(0,0,0)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος $AX = \mathbf{0}$,
- το σύστημα $AX = B$ δεν είναι συμβατό.
- το $(3,-1,i)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος $AX = C$.

Αναλύοντας τα παραπάνω παραδείγματα καταλήγουμε στο επόμενο γενικό συμπέρασμα:

Πρόταση 1.3.2. *Το γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $AX = B$ με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{k}$ έχει λύση αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid B])$. *Ιδιαίτερα, αν* $\operatorname{rank}(A) = m$, *τότε το σύστημα $AX = B$ είναι πάντα συμβατό. Εάν το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό και* $\operatorname{rank}(A) = n$ *τότε το σύστημα έχει μία μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι εύκολη και παραλείπεται. □

Υπάρχουν λοιπόν τρεις δυνατότητες για το σύστημα $AX = B$ με n αγνώστους:

• αν $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}([A \mid B])$ τότε το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο,

• αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid B]) = n$ τότε το σύστημα $AX = B$ έχει μία μοναδική λύση,

• αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid B]) < n$ τότε το σύστημα $AX = B$ έχει άπειρες λύσεις. Το πλήθος των παραμέτρων είναι $n - \operatorname{rank}(A)$.

Είδαμε στη πρώτη ενότητα ότι το σύστημα $AX = \mathbf{O}$ είναι πάντα συμβατό αφού $(0,\ldots,0)$ είναι λύση αυτού του συστήματος. Παρατηρούμε τώρα ότι οι γραμμοπράξεις δεν επηρεάζουν τη τελευταία στήλη: τα στοιχεία της μετά από κάθε γραμμοπράξη θα παραμένουν ίσα με το 0. Έτσι για την επίλυση του $AX = \mathbf{O}$ μπορούμε να αγνοήσουμε την τελευταία στήλη των μηδενικών. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{O}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο $\operatorname{rank}(A) = n$ όπου n είναι ο αριθμός των στηλών του A.

Ασκήσεις ενότητας 1.3

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

i) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 3 \end{array}$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 7\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 8\,x_4 & - & 4\,x_5 & = & -3 \\ -3\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 3\,x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

3. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε το σύστημα $AX = B$ να έχει λύση.

4. Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος $AX = B$ έχει κλιμακωτή μορφή γραμμών τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Να λυθεί το σύστημα. Να βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Για ποιούς πίνακες C το σύστημα $AX = C$ δεν έχει λύση;

5. Να βρείτε τις λύσεις των ομογενών συστημάτων με πίνακες συντελεστών τους πίνακες της άσκησης 2, ενότητα 1.2.

1.4 Εφαρμογές

Οι εφαρμογές αυτές της ενότητας είναι γεωμετρικές. Πρώτα θα δώσουμε κάποια σχόλια σχετικά με τις λύσεις ενός γραμμικού συστήματος $AX = B$ με m εξισώσεις και n αγνώστους, όπου A είναι ένας πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{R}$. Οι πιθανές λύσεις είναι σημεία του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ έχουμε a priori n βαθμούς ελευθερίας. Κάθε φορά που ζητάμε τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ να ικανοποιούν μία μη μηδενική γραμμική εξίσωση τότε επιβάλλουμε μία συνθήκη και μειώνουμε πιθανά τους βαθμούς ελευθερίας. Οι στοιχειώδεις γραμμοπράξεις

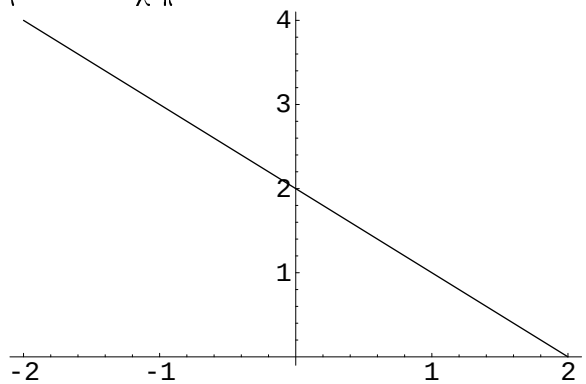
στον επαυξημένο πίνακα ξεκαθαρίζουν ποιές από τις m συνθήκες είναι πραγματικά διαφορετικές και αν αυτές μπορούν να ικανοποιηθούν. Αν το σύστημα είναι ασύμβατο τότε υπάρχουν συνθήκες που δεν μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα. Αν το σύστημα είναι συμβατό, τότε υπάρχουν σημεία του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλες τις συνθήκες. Αν η λύση του $AX = B$ είναι μοναδική δηλ. ακριβώς ένα **σημείο** του $\mathbb{R}^n$ τότε στη λύση δεν εμφανίζεται καμία παράμετρος, και $\text{rank}(A) = n$. Όταν στην λύση υπάρχει μία μόνο παράμετρος και $\text{rank}(A) = n - 1$ τότε υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας και το σύνολο των λύσεων είναι μία **ευθεία** του $\mathbb{R}^n$. Αν στην λύση υπάρχουν ακριβώς δύο παράμετροι τότε υπάρχουν δύο βαθμοί ελευθερίας και το σύνολο των λύσεων είναι ένα **επίπεδο** του $\mathbb{R}^n$. Τέλος αν στην λύση υπάρχουν $n - 1$ παράμετροι τότε $\text{rank}(A) = 1$ και το σύνολο των λύσεων ονομάζεται **υπερεπίπεδο** (hyperplane) του $\mathbb{R}^n$. Αυτό συμβαίνει όταν στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του συστήματος υπάρχει μόνο μία μη μηδενική γραμμή και άρα στην ουσία μία μόνο συνθήκη.

Παραδείγματα 1.4.1.

1. Η εξίσωση $x + y = 2$ αντιστοιχεί σε μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ αφού οι λύσεις της εξίσωσης δίνουν το παρακάτω σύνολο:

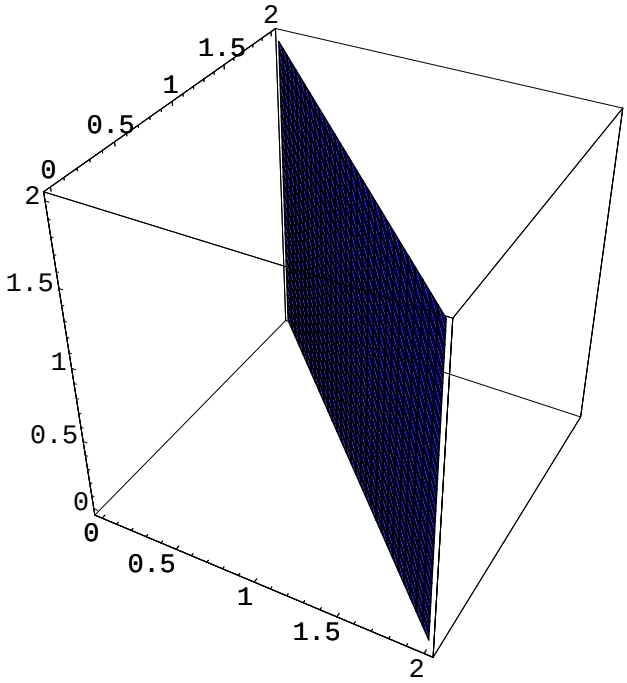
$$\{(2 - y, y) : \quad y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0) + y(-1, 1) : \ y \in \mathbb{R}\} \ ,$$

βλέπε το παρακάτω σχήμα:



2. Η ίδια εξίσωση $x + y = 2$ αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ αφού οι λύσεις της εξίσωσης δίνουν το παρακάτω σύνολο:

$$E = \{(2-y, y, z) : \quad y \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0, 0)+y(-1, 1, 0)+z(0, 0, 1) : \ y, z \in \mathbb{R}\} \ .$$



Το επίπεδο E τέμνει το xy επίπεδο ($z = 0$) στην ευθεία L που προκύπτει ως το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος $x + y = 2,\ z = 0$:

$$L = \{(2 - y, y, 0) : \quad y \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0, 0) + y(-1, 1, 0) : \ y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Επιβεβαιώνουμε εύκολα ότι τα σημεία $A(2, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ και $C(2, 0, 1)$ ανήκουν στο E ενώ A, B ανήκουν και στην L.

3. Οι εξισώσεις $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ και $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ περιγράφουν δύο επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$. Για να βρούμε την τομή τους, θα βρούμε τα σημεία που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Θα λύσουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 2. \end{array}$$

Για τον επαυξημένο πίνακα έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \ .$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στις εξισώσεις

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5/2 - 2x_2 \\ x_3 & = & -1/2 \ . \end{array}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο

$$L = \{\ (5/2, 0, -1/2) + t(-2, 1, 0)\ :\ t \in \mathbb{R}\}\ ,$$

και η τομή των δύο επιπέδων είναι η ευθεία L. Παρατηρούμε ότι η ευθεία L διέρχεται από τα σημεία $(5/2, 0, -1/2)$ και $(1/2, 1, -1/2)$. Πράγματι αντικαθιστώντας $t = 0$ βρίσκουμε το σημείο $(5/2, 0, -1/2)$ ενώ για $t = 1$ βρίσκουμε το $(1/2, 1, -1/2)$. Για κάθε τιμή του t βρίσκουμε και ένα σημείο επί της L.

4. Θα υπολογίσουμε την τομή των τριών επιπέδων $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ και $2x_1 + 3x_2 = 2$ του $\mathbb{R}^3$. Για τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 2. \end{array}$$

ισχύει ότι

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

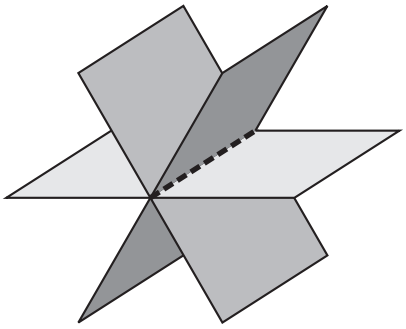
Το παραπάνω σύστημα λοιπόν δεν είναι συμβατό, τα τρία επίπεδα δε διέρχονται από κανένα κοινό σημείο και η τομή τους είναι το κενό.

Στη περίπτωση των 3 επιπέδων στο $\mathbb{R}^3$ συμπεραίνουμε τα εξής:

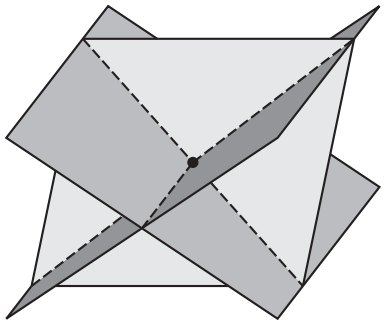
Παρατηρήσεις 1.4.2. Έστω 3 επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$. Η πληροφορία που ενέχουν τα επίπεδα συγκεντρώνεται σε ένα σύστημα $AX = B$ όπου A είναι ένας 3×3 πίνακας. Σημειώνουμε ότι $A \neq 0$ και ότι $\operatorname{rank}(A) \geq 1$.

- Η τομή των 3 επιπέδων στο $\mathbb{R}^3$ είναι το κενό όταν $AX = B$ δεν είναι συμβατό.
- Η τομή των επιπέδων είναι ένα μοναδικό σημείο όταν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A \mid B] = 3$, (βλ. Σχήμα 2).
- Η τομή των επιπέδων είναι μία ευθεία όταν $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid B] = 2$ (βλ. Σχήμα 1).
- Η τομή των επιπέδων είναι ένα επίπεδο όταν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A \mid B] = 1$ (στην περίπτωση αυτήν όλα τα επίπεδα ταυτίζονται).

Η τομή δεν μπορεί να είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^3$ αφού $\operatorname{rank} A \geq 1$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Στη συνέχεια με τη βοήθεια των τεχνικών επίλυσης γραμμικών συστημάτων θα επιχειρήσουμε να μοντελοποιήσουμε κάποια δεδομένα. Το γράφημα ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για $0 \leq i \leq n$ και $a_n \neq 0$ n ονομάζεται **πολυωνυμική καμπύλη** βαθμού n.

Παράδειγμα 1.4.3. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(3,2)$ και $C(5,-8)$. Θα βρούμε μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 3 που διέρχονται από αυτά τα σημεία.

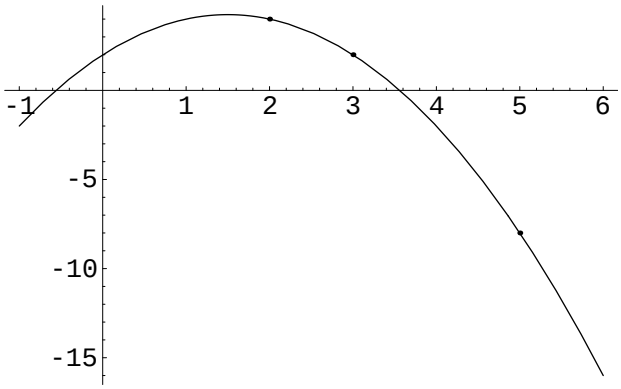
1. Έστω $y = \alpha_0 + a_1x + a_2x^2$ μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2. Η καμπύλη αυτή διέρχεται από τα A, B, C εάν οι συντετατγμένες των A, B, C ικανοποιούν την εξίσωση της καμπύλης. Άρα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα και οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_0 1 + \ a_1 2 + \ a_2 2^2 &= \ \ 4 \\ a_0 1 + \ a_1 3 + \ a_2 3^2 &= \ \ 2 \\ a_0 1 + \ a_1 5 + \ a_2 5^2 &= -8. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2. Παρακάτω παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 25 & -8 \end{array}\right] \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Έπεται ότι το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, την τριάδα $(2, 3, -1)$. Δηλαδή αν $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ το σύστημα είναι συμβατό και άρα η καμπύλη $y = 2 + 3x - x^2$ διέρχεται από τα σημεία A, B, C, (βλ. επόμενο σχήμα).



2. Έστω τώρα ότι η πολυωνυμική καμπύλη είναι βαθμού το πολύ 3: $y = \alpha_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Τα σημεία A, B, C ανήκουν στην καμπύλη y αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξισώσεις

$$\begin{array}{rcl} a_0 1 + a_1 2 + a_2 4 + a_3 8 & = & 4 \\ a_0 1 + a_1 3 + a_2 9 + a_3 27 & = & 2 \\ a_0 1 + a_1 5 + a_2 25 + a_3 125 & = & -8\,. \end{array}$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα είναι η

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 \end{array}\right].$$

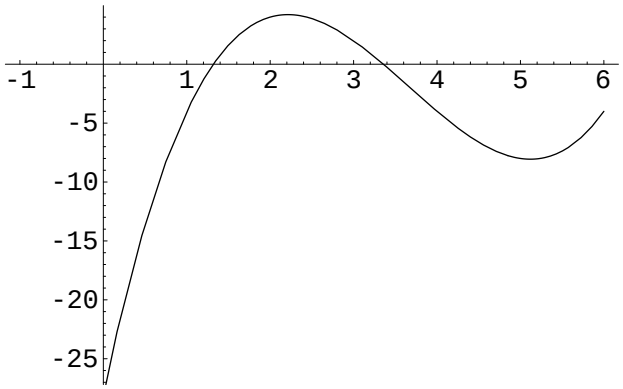
Θέτουμε $a_3 = t$ και βρίσκουμε ότι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος αποτελούν το σύνολο

$$\{(2 - 30t, 3 + 31t, -1 - 10t, t) : \ t \in \mathbb{R}\}\ .$$

Όταν $t = 0$ έχουμε τη λύση $(2, 3, -1, 0)$ που αντιστοιχεί στην μοναδική καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία, δηλ. την καμπύλη του πολυωνύμου $y = 2 + 3x - x^2$. Για κάθε άλλο $t \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 3 που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία και άρα υπάρχουν άπειρες τέτοιες καμπύλες. Η γενική μορφή του πολυωνύμου που αντιστοιχεί σε μία τέτοια καμπύλη είναι

$$y = (2 - 30t) + (3 + 31t)x - (1 + 10t)x^2 + tx^3\ .$$

Για παράδειγμα όταν $t = 1$ έχουμε το πολυώνυμο $y = -28+34x-11x^2+x^3$ και τη καμπύλη του επόμενου σχήματος:



Ασκήσεις ενότητας 1.4

1. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων $x + 2y - z = 0$, $x - y + z = 1$.

2. i) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$.

   ii) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 3 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 6)$.

   ii) Να βρεθεί μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 4 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 6)$.

1.5 Επίλογος

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε άλλους δύο τρόπους επίλυσης του γραμμικού συστήματος $AX = B$ όταν ο πίνακας των συντελεστών A είναι $n \times n$ και $\text{rank}(A) = n$ αφού πρώτα ορίσουμε την ορίζουσα του A και τις πράξεις πινάκων. Συγκεκριμένα θα δούμε ότι

1. υπάρχει ένας πίνακας που συμβολίζεται A^{-1} και ονομάζεται **αντίστροφος** του A, και που δίνει τις λύσεις μέσα από το **γινόμενο** $A^{-1}B = X$

2. κάθε συντετατγμένη της μοναδικής λύσης του συστήματος μπορεί επίσης να υπολογισθεί με την μέθοδο του Cramer ως το πηλίκο οριζουσών κατάλληλων πινάκων, βλ. Ενότητα 2.5.

Τονίζουμε ότι έχουν αναπτυχθεί διάφορες υπολογιστικοί μέθοδοι για την *αποτελεσματική* εύρεση λύσεων. Τέτοιοι αλγόριθμοι είναι

- η LU ανάλυση του πίνακα των συντελεστών A σε κάτω και άνω τριγωνικούς πίνακες (βλ. επόμενο κεφάλαιο) και
- η QR ανάλυση του πίνακα των συντελεστών A που χρειάζεται τη θεωρία των ιδιοτιμών και της εύρεσης ορθογωνίων βάσεων, (βλ. τελευταίο κεφάλαιο).

Το Παράδειγμα 1.4.3 αναφέρεται σε τρία σημεία του $\mathbb{R}^2$: είδαμε ότι από αυτά τα τρία συγκεκριμένα στοιχεία περνά ακριβώς μία παραβολή και άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού ≥ 3. Μπορούμε γενικότερα να δείξουμε ότι αν $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ είναι n σημεία στο $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $x_i \neq x_j$ όταν $i \neq j$, τότε υπάρχει ακριβώς μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού $n-1$ που περνά από τα n αυτά σημεία και άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού $m \geq n$ που διέρχονται από αυτά. Ο πίνακας που χρησιμοποιείται είναι της μορφής

$$Van = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots x_1^{n-1} & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots x_2^{n-1} & \cdots & x_n^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_1^2 & \cdots x_n^{n-1} & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$$

και ονομάζεται πίνακας του Vandermonde. Στο επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τη θεωρία των οριζουσών θα δούμε ότι $\operatorname{rank}(Van) = n$.

Θα μας απασχολήσει επίσης από πρακτική άποψη το ζήτημα της προσέγγισης λύσεων και της εύρεσης της 'καλύτερα δυνατής λύσης '. Τι εννοούμε με αυτό. Έστω ότι το γραμμικό σύστημα $AX = B$ είναι μη συμβατό. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί γιατί οι τιμές των στοιχείων του A ή και του B δεν έχουν δοθεί με απόλυτη ακρίβεια, είτε από λάθος μέτρησης είτε εξαιτίας άλλων περιορισμών του υπολογιστικού συστήματος. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε τη τιμή Z που ενώ δεν είναι λύση του συστήματος $AX = B$, δηλ. $AZ \neq B$, το Z έχει την ιδιότητα να 'μοιάζει' όσο το δυνατόν με λύση, με άλλα λόγια η 'απόσταση' AZ από το B να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Μία μέθοδος για να γίνει αυτό είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Θα την συζητήσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο.

Τέλος θα αναφέρουμε πολύ σύντομα κάποια ιστορικά στοιχεία. Ήδη από το 300 π.Χ. οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι έλυναν προβλήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Οι Κινέζοι ανάμεσα στο 200 π.Χ. με 100 π.Χ. χρησιμοποίησαν πίνακες, π.χ. στα «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (Δυναστεία Han) για να λύσουν τέτοια προβλήματα και η μέθοδος που χρησιμοποίησαν είναι ουσιαστικά η μέθοδος απαλοιφής του Gauss). Από τότε στην ιστορία της Γραμμικής Άλγεβρας και των γραμμικών εξισώσεων υπήρξε επιμέρους και αργή πρόοδος. Ο Cardan στο βιβλίο του Ars Magna (το Μεγάλο Έργο) το 1545 δίνει έναν κανόνα που είναι ουσιαστικά ο κανόνας του Cramer για την επίλυση

2 εξισώσεων. Ο Cramer το 1750 δίνει τον γενικό κανόνα που είναι σήμερα γνωστός με το όνομά του στη προσπάθειά του ήταν να βρει την εξίσωση μίας καμπύλης που περνάει από δεδομένο αριθμό σημείων. Ο ίδιος ο Gauss χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο απαλοιφής και την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το 1801 για να λύσει το μυστήριο της τροχιάς του αστεροειδούς 'Δήμητρα' που παρατηρήθηκε στις αρχές του χρόνου από τον Ιταλό μοναχό Piazzi στο Παλέρμο για 41 ημέρες και μετά εξαφανίστηκε. Ο αστεροειδής 'Δήμητρα' βρέθηκε και πάλι στο τέλος του έτους πολύ κοντά στις συντεταγμένες που προέβλεψε ο Gauss. Η εργασία του Gauss το 1809 όπου παρουσιάζει την ανάλυσή του θεωρείται από τις πρώτες εργασίες στη μοντέρνα Γραμμική Άλγεβρα σχετικά με την επίλυση γραμμικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

2.1 Πράξεις πινάκων

Με $\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των $n\times m$-πινάκων με συντελεστές από το σώμα $\Bbbk$, όπου $\Bbbk=\mathbb{R}$ ή $\Bbbk=\mathbb{C}$. Όταν $n=m$, τότε γράφουμε $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ και $A\in\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ λέγεται **τετραγωνικός** (square) $n\times n$-πίνακας. Οι πίνακες θα οριοθετούνται με αγκύλες η παρενθέσεις. Έστω ότι $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$: εδώ το a_{ij} δηλώνει το στοιχείο του A στην i-στη γραμμή και j-στη στήλη. Μπορούμε να σκεφτούμε την i-γραμμή του A ως έναν $1\times m$ πίνακα Γ_i:

$$\Gamma_i=\left[\begin{array}{cccc}\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{im}\end{array}\right],$$

ενώ τη j-στήλη του A ως έναν $n\times 1$ πίνακα Σ_j:

$$\Sigma_j=\left[\begin{array}{c}\alpha_{j1}\\ \alpha_{j2}\\ \vdots\\ \alpha_{jn}\end{array}\right].$$

Αν $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ τότε οι πίνακες A, B λέγονται **ίσοι** αν $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ για $1\le i\le n$ και $1\le j\le m$.

Παραδείγματα 2.1.1.

1. Έστω $A=(a_{ij})$ όπου

$$A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{array}\right]\in\mathcal{M}_{2\times 3}(R)\subset\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$$

είναι ένας 2×3-πίνακας. Τα έξι στοιχεία του A σχηματίζουν τις στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και τις γραμμές

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο α_{21} είναι το 0, ενώ το στοιχείο α_{13} είναι το 1.

2. Ο πίνακας [15] είναι ένας 1×1-πίνακας.

3. Οι πίνακες μπορούν να περιγράψουν με συστηματικό τρόπο ένα σύνολο δεδομένων. Για παράδειγμα στο τμήμα 1α του μαθήματος της Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ του Τμήματος Μαθηματικών το 2004 ήταν εγγεγραμμένοι 190 φοιτητές. Η κατανομή τους περιγράφεται από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 47 & 16 & 10 & 12 & 6 & 3 & 3 & 5 \\ 53 & 11 & 9 & 5 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

όπου οι στήλες αντιστοιχούν στα έτη φοίτησης και οι γραμμές αντιστοιχούν στα γένη: αρσενικό και θηλυκό. Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 13 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 22 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αναφέρεται στο ίδιο παράδειγμα και περιγράφει τον αριθμό των φοιτητών και φοιτητριών που πέρασαν στην εξεταστική του Ιουνίου.

4. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

μπορεί να περιγραφεί από τον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

5. Ένα διατεταγμένο γράφημα αποτελείται από κορυφές και διατεταγμένες ακμές ανάμεσα στις κορυφές. Παριστάνουμε τις διατεταγμένες ακμές με βέλη για να δείξουμε την κατεύθυνση τους. Σε ένα γράφημα με n κορυφές αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ως εξής:

$a_{ij} = 1$ εάν υπάρχει ακμή από την κορυφή i προς την κορυφή j ενώ $a_{ij} = 0$ εάν δεν υπάρχει ακμή από την κορυφή i προς την κορυφή j.

Για παράδειγμα έστω το γράφημα

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ 3 \arrow[u] \arrow[ur] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι η χρήση των πινάκων συστηματοποιεί τη γραφή κάποιων δεδομένων. Έτσι τα επιστημονικά προβλήματα που εκφράζονται με πίνακες μπορούν να επιλυθούν με μαθηματικές μεθόδους από τη Θεωρία Πινάκων. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ορισμός 2.1.2. *Αν $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ είναι στοιχεία του $\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$, τότε το* **άθροισμα** *(sum) των A, B ορίζεται ως εξής:*

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}).$$

Παραδείγματα 2.1.3.

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

β) Το άθροισμα των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

δεν ορίζεται σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.2 αφού οι πίνακες έχουν διαφορετικά μεγέθη, ο πρώτος ανήκει στο $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ και ο δεύτερος στο $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$).

Η πρόσθεση που ορίσαμε στο $\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ είναι στενά συνδεμένη με την πρόσθεση του $\Bbbk$, γιατί όπως είδαμε το άθροισμα $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ ορίζεται στο $\Bbbk$. Αν $A = (\alpha_{ij}) \in$

$\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ συμβολίζουμε με $-A$ τον πίνακα που έχει στη θέση (i,j) το στοιχείο $-\alpha_{ij}$, δηλ.

$$-A = (-\alpha_{ij}).$$

Ο πίνακας $-A$ λέγεται **αντίθετος** (opposite) **πίνακας** του A. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 2.1.4. *Έστω A, B, Γ πίνακες του $\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$. Η πρόσθεση πινάκων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

i) *η πρόσθεση είναι προσεταιριστική:* $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$.

ii) *η πρόσθεση έχει μηδενικό στοιχείο:* $A+\mathbf{O}=A=\mathbf{O}+A$.

iii) *για κάθε πίνακα A υπάρχει το αντίθετο στοιχείο:* $A+(-A)=\mathbf{O}=(-A)+A$.

iv) *η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική:* $A+B=B+A$.

Θα ορίσουμε τώρα το γινόμενο στοιχείου $\kappa\in\Bbbk$ με έναν πίνακα $A=(\alpha_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ ως εξής:

$$\kappa A = (\kappa\alpha_{ij}).$$

Ο πίνακας κA προκύπτει από τον πίνακα A αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A επί το κ. Θέτουμε

$$A\kappa := \kappa A.$$

Η πράξη αυτού του πολλαπλασιασμού $\Bbbk\times\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)\to\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ λέγεται **σκαλιανός** πολλαπλασιασμός.

Είναι εύκολο να αποδείξει ο αναγνώστης την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω A, B δύο πίνακες του $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ και $\kappa,\lambda\in\Bbbk$. Οι επόμενες ιδιότητες ισχύουν.*

i) $\kappa(A+B)=\kappa A+\kappa B$.

ii) $(\kappa+\lambda)A=\kappa A+\lambda A$.

iii) $(\kappa\lambda)A=\kappa(\lambda A)$.

iv) $\kappa(AB)=(\kappa A)B=A(\kappa B)$.

Ορίζουμε τώρα τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η πράξη αυτή είναι πιο πολύπλοκη από την πρόσθεση. Θα ορίσουμε πρώτα το γινόμενο ενός $1\times n$-πίνακα με έναν $n\times 1$-πίνακα και μετά θα γενικεύσουμε αυτόν τον ορισμό.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε

$$AB = \left[\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n\right].$$

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ και $B \in \mathcal{M}_{m\times\kappa}(\Bbbk)$. Το **γινόμενο** *(product) των* **πινάκων** *A και B συμβολίζεται με AB και ορίζεται να είναι ο $n \times \kappa$-πίνακας που στη θέση (i, j), δηλ. i-γραμμή και j-στήλη, έχει το στοιχείο*

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{im}\beta_{mj} = \sum_{\kappa=1}^{\mathcal{M}} \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j},$$

δηλ.

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{bmatrix}.$$

Συμβολικά:

$$i\text{-γραμμή} \rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} j\text{-στήλη} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \cdots & \beta_{1j} & \cdots \\ \cdots & \beta_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \beta_{mj} & \cdots \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \gamma_{ij} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Παραδείγματα 2.1.7.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 6.$

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$

3. Έστω ότι A έχει μία μόνο γραμμή που περιγράφει την ποσότητα n διαφορετικών ειδών και ο πίνακας B έχει μία μόνο στήλη που περιγράφει την αξία κάθε είδους του πίνακα A. Το γινόμενο AB είναι 1×1 πίνακας που δίνει το συνολικό κόστος. Αυτός είναι ένας ενδεικτικός τρόπος χρήσης, αλλά και της χρησιμότητας του γινομένου πινάκων.

4. $$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Τότε ορίζονται τα γινόμενα AB, $(AB)\Gamma$, $B\Gamma$ και $A(B\Gamma)$. Παρατηρούμε ότι
$$A(B\Gamma) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$
και
$$(AB)\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 12 \end{bmatrix},$$
δηλ. $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$

7. Για να οριστεί το γινόμενο των δύο πινάκων AB θα πρέπει ο αριθμός των γραμμών του πίνακα A να είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών του πίνακα B. Έτσι όταν $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ και $B \in \mathcal{M}_{s\times \kappa}(\Bbbk)$ και $m \neq s$ τότε το γινόμενο AB δεν ορίζεται. Παρατηρούμε όμως ότι ορίζεται πάντα το γινόμενο δύο πινάκων του συνόλου $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$.

8. Έστω το γράφημα

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ 3 \arrow[u] \arrow[ur] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε το A^2 και A^3. Βλέπουμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Κοιτάζοντας το στοιχείο στη θέση 13 του A^2 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας τρόπος για να βρεθεί κανείς από τη κορυφή 1 στη κορυφή 3 του γραφήματος ακολουθώντας μία διαδρομή με δύο βήματα: πράγματι η μόνη διαδρομή που έχει αυτήν την ιδιότητα είναι $1 \to 4 \to 3$. Αντίστοιχα κοιτάζοντας το στοιχείο στη θέση 44 του A^3 βλέπουμε ότι υπάρχουν 2 διαδρομές των 3 βημάτων που θα μας οδηγήσουν από την κορυφή 4 στη κορυφή 4. Ο αναγνώστης παροτρύνεται να τις προσδιορίσει.

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n &= \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

γράφονται εν συντομία ως $AX = B$ όπου $A = (\alpha_{ij})$ των συντελεστών και B ο πίνακας των σταθερών. Ο συμβολισμός αυτός ταιριάζει απόλυτα με τον ορισμό του γινομένου αν θέσουμε

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ως τον πίνακα των αγνώστων αφού $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$, $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\Bbbk)$. Βλέπουμε επίσης ότι

$$AX = \Sigma_1\ x_1 + \Sigma_2\ x_2 + \cdots + \Sigma_n x_n$$

όπου $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι οι στήλες του A. Το γινόμενο AX δίνει μία στήλη που είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.

Παράδειγμα 2.1.8. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \quad .$$

Το γινόμενο AX δίνει τον πίνακα

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} x_2$$

και η εξίσωση πινάκων $AX = B$ είναι η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 11 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με όσα είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A\ |B\ ] = 2$ και το παραπάνω σύστημα έχει μία μοναδική λύση, την $(1, 1)$. Πράγματι

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \quad .$$

Η **κύρια διαγώνιος** ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής a_{ii}. Συμβολίζουμε με I_n τον πίνακα του $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ που όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι 1, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι μηδέν. Ο πίνακας I_n λέγεται **μοναδιαίος** (identity) $n \times n$**-πίνακας** γιατί όπως θα δούμε παίζει τον ρόλο της μονάδας στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Για παράδειγμα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας.

Η επόμενη πρόταση συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, που ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$, $B, B' \in \mathcal{M}_{m\times k}(\Bbbk)$, $\Gamma \in \mathcal{M}_{k\times s}(\Bbbk)$. Τότε:*

i) *ο πολλαπλασιασμός (όταν αυτός επιτρέπεται) είναι προσεταιριστικός:* $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$.

ii) *ο πολλαπλασιασμός έχει μοναδιαίο στοιχείο:* $AI_n = A = I_mA = A$.

iii) *ο πολλαπλασιασμός (όταν αυτός επιτρέπεται) είναι επιμεριστικός από τα δεξιά:* $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$

iv) *ο πολλαπλασιασμός (όταν αυτός επιτρέπεται) είναι επιμεριστικός από τα αριστερά:* $(B + B')\Gamma = B\Gamma + B'\Gamma$

Όπως είδαμε στο iv) της Πρότασης 2.1.4 η πρόσθεση πινάκων είναι αντιμεταθετική πράξη. Δεν συμβαίνει, όμως, το ίδιο με τον πολλαπλασιασμό. Θα δούμε ότι υπάρχουν πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ έτσι ώστε

$$AB \neq BA \tag{2.1}$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που προκύπτει από έναν πίνακα A αν κάνουμε τις γραμμές του στήλες και τις στήλες γραμμές λέγεται **ανάστροφος** (transpose) του A και συμβολίζεται A^T. Έτσι αν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι αν $A = (\alpha_{ij})$ και $A^T = (\beta_{ij})$, τότε $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, και βέβαια $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, ενώ $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}n \times m(\mathbb{C})$. Ο **συζυγής** του A είναι ο πίνακας $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Παραδείγματα 2.1.10.

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} .$$
Τότε
$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Έστω $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$. Τότε $X^T\overline{X}$ είναι ένας 1×1 πίνακας που το στοιχείο του είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Πράγματι
$$\text{αν } X = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} \text{ τότε } \overline{X} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{bmatrix}$$
και
$$X^T\overline{X} = \left[(a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2)\right]$$

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης είναι άμεση και παραλείπεται.

Πρόταση 2.1.11. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.*
i) $(AB)^T = B^T A^T$.
ii) $(A^T)^T = A$.
iii) $(\kappa A)^T = \kappa A^T,\ \kappa \in K$.

Σημειώνουμε και κάποιους άλλους ορισμούς. Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ λέγεται **συμμετρικός** (symmetric) αν ικανοποιεί τη σχέση $A = A^T$, δηλ. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **αντισυμμετρικός** (antisymmetric) αν ικανοποιεί τη σχέση $A = -A^T$, δηλ. $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο πίνακας A λέγεται **διαγώνιος** (diagonal) αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **άνω τριγωνικός** (upper triangular) αν όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i > j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **κάτω τριγωνικός** (lower triangular) αν όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i < j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Παραδείγματα 2.1.12.

α) Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικοί.

β) Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί.

γ) Ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. ο πίνακας στα αριστερά είναι ίσος με το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Ο αναγνώστης ζητείται στις ασκήσεις να δείξει ότι *κάθε* τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με μία τελευταία παρατήρηση που θα συνδέσει τις πράξεις γραμμών του προηγούμενου κεφαλαίου με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Έστω ότι $E_{i\leftrightarrow j}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον I_n αν στον I_n αντιμεταθέσουμε την i με την j γραμμή, δηλ.

$$I_n \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j} \ .$$

Ο πίνακας $E_{i\leftrightarrow j} \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ και πολλαπλασιάζεται από τα δεξιά με κάθε στοιχείο του $\mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$. Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας $E_{i\leftrightarrow j}\, A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ προκύπτει από τον A αν στον A αντιμεταθέσουμε την i-γραμμή με την j-γραμμή, δηλ.

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j}\, A \ .$$

Με άλλα λόγια η στοιχειώδης πράξη της αντιμετάθεσης δύο γραμμών ενός πίνακα A αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά του πίνακα A με τον κατάλληλο πίνακα. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι το αντίστοιχο ισχύει για κάθε στοιχειώδη πράξη γραμμών.

Παραδείγματα 2.1.13. Στο $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ έχουμε ότι

$$E_{1\leftrightarrow 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Ισχύει

$$E_{1\leftrightarrow 2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις ενότητας 2.1

1. Να γίνουν οι σημειούμενες πράξεις:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\right],$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

2. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix}0 & x & y\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

   Παρατηρήστε έτσι ότι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες A, B που το γινόμενο τους είναι ο μηδενικός πίνακας. Αυτό δε συμβαίνει με τους αριθμούς.

3. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}.$$

   Να υπολογίσετε τον πίνακα A^3. Παρατηρήστε ότι η κύρια διαγώνιος του A^3 έχει επίσης όλα τα στοιχεία της ίσα με μηδέν.

4. Έστω ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & n\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

   και $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Να υπολογίσετε τους πίνακες DA και AD.

5. Για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες να περιγράψετε όλους τους πίνακες

$$\begin{bmatrix}a & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

που αντιμεταθέτονται με αυτούς:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Να γράψετε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

7. Δίνεται ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Να αποδείξετε ότι:

i) ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός,

ii) ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός,

iii) ο πίνακας $A\,A^T$ είναι συμμετρικός,

iv) ο πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα,

v) αν ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, τότε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.

8. Έστω A ο πίνακας του Παραδείγματος 2.1.13. Να βρείτε το γινόμενο $E_{2\leftrightarrow 3}A$ χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους πίνακες. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα γινόμενα $AE_{1\leftrightarrow 2}$ και $AE_{1\leftrightarrow 3}$. Τι παρατηρείτε;

9. Να βρείτε το γράφημα που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρείτε τα γινόμενα A^2 και A^3 και να εξηγήσετε τι σημαίνουν οι απαντήσεις σας ως προς το προηγούμενο γράφημα.

2.2 Αντιστρέψιμοι πίνακες

Η έννοια των αντιστρέψιμων πινάκων είναι κεντρική στη μελέτη μας.

Ορισμός 2.2.1. *Ο πίνακας $A \in M_n(\Bbbk)$ λέγεται* **αντιστρέψιμος** *(invertible) πίνακας αν υπάρχει ο πίνακας B έτσι ώστε*

$$AB = I_n = BA\ .$$

Στη περίπτωση αυτή ο πίνακας B λέγεται **αντίστροφος** *(inverse) πίνακας του A, συμβολίζεται με A^{-1}.*

Ο ορισμός λέει ότι για να είναι ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ αντιστρέψιμος θα πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας B που να ικανοποιεί ταυτόχρονα δύο συνθήκες: $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Θα δούμε αργότερα ότι η ισχύς της μίας από αυτές τις δύο ισότητες συνεπάγεται την ισχύ της άλλης. Έτσι για να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A (αν υπάρχει) αρκεί να βρεθεί πίνακας B που να πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά ή από τα δεξιά με τον A και να δίνει τον μοναδιαίο πίνακα.

Παραδείγματα 2.2.2.

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι όποιος και να είναι ο B, το γινόμενο AB έχει στη τελευταία γραμμή μόνο μηδενικά και άρα είναι αδύνατον $AB = I_n$.

3. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ και έστω ότι η i-γραμμή του A είναι μηδέν. Αν $B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ τότε η i-γραμμή του AB θα είναι μηδέν. Άρα δεν υπάρχει B έτσι ώστε $AB = I_n$. Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

4. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ με μηδενική την j-στήλη. Αν $B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ τότε η j-στήλη του BA είναι μηδέν. Είναι αδύνατον να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $BA = I_n$. Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

5. Ο μηδενικός τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{0}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

6. Ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος: $I_n I_n = I_n$, άρα ${I_n}^{-1} = I_n$.

7. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

και $ad - bc \neq 0$. Τότε αν

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι $B = A^{-1}$. Ο αριθμός $ad - bc$ λέγεται ορίζουσα του $A \in \mathcal{M}_2(\Bbbk)$ και συμβολίζεται με $\det(A)$.

8. Αν A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$ τότε B είναι αντιστρέψιμος και $A = B^{-1}$.

9. Αν A είναι αντιστρέψιμος τότε είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι για $n \in N$, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Πράγματι για $n = 2$ έχουμε

$$A^2(A^{-1})^2 = A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} =$$

$$= A(A \cdot A^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = A(I_n A^{-1}) = AA^{-1} = I_n$$

Για $n > 2$ η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Αν A είναι αντιστρέψιμος τότε ορίζουμε $A^0 = I_n$ και για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A^{-n} := (A^{-1})^n.$$

Πρόταση 2.2.3. *Αν οι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το γινόμενό τους είναι αντιστρέψιμος πίνακας και*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Γενικότερα, αν οι πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_s$ του $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} A_{s-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα προκύπτει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Όμοια $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Άρα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Η απόδειξη γενικεύεται εύκολα όταν έχουμε παραπάνω από δύο πίνακες. Η

Θα ορίσουμε τώρα τους στοιχειώδεις πίνακες που θα μας χρησιμεύσουν στην μελέτη μας.

Ορισμός 2.2.4. Στοιχειώδεις *(elementaries)* **πίνακες** *είναι οι επόμενοι πίνακες.*

- $E_{i+a\cdot j}$ *ο πίνακας που προκύπτει από τον* I_n *αν αντικαταστήσουμε την* i*-γραμμή,* Γ_i*, του* I_n *με την* $\Gamma_i + a\Gamma_j$*, όπου* $i \neq j$*,* $a \in \Bbbk$*, δηλ.*

  $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j]{} E_{i+a\cdot j}$.

- $E_{i\leftrightarrow j}$ *ο πίνακας που προκύπτει από τον* I_n *αν αντιμεταθέσουμε την* i *με την* j *γραμμή, δηλ.* $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j}$.

- $E_{b\cdot i}$ *ο πίνακας που προκύπτει από τον* I_n *αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της* i *γραμμής με ένα στοιχείο* $b \in \Bbbk$*, δηλ.* $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \to b\Gamma_i]{} E_{b\cdot i}$.

Παραδείγματα 2.2.5.

1. Στον $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ οι στοιχειώδεις πίνακες είναι οι εξής:

$$E_{1+a\cdot 2} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{2+a\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix},\ E_{1\leftrightarrow 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{b\cdot 1} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{b\cdot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Στον $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ έχουμε

$$E_{1+a\cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{2\leftrightarrow 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{b\cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

3. Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Ο αναγνώστης καλείται να βρει τον αντίστροφο για τους τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων. (Υπόδειξη: η επόμενη πρόταση θα κάνει την εύρεση του αντιστρόφου ενός στοιχειώδου πίνακα ιδιαίτερα απλή.)

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A από τα αριστερά με έναν στοιχειώδη πίνακα δίνει τον πίνακα που προκύπτει από τον A μετά από την αντίστοιχη στοιχειώδη πράξη γραμμών όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς.

Πρόταση 2.2.6. *Αν* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\Bbbk)$*, τότε*

1. *Ο πίνακας $E_{i+a\cdot j}\ A$ προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή, Γ_i, με την $\Gamma_i + a\Gamma_j$, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j]{} E_{i+a\cdot j}\ A.$$

2. *Ο πίνακας $E_{i\leftrightarrow j}\ A$ προκύπτει από τον A αν αντιμεταθέσουμε την i-γραμμή με την j-γραμμή, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j}\ A.$$

3. *Ο πίνακας $E_{b\cdot i}\ A$ προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής επί $b \in \Bbbk$, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \to b\Gamma_i]{} E_{b\cdot i}\ A.$$

Παραδείγματα 2.2.7.

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2]{} B$ έπεται ότι $B = E_{1\leftrightarrow 2}\ A$.

2. Θα φέρουμε τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2]{} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1]{} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2]{}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2]{} I_2.$$

Έπεται ότι

$$A_1 = E_{1\leftrightarrow 2}\ A,\ A_2 = E_{\frac{1}{2}\cdot 1}\ A_1,\ A_3 = E_{\frac{1}{3}\cdot 2}\ A_2,\ I_2 = E_{1-2\cdot 2}\ A_3\ .$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ισότητες βρίσκουμε ότι

$$E_{1-2\cdot 2}\ E_{\frac{1}{3}\cdot 2}\ E_{\frac{1}{2}\cdot 1}\ E_{1\leftrightarrow 2}\ A = I_2\ .$$

Σημειώνουμε ως πρόταση τη παρακάτω παρατήρηση για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή R ενός πίνακα A. Η απόδειξή της είναι άμεση.

Πρόταση 2.2.8. *Έστω R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα A. Υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \ldots, E_n$ έτσι ώστε*

$$R = E_n \cdots E_1 \, A$$

Η Πρόταση 2.2.8 θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην εύρεση αντιστρόφων. Έστω ότι A είναι δοθέν πίνακας του $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο του A, εάν αυτός βέβαια υπάρχει. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε έναν πίνακα B έτσι ώστε να ισχύει $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Ας ξεκινήσουμε με την ισότητα $AB = I_n$. Η ισότητα αυτή είναι μία εξίσωση πινάκων: $AB \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ και έχει n^2 πλήθος στοιχείων. Έτσι η ισότητα $AB = I_n$ αντιστοιχεί σε n^2 το πλήθος γραμμικές εξισώσεις. Οι άγνωστοι είναι τα στοιχεία του $B = (b_{ij})$. Θέλουμε λοιπόν να λύσουμε n^2 γραμμικές εξισώσεις με n^2 αγνώστους. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.2.9. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Για να είναι $B = (b_{ij})$ είναι ο αντίστροφος του A θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε τις παρακάτω 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους:

$$\begin{array}{rcl} b_{11} + 2b_{21} & = & 1 \\ 3b_{11} + 4b_{21} & = & 0 \\ b_{12} + 2b_{22} & = & 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} & = & 1 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα των 4 εξισώσεων και 4 αγνώστων αρκεί να λύσουμε τα παρακάτω δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών: τον αρχικό πίνακα A.

$$\begin{array}{rcl} b_{11} + 2b_{21} & = & 1 \\ 3b_{11} + 4b_{21} & = & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} b_{12} + 2b_{22} & = & 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} & = & 1 \end{array}.$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο (κατά δύο στήλες) πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει ότι $(b_{11}, b_{21}) = (-2, -\frac{3}{2})$ ενώ $(b_{12}, b_{22}) = (1, \frac{1}{2})$. Επομένως

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και $AB = I_n$. Σημειώνουμε ότι B βρέθηκε φέρνοντας τον πίνακα $[A \mid I_2]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[I_n \mid B]$. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε κάνοντας το γινόμενο ότι $BA = I_n$ και άρα $B = A^{-1}$.

Θα γενικεύσουμε τις παρατηρήσεις που κάναμε στο παραπάνω παράδειγμα. Οι n^2 εξισώσεις του $AX = B$ μπορούν να οργανωθούν σε n γραμμικά συστήματα με n εξισώσεις και n αγνώστους. Ο πίνακας των συντελεστών σε κάθε ένα από αυτά τα συστήματα είναι ο πίνακας A ενώ οι στήλες των σταθερών όλες μαζί δίνουν τον I_n. Μπορεί λοιπόν κανείς να επιλύσει τα συστήματα αυτά ταυτόχρονα φέρνοντας τον πίνακα $[A \mid I_n]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A \mid I_n]$ ανάλογα με την βαθμίδα του πίνακας A.

- Αν $\operatorname{rank}(A) = n$ τότε όλα τα γραμμικά συστήματα που προσπαθούμε να επιλύσουμε είναι συμβατά και οι λύσεις προκύπτουν από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[\ A \mid I_n\ ]$:

  $$[\ A \mid I_n\ ] \to \cdots \to [\ I_n \mid B\ ]\ .$$

  Σε αυτή τη περίπτωση θα δούμε ότι $B = A^{-1}$.

- Αν $\operatorname{rank}(A) < n$, τότε

  $$[\ A \mid I_n\ ] \to \cdots \to [\ R \mid C\ ] \tag{2.2}$$

  όπου R είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A. Αφού $R \neq I_n$, η τελευταία γραμμή του R είναι μηδέν. Θα δούμε ότι η τελευταία γραμμή του C δεν είναι μηδέν και άρα τουλάχιστον ένα από τα συστήματα που προκύπτουν από την ισότητα $AB = I_n$ είναι μη συμβατό. Έτσι όταν $\operatorname{rank}(A) < n$ ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Έστω λοιπόν ότι $\operatorname{rank}(A) < n$ και ότι R είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.8 έχουμε ότι

$$E_\kappa \cdots E_2\ E_1\ A = R \tag{2.3}$$

για κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_\kappa$. Εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που αντιστοιχούν σε αυτούς τους πίνακες στον πίνακα $[A|\ I_n]$. Παρατηρούμε ότι

$$[\ A \mid I_n\ ] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\ R \mid E_\kappa \cdots E_2 E_1\ ].$$

Δηλαδή ο πίνακας C της σχέσης 2.2 είναι το γινόμενο $E_\kappa \cdots E_2 E_1$. Θυμίζουμε ότι ο πίνακας R έχει τη τελευταία του γραμμή ίση με μηδέν και ότι για να είναι συμβατά όλα τα συστήματα που αντιστοιχούν στην ισότητα $AB = I_n$ θα πρέπει η τελευταία γραμμή του C να είναι μηδέν. Όμως C είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων και άρα ο C είναι αντιστρέψιμος πίνακας, βλ. Πρόταση 2.2.3. Αποκλείεται λοιπόν να έχει μηδενική γραμμή, βλ. Παράδειγμα 2.2.2. Έτσι αν $R \neq I_n$ (δηλ. $\operatorname{rank}(A) < n$) τότε κάποιο από τα συστήματα που αντιστοιχούν στην ισότητα $AB = I_n$ δεν είναι συμβατό και ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θα εφαρμόσουμε την ίδια ανάλυση στη περίπτωση που $\operatorname{rank}(A) = n$. Στη περίπτωση αυτή

$$E_\kappa \cdots E_1 A = I_n \tag{2.4}$$

για κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_\kappa$. Τότε

$$[A \mid I_n\,] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\, I_n \mid E_\kappa \cdots E_1\,].$$

και άρα οι λύσεις των συστημάτων δίνουν ότι ο ζητούμενος πίνακας B προκύπτει ως το γινόμενο $B = E_\kappa \cdots E_2 E_1$. Όμως από τη σχέση 2.4 βλέπουμε ότι ισχύει $BA = I_n$. Δηλαδή ο πίνακας $B = E_\kappa \cdots E_2 E_1$ ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Άρα

$$A^{-1} = E_\kappa \cdots E_2 E_1\ .$$

Σημειώνουμε αυτό που αποδείξαμε παραπάνω προσθέτοντας μία ακόμα παρατήρηση:

Θεώρημα 2.2.10. *Αν $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ και $AB = I_n$, τότε οι A και B είναι αντιστρέψιμοι και $B = A^{-1}$ ενώ $A = B^{-1}$.*

Για να μπορούμε εύκολα να ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία δίνουμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος εύρεσης αντιστρόφου του $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$.

- Παραθέτουμε δεξιά του πίνακα A τον I_n και σχηματίζουμε τον πίνακα

$$[\, A \mid I_n\,].$$

- Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss και φέρνουμε τον $[\, A \mid I_n\,]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[\, R \mid B\,]$.
- Αν $R = I_n$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$. Αν $R \neq I_n$ ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα 2.2.11.

1. Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \qquad \square$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} .$$

Για να βρούμε τον αντίστροφο του A αν υπάρχει παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

Παρατηρούμε ότι $\operatorname{rank} A < 3$ και άρα A δεν είναι αντιστρέψιμος.

3. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(K)$ και $A^4 + 3A^2 + A - 4I_n = 0$. Τότε

$$A^4 + 3A^2 + A = 4I_n \;\Rightarrow\; A\big(\frac{1}{4}(A^3 + 3A + I_n)\big) = I_n.$$

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^3 + 3A + I_n)$.

Πρόταση 2.2.12. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Απόδειξη. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε

$$A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}A \Leftrightarrow (A\,A^{-1})^T = I_n^T = (A^{-1}A)^T \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n = A^T (A^{-1})^T.$$

Άρα

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

□

Η τελευταία παρατήρηση αυτής της ενότητας αφορά την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Παρατήρηση 2.2.13. *Αν $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\Bbbk)$, τότε το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση. Αν $X = A^{-1}B = [c_1 \ \cdots \ c_n]^T$ τότε η μοναδική λύση είναι $(c_1, \ldots, c_n)$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε $\operatorname{rank}(A) = n$ και άρα το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό και έχει μοναδική λύση. Αν $(c_1, \ldots, c_n)$ είναι η λύση και $X = [c_1 \ \cdots \ c_n]^T$ τότε

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

□

Η παραπάνω παρατήρηση είναι χρήσιμη υπολογιστικά, μόνο αν ο πίνακας A^{-1} είναι ήδη γνωστός.

Παράδειγμα 2.2.14. Θα βρούμε τη λύση του συστήματος $AX = B$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 2.2.11.1 είδαμε ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και η μοναδική λύση του συστήματος $AX = B$ είναι $(7, -2, -2)$.

Ασκήσεις ενότητας 2.2

1. Να βρείτε τους αντιστρόφους των στοιχειωδών πινάκων.

2. Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Να γραφεί ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$E \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

χωρίς την εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού πινάκων.

4. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του γινομένου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου $a, b, c \in K$ και $c \neq 0$, χρησιμοποιώντας τους στοιχειώδεις πίνακες.

5. Να βρείτε τις λύσεις των συστημάτων

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad BX = \mathbf{0}, \quad CX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

όπου A, B, C είναι οι πίνακες της δεύτερης άσκησης.

6. Έστω ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A με αντιμετάθεση των δύο πρώτων γραμμών του A και έστω ότι A είναι αντιστρέψιμος. Να επιχειρηματολογήσετε υπέρ ή κατά του ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και αν B είναι αντιστρέψιμος να δώσετε τη σχέση ανάμεσα στον A^{-1} και B^{-1} αν υπάρχει.

7. Αν $A^2 + 2A - I_n = \mathbf{O}$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος. Ομοίως για τον πίνακα $B \in \mathcal{M}_n(K)$, αν $2B^3 + 4B^2 - 2B + 3I_n = \mathbf{O}$.

2.3 Ορίζουσες πινάκων

Σε κάθε πίνακα A του $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ αντιστοιχούμε ένα στοιχείο του $\Bbbk$ που λέγεται ορίζουσα (determinant) του πίνακα και συμβολίζεται με $\det A$ ή με $|A|$. Δηλαδή η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση

$$\det : \mathcal{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk, \quad A \mapsto \det A \ .$$

Η ορίζουσα ενός 1×1-πίνακα $[\alpha]$ είναι $\det[\alpha] = \alpha$. Επίσης

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Για $n \times n$ πίνακες με $n > 2$ θα δώσουμε έναν αναδρομικό ορισμό της ορίζουσας, δηλ. θα ορίσουμε την ορίζουσα ενός $n \times n$-πίνακα με τη βοήθεια οριζουσών $(n-1) \times (n-1)$-πινάκων που λέγονται **ελάσσονες** (minors) πίνακες του A και που συμβολίζουμε με A_{ij}. Ο πίνακας A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$-πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη του.

Παραδείγματα 2.3.1.

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, τότε $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.
2. $(I_n)_{11} = I_{n-1}$.
3. $(I_3)_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. Έστω A ένας διαγώνιος $n \times n$ πίνακας. Αν $i \neq j$ τότε A_{ij} έχει (τουλάχιστον) μία μηδενική γραμμή και στήλη.
5. Έστω A ένας άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε ο πίνακας A_{11} είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.

Ορισμός 2.3.2. *Η* **ορίζουσα** *ενός $n \times n$-πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ ορίζεται από τον τύπο*

$$\det A = \alpha_{11} \ \det A_{11} - \alpha_{21} \ \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \ \det A_{n1} \ . \tag{2.5}$$

Ο τύπος (2.5) εκφράζει τη **ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα** A **κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης**. Σε λίγο θα δούμε ότι η ορίζουσα του A υπολογίζεται με κατάλληλη ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης ή και γραμμής.

Παραδείγματα 2.3.3.

1. Έστω $A = [2]$, τότε $\det A = 2$.

2. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. είναι $\det A = 4$.

3. Έστω ότι $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ είναι κορυφές ενός παραλληλογράμμου P έτσι ώστε οι πλευρές P_1P_2, P_3P_4 να είναι παράλληλες. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα
$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \end{bmatrix}$$
δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου P.

4. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε
$$\det A = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 0 = -7.$$

5. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det A = 1 \cdot \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{21} + 0 \cdot \det A_{31} - 3 \cdot \det A_{41}\ .$$
Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λόγος να υπολογίσουμε τους πίνακες A_{21}, A_{31} και τις ορίζουσές τους, αφού θα πολλαπλασιαστούν με το 0, ενώ ο πίνακας A_{41} είναι ο 3×3 πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος, άρα

$\det A_{41} = -7$. Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A_{11}.

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 - 0 + 0 = 0.$$

Άρα

$$\det A = -3 \cdot (-7) = 21 \ .$$

6. Θα δούμε ότι $\det(I_n) = 1$. Πράγματι

$$\det I_n = 1 \cdot \det\ (I_n)_{11} + 0 \cdot \det\ (I_n)_{21} - \cdots + (-1)^{n+1} 0 \cdot \det\ (I_n)_{n1}$$

$$= \det\ (I_n)_{11} \ .$$

Όμως $(I_n)_{11} = I_{n-1}$, ο μοναδιαίος $n-1 \times n-1$ πίνακας. Έτσι διαδοχικά έχουμε

$$\det I_n = \det I_{n-1} = \cdots = \det[1] = 1 \ .$$

(Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

7. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε στοιχειώδη πίνακα $E_{i+a\cdot j}$ και ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του $E_{i+a\cdot j}$, ισχύει ότι $\det E_{i+a\cdot j} = 1$. Πράγματι έστω ότι $E_{i+a\cdot j}$ προκύπτει από τον I_n και ότι $i = 1$. Τότε $E_{1+a\cdot j}$ διαφέρει από τον I_n μόνο στη πρώτη γραμμή και j στήλη:

$$E_{1+a\cdot j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & j\text{-στήλη} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Έτσι όταν πάρουμε την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης βλέπουμε ότι

$$\det E_{1+a\cdot j} = 1 \cdot \det\ (I_{n-1}) = 1 \ .$$

Έστω τώρα ότι $j = 1$. Ο πίνακας $E_{i+a\cdot 1}$ είναι της μορφής

$$E_{i+a\cdot 1} = \quad i\text{-γραμμή} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Όταν πάρουμε την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης βλέπουμε ότι

$$\det E_{i+a\cdot 1} = 1 \cdot \det\,(I_{n-1}) + (-1)^{i-1} \det(E_{i+a\cdot 1})_{i1} = 1\ .$$

Ο υποπίνακας $(E_{i+a\cdot 1})_{i1}$ έχει ορίζουσα 0 γιατί τα στοιχεία της πρώτης στήλης του είναι όλα 0. Άρα

$$\det E_{i+a\cdot 1} = 1\ .$$

Εάν $i > 1$ και $j > i$ τότε ο υποπίνακας $(E_{i+a\cdot j})_{11}$ δεν είναι ο μοναδιαίος I_{n-1}. Είναι όμως και πάλι ένας στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον I_{n-1} προσθέτοντας στην $i-1$ γραμμή a φορές την j-στη γραμμή. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοχεία της πρώτης στήλης και επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία i-φορές θα βρεθούμε τελικά στην πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε, δηλαδή θα βρούμε έναν στοιχειώδη πίνακα που η πρώτη του γραμμή είναι άθροισμα επόμενης γραμμής. Έτσι

$$\det E_{i+a\cdot j} = 1 \cdots 1 \cdot \det\,(I_{n-i}) = 1\ .$$

Εάν $i > 1$ και $j < i$ τότε ο υποπίνακας $(E_{i+a\cdot j})_{11}$ και πάλι δεν είναι ο μοναδιαίος I_{n-1}, αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοχεία της πρώτης στήλης και επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία i-φορές θα βρεθούμε τελικά στην δεύτερη περίπτωση που εξετάσαμε. Έτσι και πάλι

$$\det E_{i+a\cdot j} = 1 \cdots 1 = 1\ .$$

(Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

8. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε στοιχειώδη πίνακα $E_{b\cdot i}$ και ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του ισχύει ότι $\det E_{b\cdot i} = b$. Έστω ότι $E_{b\cdot i}$ είναι $n \times n$. Αν

$i = 1$ τότε

$$E_{b\cdot j} = \begin{bmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} .$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του $E_{b\cdot i}$ κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης βλέπουμε ότι

$$\det E_{b\cdot i} = b \cdot \det\,(I_{n-1}) = b\ .$$

Εάν $i > 1$ τότε ο υποπίνακας $(E_{b\cdot i})_{11}$ δεν είναι ο μοναδιαίος I_{n-1}. Είναι και πάλι όμως ένας στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον I_{n-1} πολλαπλασιάζοντας την $i-1$ γραμμή του με b. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του $(E_{b\cdot i})_{11}$ κατά τα στοχεία της πρώτης στήλης και επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία i-φορές θα βρούμε έναν στοιχειώδη πίνακα της μορφής που ήδη μελετήσαμε. Έτσι

$$\det E_{b\cdot i} = 1(E_{b\cdot i})_{11} = 1 \cdots \det \cdots b \cdot \det\,(I_{n-i}) = b\ .$$

(Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

9. Έστω A ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + 0 \cdot \det A_{21} - \cdots + (-1)^{n+1} 0 \cdot \det A_{n1} = a_{11} \det A_{11}\ .$$

Όμως A_{11} είναι άνω τριγωνικός πίνακας που τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ταυτίζονται με αυτά του A από τη θέση 22 και έπειτα. Έτσι διαδοχικά βρίσκουμε ότι

$$\det A = a_{11} \det A_{11} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}\ .$$

(Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

Αναφέρουμε κάποιες από τις ιδιότητες των οριζουσών.

Πρόταση 2.3.4. *Τα επόμενα ισχύουν:*

1. $\det E_{i+a\cdot j} A = \det A$. *Δηλαδή αν* $A \xrightarrow[\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j]{} A'$ *τότε* $\det(A') = \det(A)$.

2. $\det E_{b\cdot i}A = b\det A$. *Δηλαδή αν* $A \xrightarrow[\Gamma_i \to b\Gamma_i]{} A'$ *τότε* $\det(A') = b\det(A)$.

3. $\det E_{i\leftrightarrow j}A = -\det A$. *Δηλαδή αν* $A \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} A'$ *τότε* $\det(A') = -\det(A)$.

Απόδειξη. Οι δύο πρώτες ιδιότητες αποδεικνύονται με προσεκτική ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τη πρώτη στήλη και χρήση μαθηματικής επαγωγής όπως στα παραπάνω παραδείγματα.

Για τη τρίτη ιδιότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i < j$. Παρατηρούμε ότι η αντιμετάθεση των γραμμών i και j επιτυγχάνεται με $2(j-i)-1$ αντιμεταθέσεις γραμμών:

$$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_{i+1},\ \ \Gamma_{i+1} \leftrightarrow \Gamma_{i+2},\ \ \cdots,\ \ \Gamma_{j-1} \leftrightarrow \Gamma_j$$
$$\Gamma_{j-1} \leftrightarrow \Gamma_{j-2},\ \ \cdots,\ \ \Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_{i+1}$$

Πράγματι οι πρώτες $j-i$ αντιμεταθέσεις σπρώχνουν την αρχική i-στη γραμμή στη j-στη θέση, ενώ οι υπόλοιπες $j-i-1$ αντιμεταθέσεις βάζουν την (αρχική) j-στη γραμμή στη σωστή θέση. Αφού ο αριθμός των αντιμεταθέσεων είναι περιττός και είναι αντιμεταθέσεις διαδοχικών γραμμών, συμπεραίνουμε ότι αν αποδείξουμε την τρίτη ιδιότητα για *αντιμεταθέσεις διαδοχικών γραμμών* τότε το ίδιο θα ισχύει και για αντιμεταθέσεις μη διαδοχικών γραμμών. Έστω λοιπόν ότι

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_{i+1}]{} A'$$

Στη περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε τις παρακάτω στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

$$\Gamma_{i+1} \to \Gamma_{i+1} - \Gamma_i,\ \ \Gamma_i \to \Gamma_i + \Gamma_{i+1},\ \ \Gamma_{i+1} \to \Gamma_{i+1} - \Gamma_i$$

ο νέος πίνακας B που προκύπτει διαφέρει από τον A' στα πρόσημα των στοιχείων της $i+1$ γραμμής. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που εφαρμόσαμε για να πάρουμε τον πίνακα B δεν μεταβάλλουν την ορίζουσα του αρχικού πίνακα και $\det B = \det A$. Επίσης σύμφωνα με την δεύτερη ιδιότητα $\det B = -\det A'$. Έπεται ότι $\det A' = -\det A$. □

Συγκεντρώνουμε τις παρατηρήσεις μας ως προς τις ορίζουσες των στοιχειωδών πινάκων:

Πρόταση 2.3.5. $\det E_{i+a\cdot j} = 1,\quad \det E_{i\leftrightarrow j} = -1,\quad \det E_{b\cdot i} = b.$

Έστω ότι $E_1, \ldots, E_s$ είναι στοιχειώδεις πίνακες. Αφού

$$E_1E_2\cdots E_sA = E_1(E_2\cdots E_sA) = \cdots = E_1(E_2\cdots(E_sA))$$

εφαρμόζοντας συνεχόμενα τη Πρόταση 2.3.4 είναι φανερό ότι

$$\det(E_1 E_2 \cdots E_s A) = \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_s \cdot \det A \ . \tag{2.6}$$

Γνωρίζουμε πλέον με ποιόν τρόπο οι στοιχειώδεις πράξεις επηρεάζουν την ορίζουσα του πίνακα. Από την άλλη οι υπολογισμοί είναι ευκολότεροι όταν υπάρχουν πολλά μηδενικά σε έναν πίνακα. Έτσι για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα μπορούμε πρώτα να φέρουμε τον αρχικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες 2.3.4.

Παράδειγμα 2.3.6. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2]{}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας A_3 είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε ότι η $\det A_3$ είναι το γινόμενο των στοιχείων στη διαγώνιο του A_3, βλ Παράδειγμα 9. Επομένως,

$$\det A_3 = 2, \qquad \det A_2 = 2 \ \det A_3 = 4,$$
$$\det A_1 = -\det A_2 = -4, \qquad \det A = \det A_1 = -4.$$

Παραδείγματα 2.3.7.

1. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και $b \in \mathbb{k}$. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα bA όταν γνωρίζουμε την ορίζουσα του A. Ο πίνακας bA προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή με b. Άρα

$$\det(bA) = b \cdots b \cdot \det A = b^n \det A \ .$$

2. Αν $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$ και $\det(A) = 3$ τότε $\det(2A) = 12$.

3. Αν $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{k})$ και $\det(A) = 3$ τότε $\det(2A) = 24$.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει το εξής:

Πρόταση 2.3.8. *Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Ισοδύναμα $\det A = 0$ αν και μόνο αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του είναι ο I_n. Δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου δεν είναι μηδέν σε όποια κλιμακωτή μορφή γραμμών και να έρθει. Από την άλλη η ορίζουσα του A προκύπτει από την κλιμακωτή μορφή γραμμών πολλαπλασιάζοντας (με κάτι διάφορο του μηδενός) ή αλλάζοντας πρόσημα, και ο μόνος τρόπος για να είναι η ορίζουσα μηδέν είναι ένα από τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου στη κλιμακωτή μορφή γραμμών να είναι μηδέν. Το συμπέρασμα τώρα έπεται. □

Παραδείγματα 2.3.9.

- Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ με μία γραμμή ή στήλη μηδέν. Τότε A δεν είναι αντιστρέψιμος αφού $\operatorname{rank}(A) < n$. Έπεται ότι $\det(A) = 0$.
- Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ όπου $\Gamma_i = b\Gamma_j$. Θα δείξουμε ότι $\det(A) = 0$. Πράγματι ο πίνακας $E_{i-b\cdot j}A$ μία γραμμή μηδέν και έτσι $\det\ A = \det\ E_{i-b\cdot j}A = 0$. Γενικά ισχύει ότι αν μία γραμμή του A είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης τότε η ορίζουσα του A είναι 0.

Το γινόμενο τετραγωνικών πινάκων AB είναι αντιστρέψιμο, αν και μόνο αν κάθε ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σε συνδυασμό με την σχέση 2.6 μας δίνει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3.10. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Τότε ισχύει*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Έτσι προκύπτουν τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 2.3.11. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Αν $\det A \neq 0$, τότε*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}\ .$$

Απόδειξη. Αφού $\det A \neq 0$ έπεται ότι υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A και $AA^{-1} = I_n$. Από την Πρόταση 2.3.10 έχουμε

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n \Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}\ .$$

□

Θυμίζουμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις στηλών ενός πίνακα γίνονται κατάλογία των στοιχειωδών πράξεων γραμμών και έτσι αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό από τα δεξιά με έναν στοιχειώδη πίνακα. Το επόμενο πόρισμα εξετάζει την επίδραση των στοιχειωδών πράξεων στηλών στην ορίζουσα του πίνακα:

Πόρισμα 2.3.12. *Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Αν* $A \xrightarrow[\Sigma_i \to \Sigma_i + a\Sigma_j]{} A'$ *τότε* $\det(A') = \det(A)$.

2. *Αν* $A \xrightarrow[\Sigma_i \to b\Sigma_i]{} A'$ *τότε* $\det(A') = b\det(A)$.

3. *Δηλαδή αν* $A \xrightarrow[\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j]{} A'$ *τότε* $\det(A') = -\det(A)$.

Απόδειξη. Οι παραπάνω στοιχειώδεις πράξεις στηλών αντιστοιχούν σε πολλαπλασιαμό από τα δεξιά με τους εξής πίνακες: $E_{j+a\cdot i}$ για το 1), $E_{b\cdot i}$ για το 2), $E_{i\leftrightarrow j}$ για το 3). Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.4 το πόρισμα έπεται. □

Παράδειγμα 2.3.13. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Τότε

$$A \xrightarrow[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_2]{} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2]{}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι $\det A = \det A_1 = -\det A_2 = -7$.

Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση που συνδέει την ορίζουσα των πινάκων A και A^T, όπου $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$(E_{i+a\cdot j})^T = E_{j+a\cdot i} \ ,$$

δηλαδή ο ανάστροφος ενός στοιχειώδη πίνακα αυτού του τύπου είναι και πάλι στοιχειώδης πίνακας του ιδίου τύπου. Ομοίως

$$(E_{i\leftrightarrow j})^T = E_{i\leftrightarrow j}, \ (E_{b\cdot i})^T = E_{b\cdot i} \ .$$

Έτσι προκύπτει ότι

Πρόταση 2.3.14.

$$\det(E_{i+a\cdot j})^T = 1, \ \det(E_{i\leftrightarrow j})^T = -1, \ \det(E_{b\cdot i})^T = b \ .$$

Θυμίζουμε ότι ένας πίνακας B είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν B^T είναι αντιστρέψιμος. Προκύπτει η πρόταση:

Πρόταση 2.3.15. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, τότε*

$$\det(A^T) = \det A.$$

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι $E_1 \cdots E_s\ A = R$ όπου R ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A, και $E_1, \ldots, E_s$ στοιχειώδεις πίνακες. Είδαμε επίσης ότι E_i^{-1} είναι στοιχειώδεις πίνακες. Άρα

$$A = E'_s \cdots E'_1\ R \text{ όπου } \ E'_i = (E_i)^{-1}$$

και

$$\det A = \det E'_s \cdots \ \det E'_1 \det R\ .$$

Υπολογίζοντας τον ανάστροφο του A βλέπουμε ότι

$$A^T = R^T (E'_1)^T \cdots (E'_s)^T$$

και

$$\det A = \det R^T \det(E'_1)^T \cdots \ \det(E'_s)^T\ .$$

Παρατηρούμε ότι $\det E'_i = \det(E'_i)^T$. Έτσι όταν A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή όταν $R = I_n$ τότε

$$\det A = \det E'_1 \cdots \ \det E'_s \cdot 1 = \det A^T\ .$$

Όταν A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε R έχει τη τελευταία γραμμή 0, άρα $\det R = \det R^T = 0$ και

$$\det A = \det A^T = 0\ .$$

□

Αφού η ορίζουσα του A είναι ίση με την ορίζουσα του αναστρόφου A^T και στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον έναν πίνακα αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις πράξεις στηλών του αναστρόφου προκύπτει ότι η ορίζουσα μπορεί να υπολογισθεί με την ανάπτυξη των στοιχείων ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη.

Πρόταση 2.3.16. *Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε*

$$\det A = (-1)^{1+i}\alpha_{1i}\ \det A_{1i} + (-1)^{2+i}\alpha_{2i}\ \det A_{2i} + \cdots + (-1)^{n+i}\alpha_{ni}\ \det A_{ni}\ ,$$

και

$$\det A = (-1)^{i+1}\alpha_{i1}\ \det A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}\ \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}\alpha_{in}\ \det A_{in}\ .$$

Παραδείγματα 2.3.17.

1. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$
Αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη παίρνουμε τον πίνακα
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
και αναπτύσσοντας την ορίζουσα του κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής, έχουμε
$$\det A = \det A_1 = -3 \ \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$
Στην πράξη ο υπολογισμός της ορίζουσας γίνεται πιο αποτελεσματικά με έναν συνδυασμό εφαρμογής στοιχειωδών πράξεων και της προηγούμενης πρότασης.

2. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$
Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του A αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης του A. Προκύπτει ότι $\det A = \det A_{11}$. Έτσι
$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$
Αναπτύσσοντας και πάλι κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης του νέου πίνακα βρίσκουμε τελικά για την ορίζουσα του αρχικού πίνακα
$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -2 \ .$$
Παρατηρούμε ότι ο αρχικός πίνακας A γράφεται ως συνδυασμός πινάκων:
$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

και ότι

$$\det A = \det I_2 \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Το επόμενο παράδειγμα είναι γενίκευση των παραπάνω.

3. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix},$$

όπου $B \in \mathcal{M}_r(\Bbbk)$, $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\Bbbk)$ και τότε $C \in \mathcal{M}_{r\times(n-r)}(\Bbbk)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{O} & I_{n-r} \end{bmatrix} .$$

Έτσι ανάγουμε τον υπολογισμό της $\det A$ σε υπολογισμό οριζουσών πινάκων με περισσότερα μηδενικά. Εργαζόμενοι επαγωγικά και αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα

$$\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix},$$

υπολογίζουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix} = \det D .$$

Ενώ εργαζόμενοι επαγωγικά και αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα

$$\begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{O} & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

υπολογίζουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{O} & I_{n-r} \end{bmatrix} = \det B .$$

Άρα

$$\det A = \det B \cdot \det D .$$

4. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{bmatrix} .$$

Ξεκινάμε εφαρμόζοντας διαδοχικά τις παρακάτω πράξεις στηλών:

$$\Sigma_4 \to \Sigma_4 - 2\Sigma_3, \quad S_3 \to \Sigma_3 - 2\Sigma_2, \quad \Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1 \ .$$

Ο πίνακας V_1 που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα με τον αρχικό πίνακα V:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-2 & 3(3-2) & 3^2(3-2) \\ 1 & 4-2 & 4(4-2) & 4^2(4-2) \\ 1 & 5-2 & 5(5-2) & 5^2(5-2) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του V_1 κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Έτσι

$$\det V = \det V_1 = \det V_2$$

όπου

$$V_2 = \begin{bmatrix} 3-2 & 3(3-2) & 3^2(3-2) \\ 4-2 & 4(4-2) & 4^2(4-2) \\ 5-2 & 5(5-2) & 5^2(5-2) \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε στον V_2 τις παρακάτω πράξεις γραμμών:

$$\Gamma_1 \to \frac{1}{3-2}\Gamma_1, \quad \Gamma_2 \to \frac{1}{4-2}\Gamma_2, \quad \Gamma_3 \to \frac{1}{5-2}\Gamma_3 \ .$$

Ο πίνακας V_3 που προκύπτει είναι

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$\det V = (3-2)(4-2)(5-2)\det V_3 \ .$$

(Παρατηρείστε τις ομοιότητες του πίνακα V_3 με τον πίνακα V.) Εφαρμόζουμε τις εξής πράξεις στηλών:

$$\Sigma_3 \to \Sigma_3 - 3\Sigma_2, \quad \Sigma_2 \to \Sigma_2 - 3\Sigma_1 \ .$$

Ο νέος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-3 & 4(4-3) \\ 1 & 5-3 & 5(5-3) \end{bmatrix}$$

και

$$\det V_3 = \det \begin{bmatrix} 4-3 & 4(4-3) \\ 5-3 & 5(5-3) \end{bmatrix} = 5(4-3)(5-3) - 4(4-3)(5-3) = (5-3)(4-3)(5-4)$$

Έτσι βρίσκουμε τελικά ότι

$$\det V \ .$$

5. Ο πίνακας της μορφής

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

λέγεται πίνακας του Vandermonde. Η διαδικασία που περιγράψαμε στο παραπάνω παράδειγμα γενικεύεται εύκολα και μπορεί κανείς να αποδείξει χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή ότι

$$\det V = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \ .$$

Συναντήσαμε πίνακες του Vandermonde στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετώντας καμπύλες που περνούν από δοθέντα σημεία. Όταν $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$ τότε $\det V \neq 0$ και ο πίνακας V είναι αντιστρέψιμος και άρα *υπάρχει ακριβώς μία καμπύλη βαθμού $n-1$ από τα σημεία $x_1, \ldots, x_n$.*

Ορισμός 2.3.18. *Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Ο πίνακας με στοιχείο στην (i,j)-θέση το $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$, λέγεται* **προσαρτημένος** *(adjoint) του A και συμβολίζεται με $\operatorname{adj}(A)$:*

$$\operatorname{adj}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)^T .$$

Παράδειγμα 2.3.19.

Έστω A ο πίνακας του Παραδείγματος 2.3.17. Τότε

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad |A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Έτσι ο πίνακας $\operatorname{adj}(A)$ προκύπτει από τις παραπάνω ορίζουσες με εναλασσόμενα πρόσημα και είναι

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Από την Πρόταση 2.3.16 προκύπτει ένας ακόμη τύπος για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $n \times n$-πίνακα, αλλά και του αντίστροφού του.

Πρόταση 2.3.20. *Έστω $A = (\alpha_{ij})$ ένας $n \times n$-πίνακας. Τότε*

i) $\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot I_n$.

ii) *Αν* $\det A \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$.

Παραδείγματα 2.3.21.

1. Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A του Παραδείγματος 2.3.17. Όπως είδαμε $\det A = 3$. Έτσι έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

ένας διαγώνιος πίνακας με $\det A \neq 0$, δηλ. $\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.20

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \begin{bmatrix} \alpha_2 \cdots \alpha_n & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ και ότι $\det A = i$. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του $\operatorname{adj}(A)$. Αφού $\det A \neq 0$ και A είναι αντιστρέψιμος πίνακας έχουμε ότι
$$\operatorname{adj}(A)A = \det AI_n \Rightarrow \operatorname{adj}(A) = \det AA^{-1} \ .$$
Αφού $\operatorname{adj}(A) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ έπεται ότι $\det \operatorname{adj}(A) = (i)^3 \det(A^{-1})$. Επίσης $\det(A^{-1}) = i^{-1} = -i$ και άρα $\det \operatorname{adj}(A) = -1$.

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Θα ολοκληρώσουμε αυτήν την ενότητα με μία εφαρμογή που έχει να κάνει με τις λύσεις του γραμμικού συστήματος
$$AX = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \ .$$
Έστω B η στήλη των σταθερών. Δηλαδή $B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T$. Πολλαπλασιάζουμε με A^{-1} και τις δύο πλευρές της σχέσης $AX = B$ και βρίσκουμε ότι
$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)\ B.$$
Ο πίνακας $\operatorname{adj}(A)\ B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{k})$. Το στοιχείο του στην i-γραμμή είναι ίσο με
$$(-1)^{1+i}|A_{1i}|\ \beta_1 + \cdots + (-1)^{n+i}|A_{ni}|\ \beta_n \ . \tag{2.7}$$
Έστω $A(i,B)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του πίνακα A με τον πίνακα B. Είναι εύκολο, αναπτύσσοντας την $\det A(i,B)$ κατά τα στοιχεία της i-στήλης, να διαπιστώσουμε ότι η έκφραση της σχέσης 2.7 είναι ίση με με $\det A(i,B)$. Άρα
$$x_i = \frac{\det A(i,B)}{\det A} \ , \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{2.8}$$
Καταλήγουμε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 2.3.22. (Μέθοδος του Cramer) *Το σύστημα $AX = B$ n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, έχει μοναδική λύση $(x_1, \dots, x_n)$, όπου*
$$x_i = \frac{\det A(i,B)}{\det A} \ , \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Παράδειγμα 2.3.23. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 2.3.17 είδαμε ότι $\det(A) = 3$ και άρα το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση. Θα υπολογίσουμε το x_3. Έχουμε ότι

$$A(3, B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Υπολογίζουμε $\det(A(3, B)$ με την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά την τρίτη στήλη και βλέπουμε ότι

$$|A(3, B)| = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -6 .$$

Άρα

$$x_3 = \frac{\det A(3, B)}{\det A} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ασκήσεις ενότητας 2.3

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 3+2i & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & i & 2 \\ -3+i & 3 & i \\ 7 & 2i & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

3. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ ο συζυγής πίνακας του A, όπου $\overline{a_{ij}}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του a_{ij}. Να αποδείξετε ότι $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

4. Έστω $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ και ότι $\det A = i$. Να βρείτε $\det 2A$ και $\det(\mathrm{adj}(A))$.

5. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Να αποδείξετε ότι αν A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε και $\mathrm{adj}(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Σε κάθε περίπτωση να δώσετε τον τύπο που συνδέει την ορίζουσα $\det(\mathrm{adj}(A))$ με $\det(A)$.

6. Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα του $\mathcal{M}_n(K)$, όπου n περιττός, είναι ίση με μηδέν.

7. Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \; \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Να λυθούν με τη μέθοδο Cramer τα παρακάτω συστήματα:

i)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 9\,. \end{array}$$

2.4 Επίλογος.

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Ένα από τα θέματα που θα συζητήσουμε στα επόμενα κεφάλαια είναι η 'πρόβλεψη' του A^n για μεγάλα n. Τέτοιου είδους συμπεράσματα έχουν μεγάλη σημασία για τις εφαρμογές. Για παράδειγμα έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.6 & 1.4 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακας που περιγράφει ένα ιδιαίτερα απλό πληθυσμιακό μοντέλο ενός κλειστού συστήματος γατών και ποντικών. Έστω ότι γ_k είναι ο πληθυσμός των γατών στον χρόνο k ενώ p_k είναι ο πληθυσμός των ποντικών. Σύμφωνα με τις πληροφορίες που έχουν καταγραφεί στον A σε χρόνο $k+1$ οι αντίστοιχοι πληθυσμοί είναι

$$\gamma_{k+1} = 0.7\gamma_k + 0.2p_k, \quad \mathfrak{p}_{k+1} = -0.6\gamma_k + 1.4p_k \ .$$

Δηλαδή το μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} \gamma_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_k \\ p_k \end{bmatrix} \ .$$

Έστω λοιπόν ότι είναι γνωστός ο πληθυσμός στον χρόνο 0. Ποιός θα είναι ο πληθυσμός των γατών και ποντικών μετά από 10 ή 20 χρόνου; Παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ p_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

και γενικότερα

$$\begin{bmatrix} \gamma_k \\ p_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ p_0 \end{bmatrix} \ .$$

Η δυνατότητα λοιπόν να μελετήσουμε το A^n για μεγάλα n μας επιτρέπει να μελετήσουμε το μέλλον.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι αν $A \in \mathcal{M}_l(\mathbb{k})$ τότε ο A ικανοποιεί μία εξίσωση πινάκων, που ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του A. Αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της δύναμης A^n για $n \geq l$ βάσει μικρότερων δυνάμεων του A. Θα δούμε επίσης ότι ένας άλλος τρόπος για να μελετήσουμε τις δυνάμεις A^n προκύπτει από την μελέτη των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A.

Από ιστορική σκοπιά, ο μαθηματικός που αναγνώρισε πρώτος την σημασία της άλγεβρας των πινάκων και που ενοποίησε τα διάφορα κομμάτια της θεωρίας σε έναν ενιαίο ξεχωριστό μαθηματικό τομέα ήταν ο Άγγλος A. Cayley, (1821-1825). Παρόλο που ο Cayley έβγαζε τα προς το ζην ασκώντας δικηγορία, το πραγματικό του πάθος ήταν τα μαθηματικά. Το 1858 δημοσίευσε το

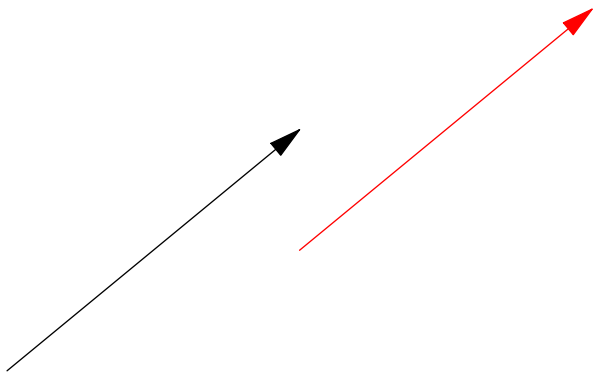
'Μνημόνια στην Θεωρία των Πινάκων' , (Memoir on the Theory of Matrices). Ο όρος 'matrix' τον οποίο χρησιμοποίησε και που από τότε έχει επικρατήσει στην μαθηματική ορολογία οφείλεται στον φίλο του, επίσης Άγγλο δικηγόρο και μαθηματικό, τον Sylvester, (1814-1897), που τον πρωτοεισήγαγε το 1850. Στα Ελληνικά ο όρος matrix μεταφράζεται από πολλούς και ως 'μητρώο'. Ο Cayley εισήγαγε τον συμβολισμό $|A|$ για την ορίζουσα του πίνακα A, όρισε την πρόσθεση πινάκων, τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό και τους αντιστρόφους των αντιστρέψιμων πινάκων. Νωρίτερα στο έργο του Γάλλου μαθηματικού Cauchy (1789-1857) συναντούμε την έννοια της ορίζουσας και την πολλαπλασιαστική ιδιότητα των οριζουσών. Είναι ενδιαφέρον ότι ο Cauchy εισήγαγε τον όρο array το 1826 που χρησιμοποιείται παράλληλα με τον όρο matrix. Τέλος οφείλουμε να αναφέρουμε τον Γερμανό μαθηματικό Frobenius (1849-1917) ο οποίος δούλευε με τις αλγεβρικές αυτές δομές χωρίς να έχει γνώση του έργου του Cayley. Ανάμεσα σε άλλα αποτελέσματα, ο Frobenius έδωσε τον ορισμό της βαθμίδας ενός πίνακα το 1878. Όταν διάβασε το έργο του Cayley το 1896 υιοθέτησε την ορολογία του Cayley και τίμησε το έργο του δίνοντας το όνομά του Cayley σε ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, το Θεώρημα των Cayley-Hamilton. Θα μελετήσουμε αυτό το Θεώρημα στο τελευταίο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

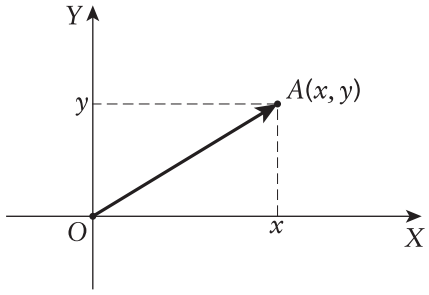
Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

3.1 Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

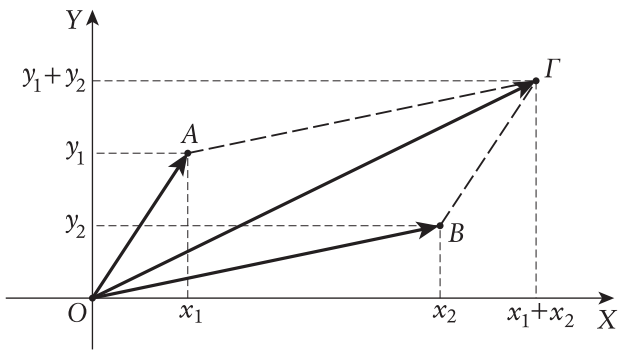
Σκεφτόμαστε γραφικά τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ως ευθύγραμμα τμήματα που χαρακτηρίζονται από το μήκος, την κλίση και την φορά τους. Το διάνυσμα $\overrightarrow{v}$ του $\mathbb{R}^n$ προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του: $\overrightarrow{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_i \in \mathbb{R}^n$. Το αρχικό σημείο του $\overrightarrow{v}$ δεν είναι κρίσιμο χαρακτηριστικό του $\overrightarrow{v}$, με την έννοια ότι το $\overrightarrow{v}$ μπορεί να αναπαρασταθεί στον $\mathbb{R}^n$ με διαφορετικά αρχικά σημεία όπως φαίνεται στη παρακάτω εικόνα. Οι ευθείες που προσδιορίζονται με αυτόν τον τρόπο είναι παράλληλες.



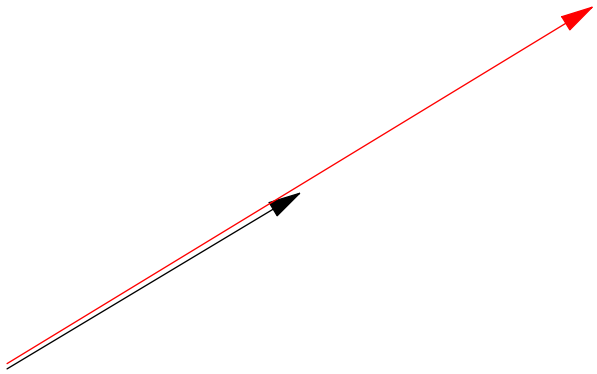
Αν $A(a_1, \ldots, a_n)$ είναι το το αρχικό σημείο του $\overrightarrow{v}$ και $B(b_1, \ldots, b_n)$ είναι το τελικό σημείο του $\overrightarrow{v}$ τότε $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$. Στην ειδική περίπτωση που το αρχικό σημείο του $\overrightarrow{v}$ είναι η αρχή των αξόνων $O(0, \cdots, 0)$ και το τελικό σημείο του $\overrightarrow{v}$ είναι $A(x_1, \cdots, x_n)$ τότε $\overrightarrow{v} = (a_1, \ldots, a_n)$. Στο επόμενο παράδειγμα παριστάνουμε γραφικά το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ στον $\mathbb{R}^2$ με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων.



Μπορούμε λοιπόν να ερμηνεύσουμε την ακολουθία $(a_1, \ldots, a_n)$ με δύο τρόπους: ως σημείο του $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $(a_1, \ldots, a_n)$ και ως διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ που η διαφορά των συντεταγμένων του αρχικού σημείου από το τελικό είναι $(a_1, \ldots, a_n)$. Προσθέτουμε δύο διανύσματα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου: αν $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ και $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. Στο παρακάτω σχήμα προσθέτουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$. Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B\Gamma}$ ενώ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A\Gamma}$.



Τέλος μπορούμε ακόμα να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ με ένα στοιχείο c του $\mathbb{R}$: $\overrightarrow{ca} := c\overrightarrow{a} = (ca_1, \ldots, ca_n)$. Αν παραστήσουμε γραφικά τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{ca}$ με το ίδιο αρχικό σημείο τότε τα τελικά τους σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αν τα παραστήσουμε με διαφορετικά αρχικά σημεία τότε τα τελικά τους σημεία ανήκουν σε παράλληλες ευθείες.



Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις n-άδες στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ και κατά συνέπεια για τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$:

1. (προσεταιριστική ιδιότητα) $\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w}$, για όλα τα $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

2. το διάνυσμα $\overrightarrow{0}$ του $\mathbb{R}^n$ έχει την εξής ιδιότητα: $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}$, για όλα τα v διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

3. για κάθε v διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα στοιχείο $-\overrightarrow{v}$ διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v})$.

4. (Αντιμεταθετική ιδιότητα) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, για όλα τα v, u διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

5. (Επιμεριστική ιδιότητα): $\kappa(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = \kappa\overrightarrow{v} + \kappa\overrightarrow{u}$ και $(\kappa + \lambda)v = \kappa\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{v}$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{v}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

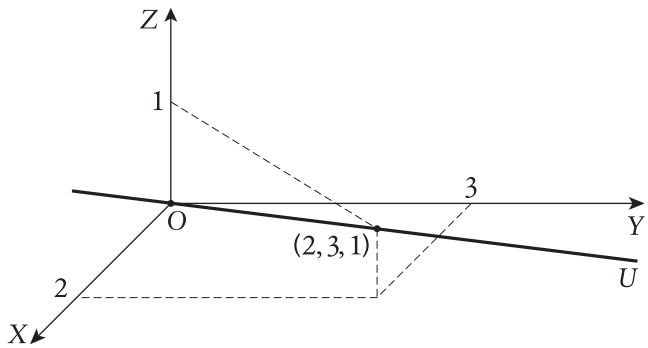
6. $\kappa(\lambda\overrightarrow{v}) = (\kappa\lambda)\overrightarrow{v}$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{v}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

7. $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$, όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$ και για όλα τα διανύσματα $\overrightarrow{v}$ στον $\mathbb{R}^n$.

Αυτές οι *εφτά* ιδιότητες είναι οι βασικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν *αλγεβρικά* έναν διανυσματικό χώρο. Παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ αλλά και για τα σημεία του $\mathbb{R}^n$. Θα δούμε ότι οι ιδιότητες αυτές ισχύουν για κάποια σύνολα διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ και αντίστοιχα και για κάποια σύνολα σημείων του $\mathbb{R}^n$. Στα παρακάτω παραδείγματα θα μελετήσουμε σύνολα διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ και την αντίστοιχη *μοντελοποίηση* τους.

Παραδείγματα 3.1.1.

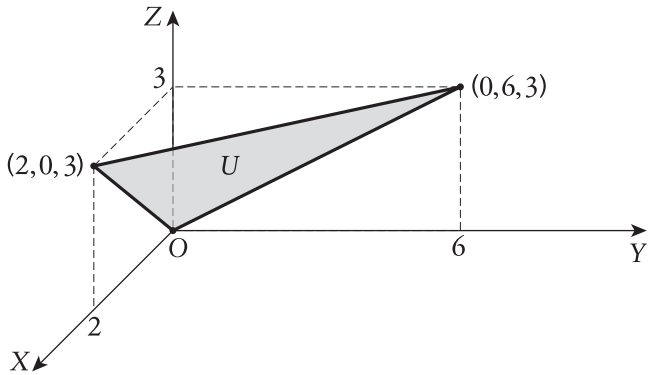
- Έστω $\overrightarrow{v} = (2,3,1)$. Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(2,3,1)$ είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{v}$. Η εξίσωση αυτής της εθείας είναι
$$U = \{k(2,3,1) = (2k,3k,k) : \ k \in \mathbb{R}\} \ .$$



Σκεφτόμαστε το σημείο $(2k,3k,k)$ ως τελικό σημείο του $k\overrightarrow{v}$ που έχει αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$. Έτσι αντιστοιχούμε στην ευθεία U το σύνολο διανυσμάτων
$$\{k\overrightarrow{v} : \ k \in \mathbb{R}\} \ .$$
Παρατηρούμε ότι για τα στοιχεία του U ισχύουν οι βασικές εφτά ιδιότητες που παραθέσαμε προηγουμένως.

- Έστω το επίπεδο
$$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ 3a + b = 2c\} \ .$$

Παρατηρούμε ότι η αρχή των αξόνων $O(0,0,0) \in U$. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $A(a,b,c) \in U$ τότε η ευθεία που περνά από το O και το A ανήκει εξ ολοκλήρου στο επίπεδο U. Πράγματι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το O και το A είναι: $L = \{(ka,kb,kc) : \ k \in \mathbb{R}\}$. Αφού $(a,b,c) \in U$ έπεται ότι $3a + b = 2c$, άρα $k(3a+b) = k(2c)$ και $3ka + kb = 2kc$, δηλ. $((ka,kb,kc) \in U$. Έτσι όταν παριστάνουμε γραφικά τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = (2,0,3)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,6,3)$ επιλέγοντας για αρχικό τους σημείο την αρχή των αξόνων προκύπτει ότι $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ κείτονται εξολοκλήρου επί του U. Θα δούμε ότι στο επίπεδο U αντιστοιχεί το σύνολο
$$\{k\overrightarrow{v_1} + s\overrightarrow{?} \ k,s \in \mathbb{R}\} \ .$$
Παρατηρούμε ότι για το U ισχύουν οι εφτά βασικές ιδιότητες.

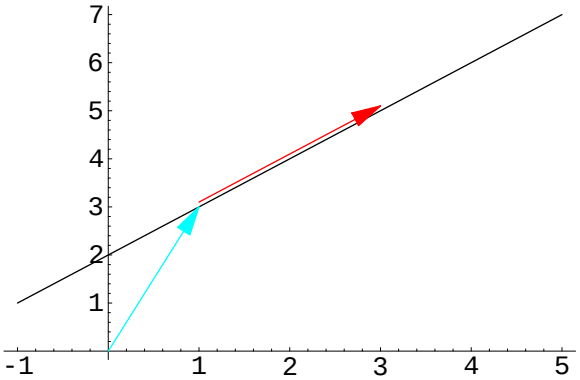


- Η ευθεία L στον $\mathbb{R}^n$ που περνά από τα σημεία A και B είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Κάθε διάνυσμα με αρχικό και τελικό σημείο πάνω στην L είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{AB}$. Αν C και D είναι δύο σημεία επί της L και O είναι η αρχή των αξόνων τότε

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{AB}.$$

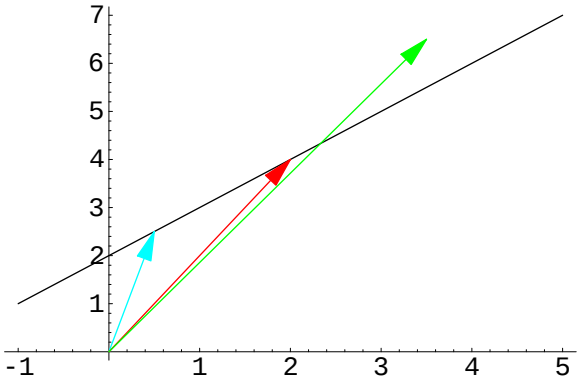
Για παράδειγμα έστω $A(1,3)$, $B(2,4)$. Τότε $\overrightarrow{OA} = (1,3)$, $\overrightarrow{AB} = (1,1)$ και η ευθεία L που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία είναι

$$L = \{(1,3) + k(1,1) : \ k \in \mathbb{R}\} \ .$$



Στον $\mathbb{R}^2$ η ευθεία L περιγράφεται από μία εξίσωση: έστω ότι $(x,y) \in L$. Τότε $(x,y) = (1,3) + k(1,1)$ για κάποιο k, άρα $x = 1 + k$, $y = 3 + k$. Αντικαθιστώντας το k βρίσκουμε ότι $y = x + 2$. Τονίζουμε ότι μία εξίσωση περιγράφει μία ευθεία μόνο στον $\mathbb{R}^2$ και όχι στον $\mathbb{R}^n$ για $n > 2$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα δύο στοιχείων της L δεν ανήκει στην L όπως φαίνεται γραφικά στην επόμενη εικόνα.

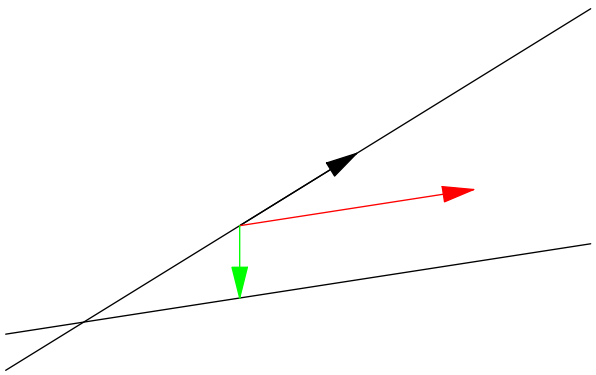


Το τελικό σημείο C του διανύσματος $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ είναι εκτός της L. Προτείνουμε στον αναγνώστη να δείξει ότι αυτό συμβαίνει γιατί η ευθεία δεν περνά από την αρχή των αξόνων!

- Έστω ότι στο $\mathbb{R}^2$, τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{w}$ ορίζουν δύο διαφορετικές κατευθύνσεις: με άλλα λόγια $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{w} \neq 0$ και δεν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{w}$. Θα δείξουμε γεωμετρικά ότι το σύνολο

$$U = \{k\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{w} : \ k, t \in \mathbb{R}\}$$

αποτελείται από όλα τα διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$. Έστω $\overrightarrow{h}$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Θεωρούμε ως αρχικό σημείο και των τριών διανυσμάτων την αρχή των αξόνων O. Θεωρούμε L_1 την ευθεία που είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{u}$ και περνά από το O. Αν B είναι το τελικό σημείο του $\overrightarrow{h}$ θεωρούμε την ευθεία L_2 που είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{w}$ και περνά από το B. Αφού L_1, L_2 δεν είναι παράλληλες, οι L_1, L_2 τέμνονται σε ένα σημείο C, βλ. παρακάτω εικόνα.



Προκύπτει ότι $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$. Αφού $\overrightarrow{OC}$ είναι παράλληλο προς το $\overrightarrow{u}$

έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{u}$. Ομοίως υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{CB} = t\overrightarrow{w}$. Άρα $\overrightarrow{h} \in U$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε αλγεβρικά ότι υπάρχουν $k, t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{h} = k\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{w}$. Έστω $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{w} = (b_1, b_2)$, $\overrightarrow{h} = (c_1, c_2)$. Τα $k, t \in \mathbb{R}$ πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} ka_1 + tb_1 &= c_1 \\ ka_2 + tb_2 &= c_2 \end{aligned} .$$

Με άλλα λόγια θέλουμε να δείξουμε ότι το γραμμικό σύστημα

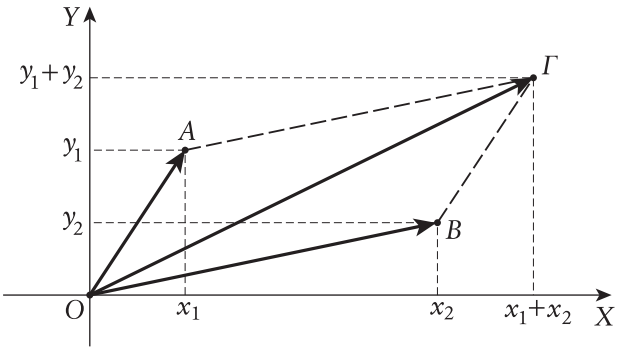
$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

είναι συμβατό. Οι λύσεις του συστήματος θα δώσουν τα k και t που θέλουμε. Ο πίνακας των συντελεστών αυτού του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι αφού $\overrightarrow{u}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{w}$ οι στήλες του A δεν είναι πολλαπλάσια η μία της άλλης. Άρα $\det A \neq 0$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Έπεται ότι το παραπάνω σύστημα είναι πάντα συμβατό και ότι έχει μία μοναδική λύση (k, t).

- Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου (βάση επί ύψος) μπορεί να υπολογισθεί από την ορίζουσα του πίνακα που δημιουργείται από τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων που το καθορίζουν. Έστω P το παραλληλόγραμο $OA\Gamma B$ όπου O η αρχή των αξόνων, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.



Θα δείξουμε ότι το εμβαδόν του P είναι ίσο με $|\det A_P|$, όπου

$$A_P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} .$$

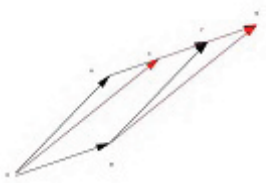
Ο πίνακας A_P θα λέγεται ο πίνακας των συντεταγμένων του παραλληλογράμμου P. Θα ξεκινήσουμε με μία βασική παρατήρηση. Έστω L η ευθεία που περνάει από τα σημεία A και Γ και L_1 η ευθεία που περνά από τα σημεία 0 και B. Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και όλα τα σημεία της L απέχουν εξίσου από την ευθεία L_1. Έστω $C(x_3, y_3) \in L$. Ισχύει ότι

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{A\Gamma} ,$$

και άρα υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(x_3, y_3) = (x_1 + kx_2, y_1 + ky_2)$. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο P_1 $(OCDB)$ και θα συγκρίνουμε το εμβαδόν του P_1 με το εμβαδόν του P. Για το D έχουμε τη σχέση:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} .$$

Παρατηρούμε ότι τα παραλληλόγραμμα P και P_1 έχουν την ίδια βάση (το μήκος του $\overrightarrow{OB}$) και το ίδιο ύψος, άρα έχουν τα ίδια εμβαδά, βλ. παρακάτω εικόνα:



Θα συγκρίνουμε τους πίνακες των συντεταγμένων των δύο παραλληλογράμμων, A_P και A_{P_1}. Έχουμε ότι

$$A_{P_1} = \begin{bmatrix} x_1 + kx_2 & y_1 + ky_2 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} .$$

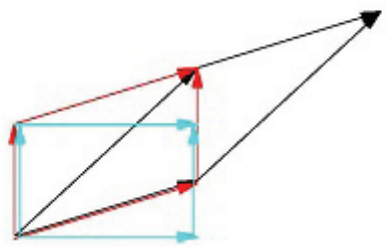
Παρατηρούμε ότι A_{P_1} προκύπτει από τον A_P μετά από μία στοιχειώδη πράξη γραμμών. Πράγματι

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 + k\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} x_1 + kx_2 & y_1 + ky_2 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι

$$\det(A_P) = \det(A_{P_1}) \ .$$

Θα εφαρμόσουμε αυτή τη παρατήρηση δύο φορές: τη πρώτη φορά κρατάμε την πλευρά $\overrightarrow{OB}$ σταθερή και βρίσκουμε το σημείο C που είναι στη τομή της ευθείας L και του άξονα των Y. Σχηματίζουμε έτσι ένα παραλληλόγραμμο P_1 $(OCDB)$ που έχει το ίδιο εμβαδόν με το P και που η μία του κορυφή C είναι πάνω στον άξονα των Y. Ισχύει ότι $C(0, c)$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ ενώ $\overrightarrow{BE}$ είναι παράλληλο προς $\overrightarrow{OC}$, βλ. παρακάτω σχήμα. Την δεύτερη φορά κρατάμε τη πλευρά $\overrightarrow{OC}$ σταθερή ενώ προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα BE βρίσκοντας $D(x_2, 0)$ το σημείο τομής με τον άξονα των X και σχηματίζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο P_2 $(OCFD)$, βλ. παρακάτω σχήμα:



Αφού P_2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το εμβαδόν του είναι

$$|c||x_2| = |c \cdot x_2| \ .$$

Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, το εμβαδόν του P ισούται με το εμβαδόν του P_1 που με τη σειρά του ισούται με το εμβαδόν του P_2, άρα το εμβαδόν του P είναι $|c \cdot x_2|$. Οι αντίστοιχοι πίνακες A_P, A_{P_1}, A_{P_2} έχουν ίσες ορίζουσες αφού οι πίνακες A_{P_1}, A_{P_2} προκύπτουν από τον A_P μετά από διαδοχικές στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τύπου (1). Παρατηρούμε ότι

$$A_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Άρα $\det(A_P) = \det(A_{P_2}) = -x_2 c$ και

$$\text{εμβαδόν του } P = |\det(A_P)| \ .$$

- Αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^3$, ένα παραλληλεπίπεδο καθορίζεται από τις συντεταγμένες τριών διανυσμάτων. Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα των συντεταγμένων αυτών των τριων διανυσμάτων. Η απόδειξη επαφίεται ως άσκηση στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Παρατηρούμε ότι 3 διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ θα δώσουν ένα παραλληλεπίπεδο αν δεν ανήκουν και τα τρία σε ένα επίπεδο. Διαφορετικά το στερεό δεν έχει όγκο και η ορίζουσα είναι μηδέν.

Ασκήσεις ενότητας 3.1

1. Να αναπαραστήσετε γραφικά το σύνολο $\{(1,2)+k(1,0) : \ k \in \mathbb{R}\}$ και να δώσετε την εξίσωση της ευθείας.

2. Να αναπαραστήσετε γραφικά το σύνολο $\{(1,2,0)+k(1,0,1) : \ k \in \mathbb{R}\}$.

3. Να αναπαραστήσετε γραφικά το σύνολο $\{k(1,1,1) : \ k \in \mathbb{R}\}$.

4. Να αναπαραστήσετε γραφικά το σύνολο $\{k(1,1,1)+t(1,0,1) : \ k,t \in \mathbb{R}\}$ και να δώσετε την εξίσωση του επιπέδου.

5. Να αναπαραστήσετε γραφικά το σύνολο $\{(0,1,0)+k(1,1,1)+t(1,0,1) : k,t \in \mathbb{R}\}$ και να δώσετε την εξίσωση του επιπέδου.

6. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,7)$.

7. Να δείξετε ότι το σχήμα με κορυφές $(1,1)$, $(2,3)$, $(1,5)$, $(2,7)$ είναι παραλληλόγραμμο και να βρείτε το εμβαδόν του.

8. Να δείξετε ότι το σχήμα με κορυφές $(1,1,1)$, $(2,3,1)$, $(1,5,1)$, $(2,7,1)$ είναι παραλληλόγραμμο και να βρείτε το εμβαδόν του.

9. Να αναπαραστήσετε γραφικά το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $(1,1,1)$, $(0,2,1)$, $(0,0,3)$ και να βρείτε τον όγκο του.

3.2 Υποχώροι του $\mathbb{R}^n$

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί εφτά βασικές ιδιότητες. Στα παραδείγματα είδαμε ότι κάποια υποσύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις εφτά αυτές ιδιότητες όταν στην θέση του $\mathbb{R}^n$ θέσουμε το όνομα του υποσυνόλου. Για παράδειγμα αν $\overrightarrow{u}$ είναι διάνυσμα στο

$\mathbb{R}^n$ τότε το σύνολο $U_1 = \{k\overrightarrow{u} : k \in \mathbb{R}\}$ ικανοποιεί τις εφτά βασικές ιδιότητες όταν στην θέση του $\mathbb{R}^n$ θέσουμε το U_1. Αντίθετα αν $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και $\overrightarrow{u} \notin \{k\overrightarrow{w} : k \in \mathbb{R}\}$ τότε στο σύνολο $U_2 = \{\overrightarrow{v} + k\overrightarrow{w} : k \in \mathbb{R}\}$ δεν ισχύουν όλες οι αναφερόμενες ιδιότητες. Είδαμε επίσης ότι γραφικά και τα δύο σύνολα αντιστοιχούν σε ευθείες του $\mathbb{R}^n$. Η βασική ιδιότητα που διαφοριοποιεί τα δύο σύνολα είναι ότι το πρώτο σύνολο U_1 είναι **κλειστό** ως προς τη πράξη της πρόσθεσης και του σκαλιανού πολλαπλασιασμού ενώ το δεύτερο σύνολο U_2 δεν είναι. Τι εννοούμε με αυτό: το άθροισμα δύο διανυσμάτων του U_1 ανήκει στο U_1. Πράγματι αν $k\overrightarrow{u}$, $\lambda\overrightarrow{u}$ είναι δύο τυχαία διανύσματα του U_1 τότε

$$k\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u} = (k+\lambda)\overrightarrow{u} \in U_1.$$

Το ίδιο ισχύει και για το σκαλιανό γινόμενο ενός διανύσματος του U_1 με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$:

$$\lambda(k\overrightarrow{u}) = (k\ \lambda)\overrightarrow{u} \in U_1,\ \forall\ \lambda, k \in \mathbb{R}.$$

Έτσι αφού ισχύουν οι βασικές ιδιότητες στο $\mathbb{R}^n$ ισχύουν αυτόματα και 'κληρονομικά' οι αντίστοιχες ιδιότητες για το σύνολο U_1. Κάνουμε μία ιδιαίτερη μνεία στη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{u} \in U_1$$

και

$$-\overrightarrow{u} = (-1) \cdot \overrightarrow{u} \in U_1\ .$$

Έτσι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και το αντίθετο κάθε στοιχείου του U_1 ανήκουν στο U_1. Αντίστοιχα για το U_2 παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{0} \notin U_2$. Πράγματι έστω ότι $\overrightarrow{0}$ ήταν στοιχείο του U_2. Τότε θα υπήρχε $k \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} + k\overrightarrow{w} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{0} - \overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v} = -(k\overrightarrow{w}) \ \Rightarrow \overrightarrow{v} = (-k)\overrightarrow{w}\ .$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\overrightarrow{v}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{w}$. Άρα το σύνολο U_2 δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και δεν ισχύει η δεύτερη από τις εφτά βασικές ιδιότητες. Παρατηρούμε επίσης ότι αφού $\overrightarrow{0} \notin U_2$ αυτό σημαίνει ότι το σύνολο U_2 δεν είναι κλειστό ως προς τη πράξη του σκαλιανού πολλαπλασιασμού αφού $0 \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in U_2$ ενώ

$$\overrightarrow{0} = 0(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \notin U_2\ .$$

Με αφορμή τη τελευταία παρατήρηση γενικεύουμε στο συμπέρασμα ότι αν ένα σύνολο U διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό ως προς τη πράξη του σκαλιανού

πολλαπλασιασμού τότε το U περιέχει το $\overrightarrow{0}$. Τα σύνολα διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τις εφτά βασικές ιδιότητες είναι αναγκαστικά κλειστά ως προς τη πράξεις της πρόσθεσης και του σκαλιανού πολλαπλασιασμού. Τα σύνολα αυτά ονομάζονται **διανυσματικοί υποχώροι** του $\mathbb{R}^n$. Έστω τώρα ότι U είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Θα απομονώσουμε s στοιχεία του U, τα διανσματα $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_s}$. Αν πολλαπλασιάσουμε το κάθε $\overrightarrow{u_i}$ με ένα τυχαίο στοιχείο $k_i \in \mathbb{R}$ τότε αφού U είναι κλειστό και ως προς τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό και και ως προς τη πρόσθεση διανυσμάτων έπεται ότι

$$\overrightarrow{u} = \kappa_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \kappa_s \overrightarrow{u_s} \in U \ .$$

Λέμε ότι $\overrightarrow{u}$ είναι **γραμμικός συδυασμός** των διανυσμάτων $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_s}$. Αν X είναι ένα σύνολο διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ τότε λέμε ότι $S(X)$, ο χώρος που **παράγεται** από το X, είναι το σύνολο των *γραμμικών συνδυασμών* των στοιχείων του X με συντελεστές από το $\mathbb{R}$:

$$S(X) = \{ \ \kappa_1 u_1 + \cdots + \kappa_s u_s \ : \ \kappa_j \in \mathbb{R}, \ u_j \in X, \ s \in \mathbb{N}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $X \subset S(X)$ και ότι $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v} \in S(X)$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $S(X)$ ικανοποιεί τις βασικές ιδιότητες της προηγούμενης ενότητας και είναι διανυσματικός χώρος. Αντίστροφα αν U είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $S(U) \subset U$. Αφού $U \subset S(U)$ έπεται ότι $U = S(U)$. Ισχύει λοιπόν το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1. *Ένα σύνολο U διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $U = S(X)$ για κάποιο σύνολο X.*

Είδαμε προηγουμένως ότι αν U είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ τότε $U = S(X)$ για κάποιο σύνολο X. Πιθανόν όμως να υπάρχουν δύο σύνολα X_1 και X_2 έτσι ώστε $U = S(X_1) = S(X_2)$. Έτσι το βασικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι να προσδιορίσουμε το μικρότερο σύνολο X του U με την ιδιότητα $U = S(X)$. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{v}$ ως v, χωρίς το βελάκι. Παρατηρούμε ότι αν $U = S(X)$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ και για όλα τα στοιχεία u, w του U, ισχύει

$$\kappa u \in U \ \text{ και } \ u + w \in U.$$

Αν λοιπόν κάποιο υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ δεν ικανοποιεί μία από αυτές τις συνθήκες τότε το σύνολο S δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα 3.2.2.

1. Έστω $X = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Αφού $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$ έπεται ότι $\mathbb{R}^2 = S(X)$.

2. Έστω $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ και $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$(a_1, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, \ldots, 0, 1)$$

και άρα $\mathbb{R}^n = S(X)$.

3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο υποχώρος $S(\{0\})$ του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο και λέγεται **μηδενικός υποχώρος** του $\mathbb{R}^n$.

4. Ο υποχώρος $S(\{(1, 2)\}) = \{\ (\kappa, 2\kappa)\ :\ \kappa \in \mathbb{R}\ \} \subset \mathbb{R}^2$ είναι ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ που περνά από την αρχή των αξόνων.

5. Ο υποχώρος $S(\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}) \subset \mathbb{R}^n$ είναι *ευθεία* του $\mathbb{R}^n$ που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

6. Έστω $X = \{(1, 2), (2, 4)\}$. Θα δείξουμε ότι $S(X)$ είναι μία ευθεία του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$S(X) = \{\kappa(1, 2)+\lambda(2, 4) :\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\kappa+2\lambda, 2\kappa+4\lambda) :\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{\kappa + 2\lambda(1, 2) :\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 2) :\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Έτσι παρόλο που το X αποτελείται από δύο διανύσματα, ισχύει ότι $S(X) = S(\{(1, 2)\})$ Παρατηρούμε ακόμη ότι $S(X) = S(\{(2, 4)\}) = S(\{(3, 6)\})$, και ούτω καθεξής. Έτσι το διάνυσμα που παράγει $S(X)$ δεν είναι μοναδικό.

7. Έστω $X = \{(1, 2), (0, 1)\}$. Θα δείξουμε ότι $S(X) = \mathbb{R}^2$. Πράγματι έστω $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Θα βρούμε x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$(\alpha, \beta) = x_1(1, 2) + x_2(0, 1)\ .$$

Το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ισότητα είναι

$$\begin{array}{lll} x_1 & & = \alpha \\ 2x_1 & +x_2 & = \beta \end{array}.$$

Αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \alpha \\ 2 & 1 & | & \beta \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \alpha \\ 0 & 1 & | & \beta - 2\alpha \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta - 2\alpha$. Άρα

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 2\alpha + (\beta - 2\alpha)) = \alpha(1, 2) + (\beta - 2\alpha)(0, 1)\ , \qquad (3.1)$$

και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X. Για παράδειγμα

$$(0,1) = 0(1,2) + 1(0,1) \ ,$$

ενώ

$$(1,0) = 1(1,2) - 2(0,1) \ .$$

8. Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,2,0)$ παράγουν ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ και θα δώσουμε την εξίσωση του επιπέδου. Θέτουμε $X = \{(1,0,1),(0,2,0)\}$. Τότε

$$S(X) = \{ \ \kappa(1,0,1) + \lambda(0,2,0) \ : \ \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \ \}$$

Το διάνυσμα $(a,b,c) \in S(X)$ αν και μόνο αν υπάρχουν κ, λ έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

να είναι συμβατό. Αφού

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 1 & 0 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c-a \end{array}\right] \ ,$$

έπεται ότι το παραπάνω σύστημα είναι συμβατό αν και μόνο αν $a - c = 0$. Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη η λύση του συστήματος είναι $\kappa = a$, $\lambda = b/2$ και

$$(a,b,a) = a(1,0,1) + \frac{b}{2}(0,2,0) \ .$$

Άρα

$$S(X) = \{ \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a - c = 0 \ \} = \{(a,b,a) : \ a,b \in \mathbb{R}\} \ .$$

9. Αντίστροφα, ξεκινώντας από την εξίσωση του επιπέδου μπορούμε να βρούμε το σύνολο που το παράγει. Το σύνολο $U = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x+y-2z = 0 \ \}$ είναι ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Από τη σχέση $3x+y-2z = 0$, έπεται ότι $-3x + 2z = y$. Έτσι αν $(x,y,z) \in U$, τότε

$$(x,y,z) = (x, -3x + 2z, z) = x(1,-3,0) + z(0,2,1).$$

Παρατηρούμε ότι τα $(1,-3,0)$ και $(0,2,1)$ είναι στοιχεία του U. Άρα

$$U = \{ \ x(1,-3,0) + z(0,2,1) \ / \ x, z \in \mathbb{R} \ \} = S(\{(1,-3,0),(0,2,1)\}),$$

και ο U παράγεται από τα $(1,-3,0)$ και $(0,2,1)$. Εάν λύσουμε την εξίσωση $3x+y-2z=0$ ως προς το z τότε βρίσκουμε ένα διαφορετικό σύνολο διανυσμάτων που παράγει το U. Πράγματι αφού $z=1/2(3x+y)$ έπεται ότι

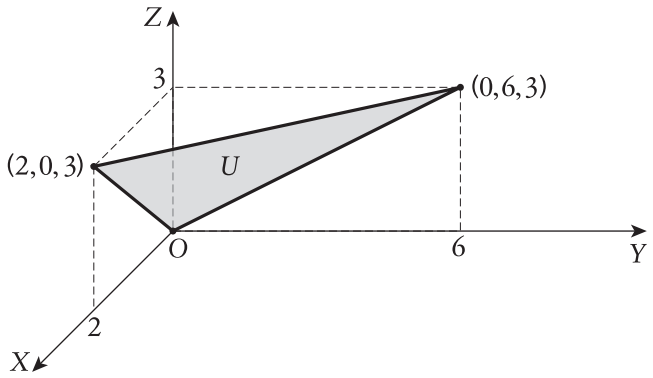
$$(x,y,z)=(x,y,\frac{3x+y}{2})=x(1,0,\frac{3}{2})+y(0,1,\frac{1}{2})$$

και

$$U=S(\{(1,0,\frac{3}{2}),(0,1,\frac{1}{2})\})\ .$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο παράγοντα διανύσματα με 2 βρίσκουμε ένα καινούριο παράγον σύνολο:

$$U=S(\{(2,0,3),(0,2,1)\})\ .$$



10. Η ευθεία $L=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x+y=1\ \}$ δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^2$ αφού το $\overrightarrow{0}\notin L$. Παρατηρούμε επίσης

    - $(1,0)$, $(0,1)\in L$ ενώ $(1,1)=(1,0)+(0,1)\notin L$
    - $(1,0)\in L$ ενώ $2(1,0)=(2,0)\notin L$.

    Το σύνολο L δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ούτε ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων ούτε και ως προς τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό.

11. Το σύνολο $U=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+2y+3z=1\ \}$ είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$. Το σύνολο U δεν αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^3$, γιατί το μηδενικό στοιχείο $(0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$ δεν ανήκει στο U. Με άλλα λόγια το U δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περνά από την αρχή των αξόνων.

12. Η ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που περιγράφεται από τα στοιχεία του συνόλου $U=\{\ (x,1,2x)\ :\ x\in\mathbb{R}\ \}$ δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αφού $(0,0,0)\notin U$.

13. Το σύνολο
$$U = \{(x, y) : \ 0 \leq x, y \in \mathbb{R}\}$$
αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτημόριο του $\mathbb{R}^2$. U δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^2$ αφού για παράδειγμα $(1, 1) \in U$ ενώ $-(1, 1) = (-1, -1) \notin U$.

14. Η εξίσωση $x - y = 0$ καθορίζει μία ευθεία L στο $\mathbb{R}^2$:
$$L = \{(x, y) : \ x - y = 0, x, y \in \mathbb{R}\} = S(\{(1, 1)\}) \ .$$
Η ίδια εξίσωση καθορίζει ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$:
$$U = \{(x, y, z) : \ x - y = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\} = S(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}) \ .$$

Στα παραδείγματα είδαμε ότι ένας υποχώρος U του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να έχει παραπάνω από ένα παράγοντα σύνολα που μπορεί να διαφέρουν και ως προς την πληθυκότητα. Όπως είπαμε νωρίτερο ο βασικός στόχος της επόμενης ενότητας είναι η εύρεση παραγόντων συνόλων με τη μικρότερη πληθυκότητα. Στη συνέχεια θα ορίσουμε το **άθροισμα** και την **τομή** δύο υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Έστω U και W δύο υποχώροι του $\mathbb{R}^n$. Το άθροισμα $U + W$ των U και W ορίζεται ως εξής:
$$U + W = \{ \ u + w \ : \ u \in U \text{ και } w \in W\}.$$
Παρατηρούμε ότι $U \subset U + W$ αφού $0 \in W$ και $u = u + 0$. Ομοίως $W \subset U + W$. Προκύπτει εύκολα ότι αν $U = S(X_1)$, $W = S(X_2)$ όπου X_1, X_2 είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε
$$U + W = S(X_1 \cup X_2)$$
και έπεται ότι $U + W$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Στα παραδείγματα θα δούμε ότι τα διανύσματα που ανήκουν στην τομή $U \cap W$ προκύπτουν ως λύσεις ενός ομογενούς συστήματος και θα περιγράψουμε τα διανύσματα που παράγουν την τομή $U \cap W$. Έτσι $U \cap W$ είναι και αυτός διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα 3.2.3.

1. Δίνονται οι ευθείες του $\mathbb{R}^2$
$$V_1 = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - 2y = 0 \ \} = S(\{(2, 1)\})$$
και
$$V_2 = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0 \ \} = S(\{-1, 1)\}).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι δύο ευθείες έχουν μοναδικό σημείο τομής την αρχή των αξόνων. Άρα $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Ακόμη μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι το τυχαίο στοιχείο (a, b) του $\mathbb{R}^2$ είναι άθροισμα ενός στοιχείου του V_1 και ενός στοιχείου του V_2, δηλ. ότι

$$(a, b) \in S(\{(2, 1), (-1, 1)\}) \ .$$

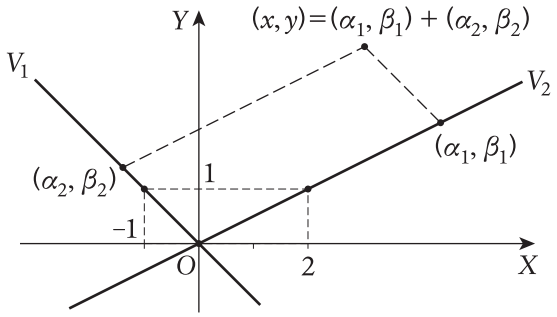
Πράγματι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & (a+b)/3 \\ 0 & 1 & (2b-a)/3 \end{bmatrix}$$

και

$$(a, b) = \frac{a+b}{3}(2, 1) + \frac{2b-a}{3}(-1, 1) \in V_1 + V_2 \ .$$

Άρα $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$, (βλ. επόμενο σχήμα).

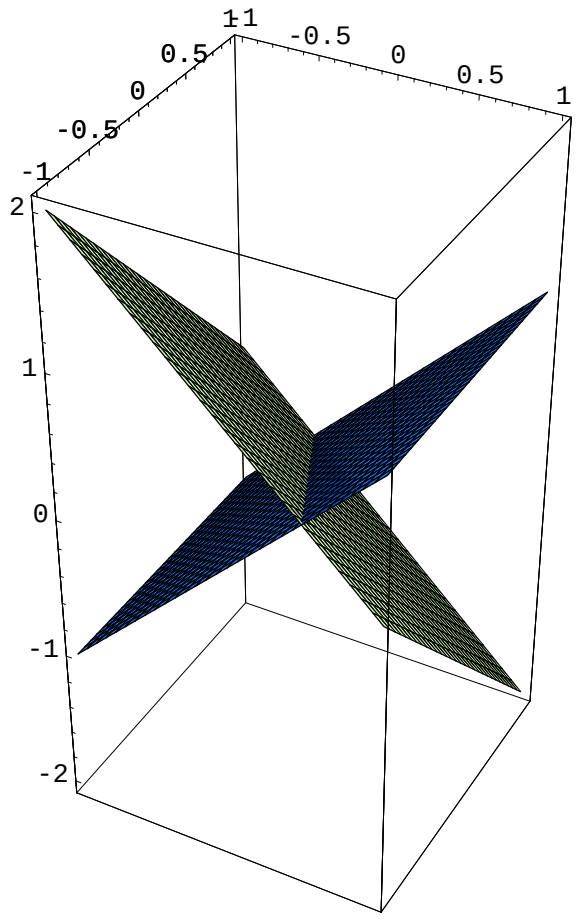


2. Έστω

$$V_1 = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - z = 0 \ \} = S(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}) \ ,$$

$$V_2 = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0 \ \} = S(\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}) \ .$$

Οι χώροι V_1 και V_2 είναι επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο, βλ. γραφική αναπαράσταση στο παρακάτω σχήμα.



Θα υπολογίσουμε την τομή αυτών των επιπέδων, δηλ. θα υπολογίσουμε το χώρο $V_1 \cap V_2$. Είναι φανερό ότι $(x, y, z) \in V_1 \cap V_2$ αν και μόνο αν

$$x - z = 0 \quad \text{και} \quad x + y + z = 0.$$

Οι λύσεις του ομογενούς αυτού συστήματος περιγράφουν τα στοιχεία του $V_1 \cap V_2$. Επομένως

$$V_1 \cap V_2 = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x = z,\ y = -2z\ \},$$

δηλ.

$$V_1 \cap V_2 = \{\ (x, -2x, x)\ :\ x \in \mathbb{R}\ \} = \{\ x(1, -2, 1)\ :\ x \in \mathbb{R}\ \}\ ,$$

είναι μία ευθεία. Θα αποδείξουμε ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, δηλ. το άθροισμα των V_1, V_2 δίνει όλο το χώρο $\mathbb{R}^3$. Έστω A ο πίνακας με στήλες τις

συντεταγμένες των διανυσμάτων που παράγουν τους χώρους V_1 και V_2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι το σύστημα

$$AX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

είναι συμβατό για κάθε $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Άρα

$$S(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}) = \mathbb{R}^3$$

και $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Παρακάτω θα ορίσουμε κάποιους υποχώρους με βάση τον πίνακα A. Έτσι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Ο **μηδενοχώρος** του A, $\mathrm{null}(A)$, είναι ο υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Ο **χώρος γραμμών** του A, $\Gamma(A)$ είναι ο υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις m γραμμές του A, δηλ. είναι ο χώρος

$$S(\{(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})\}) .$$

Ο **χώρος στηλών** του A, $\Sigma(A)$ είναι ο υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις n στήλες του A , δηλ. είναι ο χώρος

$$S(\{(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})\}) .$$

Είναι φανερό ότι $\Gamma(A) = \Sigma(A^T)$ και ότι $\Sigma(A) = \Gamma(A^T)$.

Παράδειγμα 3.2.4. Θα υπολογίσουμε τον μηδενοχώρο, τον χώρο γραμμών και τον χώρο στηλών του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Οι λύσεις του $AX = 0$ είναι:

$$\{(x, y, z, w) : \ y + 2w = 0, z = 0, x, w \in \mathbb{R}\} = \{(x, -2w, 0, w) : \ x, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1, 0, 0, 0) + w(0, -2, 0, 1) : \ x, w \in \mathbb{R}\}$$

Έπεται ότι

$$\text{null}(A) = S(\{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 1)\}) \ .$$

Ο χώρος γραμμών του A είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^4$:

$$\Gamma(A) = S(\{(0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\}) \ .$$

Το μηδενικό διάνυσμα δεν προσφέρει καμία καινούρια πληροφορία και δεν είναι απαραίτητο στο σύνολο παραγόντων στοιχείων. Έτσι

$$\Gamma(A) = S(\{(0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}) \ .$$

Ο χώρος στηλών του A είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma(A) = S(\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)\})$$

Παρατηρούμε ότι $(2, 0, 0) = 2(1, 0, 0)$ και ότι αν $u \in \Sigma(A)$ τότε

$$u = r(0, 0, 0) + k(1, 0, 0) + t(0, 1, 0) + s(0, 2, 0) \Rightarrow u = (k + 2s)(1, 0, 0) + t(0, 1, 0) \ .$$

Άρα

$$\Sigma(A) = S(\{e_1, e_2\})$$

Στο προηγούμενη κεφάλαιο είδαμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό αν και μόνο αν B γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Έπεται ότι το σύνολο $AX = B$ είναι συμβατό αν και μόνο αν το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί στο B ανήκει στο χώρο στηλών του A.

Παράδειγμα 3.2.5. Το διάνυσμα $(1,1,1) \notin \Sigma(A)$ όπου A είναι ο πίνακας του προηγουμένου παραδείγματος: είναι φανερό ότι δεν υπάρχουν $k, t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$(1,1,1) = k(1,0,0) + t(0,1,0) \ .$$

Έπεται ότι το σύστημα

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι συμβατό. Γενικότερα ισχύει ότι $(a,b,c) \in \Sigma(A)$ αν και μόνο αν

$$AX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

είναι συμβατό. Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος 3.2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c \end{bmatrix} \ .$$

Παρατηρούμε ότι 3.2 είναι συμβατό αν και μόνο αν $c = 0$. Άρα $\Sigma(A) = \{(a,b,0) : \ a,b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0,0) + b(0,1,0) : \ a,b \in \mathbb{R}\} = S(\{e_1, e_2\})$ όπως είδαμε προηγουμένως.

Ασκήσεις ενότητας 3.2

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 1 \ \}$ δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

2. Να αποδείξετε ότι μία ευθεία στο $\mathbb{R}^n$ είναι υποχώρος αν και μόνο αν περνά από την αρχή των αξόνων.

3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0 \ \}$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

4. Δίνονται τα υποσύνολα

$$U = \{ \ (k,k,k) \ : \ k \in \mathbb{R} \ \} \quad \text{και} \quad V = \{ \ (0,\lambda,\mu) \ : ‘ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \}$$

του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι οι U, V είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε σύνολα παραγόντων στοιχείων για τους U και V. Να υπολογίσετε την τομή $U \cap V$.

5. i) Να αποδείξετε ότι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$$V = \{\ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\ :\ y = -2x\ \}\ ,\quad W = \{\ (t+s, 3t, t)\ :\ t, s \in \mathbb{R}\}\ ,$$
$$U = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 2x + y - z = 0\ \}$$

είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$. ii) Να υπολογίσετε τους υποχώρους $V + U$, $V \cap W$, $V \cap U$ και $U \cap W$. iii) Να αποδείξετε ότι $V + W = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $S(\{(1, 2, 0), (1, 0, 1)\})$.

7. Να αποδείξετε ότι για τα υποσύνολα

$$X = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad \text{και} \quad Y = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

του $\mathbb{R}^2$ ισχύει $S(X) = S(Y)$.

Όμοια για τα υποσύνολα

$$Z = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\} \quad \text{και} \quad W = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

του $\mathbb{R}^3$.

8. Να υπολογίσετε τον μηδενοχώρο, χώρο γραμμών και χώρο στηλών για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Να ελέγξετε αν $(1, 2, 3)$ είναι στο χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\ .$$

Να περιγράψετε τους χώρους $\mathrm{null}(A)$, $\Gamma(A)$, $\Sigma(A)$.

3.3 Βάσεις και Γραμμική ανεξαρτησία

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι υποχώροι του $\mathbb{R}^n$ μπορούν να έχουν περισσότερα από ένα παράγοντα σύνολα κάποια από αυτά με διαφορετικό αριθμό στοιχείων. Μας ενδιαφέρουν τα **ελάχιστα** παράγοντα σύνολα. Ένα παράγον σύνολο X για το V είναι ελάχιστο αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του X που παράγει τον V. Θα δούμε ότι όλα τα ελάχιστα παράγοντα σύνολα του V έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα και για θεωρητικούς αλλά και για υπολογιστικούς λόγους.

Ορισμός 3.3.1. **Βάση** *του μηδενικού χώρου θεωρείται το κενό σύνολο* $\emptyset$. *Έστω ότι* V *είναι μη μηδενικός υποχώρος του* $\mathbb{R}^n$ *και ότι* B *είναι ένα υποσύνολο διανυσμάτων του* V *που παράγει τον* V, *δηλ.* $V = S(B)$. *Αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο* B' *του* B *έτσι ώστε* $B' \subsetneq B$ *και* $V = S(B')$ *(δηλ. το* B' *να παράγει το* V*) το σύνολο* B *λέγεται* **βάση** *του* V.

Παραδείγματα 3.3.2.

1. Έστω $V = S(\{(1,1,1)\}$. Το μόνο γνήσιο υποσύνολο του $\{(1,1,1)\}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$ που δεν μπορεί να παράγει το V, άρα $\{(1,1,1)\}$ είναι βάση για το V.

2. Έστω $V = S(\{(1,2),(2,4)\})$. Τότε $V = S(\{(1,2)\})$ και $V = S(\{(2,4)\})$. Ο υποχώρος V δεν παράγεται από το $\emptyset$, άρα δύο βάσεις για του V είναι τα σύνολα $\{(1,2)\}$ και $\{(2,4)\}$.

Έστω ότι $V = S(B)$ και $B' \subsetneq B$ έτσι ώστε $S(B') = S(B)$. Αν $v \in B \setminus B'$ τότε $v \in B \subset S(B) = S(B')$ και v είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του B'. Αν υπάρχει λοιπόν γνήσιο υποσύνολο του B που να είναι παράγον σύνολο του V έπεται ότι ένα από τα διανύσματα του B μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων του B και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην έννοια της σχέσης γραμμικής εξάρτησης και γραμμικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός 3.3.3. *Έστω* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *στοιχεία του υποχώρου* V. **Γραμμική σχέση εξάρτησης** *των* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *είναι μία σχέση*

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \cdots + \kappa_n v_n = 0 \ , \tag{3.3}$$

όπου τα $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{R}$ *και τουλάχιστον ένα από αυτά δεν είναι μηδέν. Στη περίπτωση αυτή τα διανύσματα* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *λέγονται* **γραμμικά εξαρτημένα**. *Διαφορετικά αν δεν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης τα* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *λέγονται* **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Έστω $V = S(X)$ ένας διανυσματικός χώρος. Για να βρούμε μία βάση για το V προσπαθούμε να βρούμε ένα υποσύνολο B του X που να αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα έτσι ώστε η προσθήκη κάθε διανύσματος του $X \setminus B$ να δημιουργεί ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο.

Παραδείγματα 3.3.4.

1. Τα στοιχεία $e_1 = (1,0)$ και $e_2 = (0,1)$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι:

$$\kappa_1(1,0) + \kappa_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\kappa_1, \kappa_2) = (0,0) \Rightarrow \kappa_1 = 0 = \kappa_2.$$

2. Θυμίζουμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $e_1, \ldots, e_n$ τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\ .$$

Τα στοιχεία $e_1, \ldots, e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού

$$\kappa_1 e_1 + \cdots + \kappa_n e_n = (0, \ldots, 0)\ \Rightarrow\ (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = (0, \ldots, 0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_n = 0.$$

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι $\mathbb{R}^n = S(\{e_1, \ldots e_n\})$. Έπεται ότι $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι βάση για τον $\mathbb{R}^n$. Καθορίζουμε την σειρά των στοιχείων και γράφουμε το σύνολο με παρενθέσεις αντί για αγκύλες για να τονίσουμε ότι η σειρά των στοιχείων είναι συγκεκριμένη και ότι η βάση είναι διατεταγμένη: $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Η βάση B λέγεται **κανονική** βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

3. Τα στοιχεία $v_1 = (1, 2)$ και $v_2 = (2, 4)$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $v_2 = 2v_1$ και $2v_1 - v_2 = 0$.

4. Το 0 είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού $1 \cdot 0 = 0$.

5. Αν v είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε αναγκαστικά $v = 0$.

6. Αν $0 \in X$ τότε τα στοιχεία του X είναι γραμμικά εξαρτημένα αφού

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_t = 0$$

είναι γραμμική σχέση εξάρτησης.

7. Έστω $v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (0, 1, 2),\ v_3 = (2, 5, 2),\ C = \{v_1, v_2, v_3$ και $V = S(C)$. Τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $v_3 = 2v_1 + v_2$ και άρα $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Συνεπώς $\{v_1, v_2\}$ είναι και αυτό σύνολο γεννητόρων για τον υποχώρο V και $V = S(C) = S(\{v_1, v_2\})$. Τα διανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα: $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$ αν και μόνο (k_1, k_2) είναι λύση του γραμμικού συτήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X = \mathbf{0}\ .$$

Έστω A ο πίνακας των συντελεστών του παραπάνω συστήματος. Αφού $\operatorname{rank}(A) = 2$ έπεται ότι η μοναδική λύση του $AX = 0$ είναι $X = 0$ και άρα $k_1 = k_2 = 0$ και δεν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης για τα διανύσματα v_1, v_2. Έπεται ότι $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση για το V.

8. Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (1, 3, 5)$, $v_3 = (0, 4, 9)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

έχει βαθμίδα 3 και είναι αντιστρέψιμος. Άρα η μόνη λύση του συστήματος $AX = 0$ είναι $X = 0$ και τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έπεται ότι $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ είναι βάση για το $V = S(B)$. Έστω $v = (a, b, c)$ τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Θα δείξουμε ότι $v \in V$, δηλ. ότι v γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2, v_3. Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι v ανήκει στον χώρο στηλών του A. Πράγματι αφού $\text{rank}(A) = 3$ και A είναι αντιστρέψιμος πίνακας το σύστημα

$$AX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

είναι συμβατό. Άρα κάθε $v \in \mathbb{R}^3$ ανήκει στο V και $V = \mathbb{R}^3$. Έπεται ότι D είναι βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Το επόμενο θεώρημα είναι ιδιαίτερης σημασίας.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω V ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Όλες οι βάσεις του V έχουν ίσο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη. Θα σημειώσουμε μόνο τη βασική ιδέα της απόδειξης. Έστω $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ δύο βάσεις του V. Αφού $w_1 \in V$ προκύπτει ότι $w_1 = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$. Αφού $w_1 \in B_2$ και B_2 είναι βάση έπεται ότι $w_1 \neq 0$. Άρα κάποιο από όλα τα t_i δεν θα είναι μηδέν. Ας υποθέσουμε ότι είναι το t_1, δηλ. $t_1 \neq o$. Έπεται ότι

$$t_1v_1 = w_1 - t_2v_2 - \cdots - t_nv_n \Rightarrow v_1 = \frac{1}{t_1}w_1 - \frac{t_2}{t_1} - \cdots - \frac{t_n}{t_1}v_n \ .$$

Επομένως το σύνολο $B_3 = \{w_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι βάση για τον V. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο και αντικαθιστώντας ένα ένα τα στοιχεία της B_1 θα φτιάξουμε μία νέα βάση για τον V, που σημαίνει ότι $m \leq n$. Κάνοντας την ίδια διαδικασία βάζοντας στη θέση τοψ B_1 το B_2 προκύπτει ότι $n \leq m$. Άρα $m = n$. □

Οδηγούμαστε τώρα στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.3.6. *Το πλήθος των στοιχείων κάθε βάσης του V πεπερασμένης διάστασης λέγεται* **διάσταση** *του V και συμβολίζεται* $\dim(V)$.

Παραδείγματα 3.3.7.

1. $\dim(\{0\}) = 0$.
2. Αν $V \neq 0$ τότε $\dim(V) > 0$.
3. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
4. Αν $W \subsetneqq V$ τότε $\dim(W) < \dim(V)$.
5. Έστω V υποχώρος του $\mathbb{R}^2$. Αν $\dim(V) = 2$ τότε $V = \mathbb{R}^2$. Αν $\dim(V) = 1$ τότε V παράγεται από ένα μη μηδενικό διάνυσμα και γραφικά αντιστοιχεί σε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Αν $\dim(V) = 0$ τότε $V = \{0\}$.
6. Οι γνήσιοι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$ έχουν διάσταση μικρότερη του 3. Έστω V υποχώρος του $\mathbb{R}^3$. Αν $\dim(V) = 0$ τότε V είναι ο μηδενικός υποχώρος. Αν $\dim(V) = 1$, τότε $V = S(\{v\})$ όπου $v \neq 0$. Γραφικά ο V αντιστοιχεί σε μία ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που περνά από την αρχή των αξόνων. Αν $\dim(V) = 2$, τότε $V = S(\{v_1, v_2\})$ όπου v_1, v_2 δεν είναι παράλληλα. Γραφικά ο V αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περνά από την αρχή των αξόνων. Αν $\dim(V) = 3$ τότε $V = \mathbb{R}^3$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε πως βρίσκεται μία βάση ενός διανυσματικού υποχώρου του $\mathbb{R}^n$. Συνοψίζουμε τα βασικά συμπεράσματα στους παρακάτω αλγορίθμους. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι για την εύρεση μίας βάσης του διανυσματικού υποχώρου $V = S(X)$ του $\mathbb{R}^n$.

Αλγόριθμος (Α) εύρεσης βάσης του διανυσματικού υποχώρου $V = S(X)$ του $\mathbb{R}^n$.

- Διατάσσουμε τα στοιχεία του X. Έστω ότι $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ όπου για $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni}$ για $i = 1, \ldots, m$.
- Έστω $A = (a_{ij})$ ο πίνακας που οι στήλες του αντιστοιχούν στα διανύσματα του X
- Φέρνουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.
- Έστω ότι οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες $j_1, \ldots, j_t$. Τα αντίστοιχα διανύσματα $v_{j_1}, \ldots, v_{j_t}$ αποτελούν βάση του V.

Παράδειγμα 3.3.8. Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3, -1)$, $v_3 = (1, 1, -3, 2)$ και $X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V = S(X)$. Θα βρούμε μία βάση για τον V. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι καθοδηγητικές μονάδες στον πίνακα R βρίσκονται στην πρώτη και δεύτερη στήλη του R. Έτσι $\{v_1, v_2\}$ είναι μία βάση για τον V.

Τώρα που έχουμε βρει μία βάση για τον V γνωρίζουμε ότι v_3 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2: $v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$. Για να βρούμε τους συντελεστές k_1, k_2 αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τον πίνακα A ως τον επαυξημένο πίνακα του παραπάνω συστήματος. Έτσι μπορούμε να διαβάσουμε τις λύσεις από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R. Έπεται ότι $(1, -1)$ είναι λύση και $v_1 - v_2 = v_3$. Άρα μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των τριών διανυσμάτων είναι $v_1 - v_2 - v_3 = 0$. Παροτρύνουμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει ότι η τρίτη στήλη του R είναι ίση με τη διαφορά της δεύτερης στήλης του R από τη πρώτη και οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις στήλες του A και για τα διανύσματα του X.

Η μέθοδος του παραπάνω αλγορίθμου στηρίζεται στη παρατήρηση ότι η βάση του $V = S(X)$ είναι ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η επιλογή ενός υποσυνόλου του X ως βάση του $S(X)$. Είναι φανερό ότι η βάση εξαρτάται από τη διάταξη των στοιχείων του X. Επίσης από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι πολύ εύκολο να βρούμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στα διανύσματα του X. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία ακόμα μέθοδο εύρεσης βάσης.

Αλγόριθμος (Β) για την εύρεση βάσης του διανυσματικού υποχώρου $V = S(X)$ του $\mathbb{R}^n$.

- Έστω $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ και πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ όπως στον **Αλγόριθμο Α**. Παίρνουμε τον πίνακα $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Φέρνουμε τον A^T σε κλιμακωτή μορφή γραμμών R.
- Έστω $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \end{bmatrix}$, ..., $\Gamma_t = \begin{bmatrix} r_{t1} & \cdots & r_{tn} \end{bmatrix}$ οι μη μηδενικές γραμμές του R. Τα διανύσματα $(r_{11}, \ldots, r_{1n})$, ..., $(r_{t1}, \ldots, r_{tn})$ αποτελούν βάση του V.

Η μέθοδος του **Αλγορίθμου Β** στηρίζεται στη παρατήρηση ότι αν X παράγει τον V και εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις στα διανύσματα του X τότε το καινούριο σύνολο παράγει επίσης το V. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι τα στοιχεία της βάσης που προκύπτει είναι σχετικά απλούστερα γιατί οι συντεταγμένες τους έχουν πολλά μηδενικά.

Παράδειγμα 3.3.9. Έστω $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3, -1)$, $v_3 = (1, 1, -3, 2)$, $X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V = S(X)$ και A ο πίνακας του Παραδείγματος 3.3.8. Έχουμε ότι

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A^T είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Το σύνολο $\{(1, 0, -6, 3), (0, 1, 3, -1)\}$ είναι βάση για τον V.

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Θυμίζουμε ότι ο χώρος στηλών του A, $\Sigma(A)$, είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$. Φέρνουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R. Για να βρούμε μία βάση για τον $\Sigma(A)$ χρησιμοποιούμε τον R και προχωρούμε όπως στον **Αλγόριθμο Α**. Ο χώρος γραμμών του A, $\Gamma(A)$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$. Για να βρούμε μία βάση για τον $\Gamma(A)$ χρησιμοποιούμε τον R και εφαρμόζουμε τον **Αλγόριθμο Β**. Παρατηρούμε ότι

$$\dim(\Sigma(A)) = \dim(\Gamma(A)) = \operatorname{rank}(A) . \tag{3.4}$$

Πόρισμα 3.3.10. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Τότε* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\Gamma(A) = \Sigma(A^T)$ και τη σχέση 3.4

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\Gamma(A)) = \dim(\Sigma(A^T)) = \mathrm{rank}(A^T) \ .$$

□

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Ο μηδενοχώρος του A, $\mathrm{null}(A)$, παράγεται από τις λύσεις του $AX = 0$. Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι $\mathrm{null}(A)$ παράγεται από $n - \mathrm{rank}(A)$ διανύσματα: τόσες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή οι μεταβλητές που δεν αντιστοιχούν σε καθοδηγητική μονάδα στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A.

Παραδείγματα 3.3.11.

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο πίνακας R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Άρα

$$\mathrm{null}(A) = \{(x, y, z, w) : \ x - 6z + 3w = 0, \ y + 3z - w = 0, \ z, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(6z - 3w, -3z + w, z, w) : \ z, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{z(6, -3, 1, 0) + w(-3, 1, 0, 1) : \ z, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$S(\{(6, -3, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\}) \ .$$

Τα διανύσματα $(6, -3, 1, 0)$ και $(-3, 1, 0, 1)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα αφού δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου. Θα κάνουμε όμως αναλυτικά την απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας γιατί θέλουμε να την γενικεύσουμε στο Πόρισμα 3.3.12. Έστω ότι

$$k_1(6, -3, 1, 0) + k_2(-3, 1, 0, 1) = 0 \ .$$

Για να βρούμε τις τιμές k_1, k_2 θα λύσουμε το γραμμικό σύστημα $BX = 0$ όπου

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Παρατηρούμε ότι στον πίνακα B η τέταρτη γραμμή είναι $[1\ 0]$ ενώ η πέμπτη είναι $[0\ 1]$. Αυτό συμβαίνει γιατί η τέταρτη και πέμπτη μεταβλητή του συστήματος $AX = 0$ είναι παράμετροι και εκφράζονται ανεξάρτητα η μία της άλλης. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τύπου 2, οι τελευταίες δύο γραμμές γίνονται πρώτες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Είναι ξεκάθαρο ότι $\operatorname{rank}(B) = 2$ και άρα η μόνη λύση του $BX = 0$ είναι η μηδενική. Έπεται ότι $(6, -3, 1, 0)$ και $(-3, 1, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και μία βάση για τον $\operatorname{null}(A)$ είναι το σύνολο $\{(6, -3, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\}$.

Η ανάλυση του παραπάνω παραδείγματος γενικεύεται στο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.12. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Τότε* $\operatorname{rank}(A) + \dim\,(\operatorname{null}(A)) = n$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\operatorname{rank}(A) = t$, R είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A και $l = n - t$. Έπεται ότι $\operatorname{null}(A)$ παράγεται από l διανύσματα $v_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1n}), \ldots, v_l = (c_{l1}, \ldots, c_{ln})$ με την παρακάτω ιδιότητα: έστω $j_1, \ldots, j_l$ είναι οι στήλες του R χωρίς καθοδηγητική μονάδα: τότε για κάθε $1 \le r \le l$ ισχύει ότι $c_{rj_r} = 1$ ενώ $c_{ij_r} = 0$ για $i \neq r$. Είναι φανερό ότι αν B είναι ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των $v_1, \ldots, v_l$ τότε $\operatorname{rank}(B) = l$ και $v_1, \ldots, v_l$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Άρα $\dim\,(\operatorname{null}(A)) = l$ και το θεώρημα έπεται. □

Παραδείγματα 3.3.13.

1. Έστω $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 3, -3)$, $v_4 = (1, -1, 2)$. Θεωρούμε τον πίνακα που οι στήλες του είναι οι συντεταγμένες των v_i. Αυτός είναι ο 3×4 πίνακας A του Παραδείγματος 3.3.11. Ισχύει ότι $\operatorname{rank}(A) = 2$, $n = 4$ και $\dim(\operatorname{null}(A)) = 2$ επιβεβαιώνοντας τη σχέση

$$\operatorname{rank}(A) + \dim\,(\operatorname{null}(A)) = 4 .$$

Είδαμε επίσης ότι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο πίνακας R. Για τις στήλες του R βλέπουμε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Οι ίδιες σχέσεις γραμμικής εξάρτησης ισχύουν για τις στήλες του A και για τα διανύσματα v_i. Το σύνολο $\{(1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$ είναι βάση για τον χώρο στηλών του A και για τον χώρο γραμμών του A^T. Το σύνολο $\{(1, 0, -6, 3), (0, 1, 3, -1)\}$ είναι βάση για τον χώρο γραμμών του A.

2. Έστω $v_1 = (1, 1, 0, -1),\ v_2 = (1, 2, 3, 0),\ v_3 = (2, 3, 3, -1)\}$ και $V = S(\{v_1, v_2, v_3\})$. Για να βρούμε μία βάση του V μπορούμε να εφαρμόσουμε μία από τις μεθόδους που είδαμε προηγουμένως. Παρατηρούμε όμως ότι $v_3 = v_1 + v_2$ ενώ v_1, v_2 δεν είναι πολλαπλάσια το ένα του άλλου και άρα $\dim(V) = 2$ και $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση για το V.

   Έστω τώρα $w_1 = (1, 2, 2, -2),\ w_2 = (0, -1, -2, 1)$ και $W = S(\{w_1, w_2\})$. Τα στοιχεία w_1, w_2 δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν μία βάση του W. Επομένως $\dim(W) = 2$.

   Θα υπολογίσουμε μία βάση για τους χώρους V, W, $V+W$, $V \cap W$. Στη προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε ότι $V+W = S(\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$. Για να βρούμε λοιπόν μία βάση για τον υποχώρο $V + W$ του $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο πίνακας R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Αφού $\operatorname{rank}(A) = 3$ έπεται ότι $\dim(V + W) = 3$. Από την θέση των καθοδηγητικών μονάδων στο R βλέπουμε ότι μία βάση για τον $V + W$ είναι το σύνολο $\{v_1, v_2, w_1\}$. Από τον πίνακα R μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι $w_2 = v_1 + w_1$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $v_1 = -w_1 + w_2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $v_1 \in S(\{w_1, w_2\}) = W$ και άρα $v_1 \in V \cap W$. Έτσι χρησιμοποιώντας τη σχέση του επόμενου παραδείγματος συμπεραίνουμε ότι $V \cap W = S(\{v_1\})$.

3. Έστω U και W υποχώροι του V. Τότε

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

   Απόδειξη. Έστω $\dim(U) = t_1$, $\dim(V) = t_2$, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_{t_1}\}$ βάση για τον U, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_{t_2}\}$ βάση για τον W. Παίρνουμε A τον πίνακα με τις πρώτες t_1 στήλες να αντιστοιχούν στα διανύσματα του B_1 και τις επόμενες t_2 στήλες να αντιστοιχούν στα διανύσματα του B_2. Ο συνολικός αριθμός των στηλών του A είναι $t_1 + t_2 = \dim(U) + \dim(W)$.

Φέρνουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ο αριθμός των καθοδηγητικών μονάδων είναι η διάσταση του $U + W$. Εάν μία στήλη στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή δεν έχει καθοδηγητική μονάδα τότε αυτή η στήλη περιγράφεται ως συνδυασμός προηγούμενων στηλών και δίνει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στα διανύσματα του U και W. Παρατηρούμε ότι σε μία τέτοια σχέση πρέπει να εμφανίζονται με μη μηδενικούς συντελεστές ταυτόχρονα και διανύσματα από τη B_1 και διανύσματα απο τη B_2, αλλιώς θα προέκυπτε σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στα διανύσματα της B_1 ή της B_2, άτοπο. Έστω ότι

$$k_1v_1 + \cdots + k_{t_1}v_{t_1} + r_1w_1 + \cdots + r_{t_2}w_{t_2} = 0$$

μία τέτοια σχέση. Το διάνυσμα

$$k_1v_1 + \cdots + k_{t_1}v_{t_1} = -r_1w_1 - \cdots - r_{t_2}w_{t_2}$$

είναι ένα διάνυσμα στη τομή $U \cap W$. Αντίστροφα αν πάρουμε μία βάση του $U \cap W$ τότε για κάθε διάνυσμα της βάσης προκύπτει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στις στήλες του A και κατά συνέπεια θα προκύψει μία στήλη στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A χωρίς καθοδηγητική μονάδα. Έπεται ότι

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

□

4. Έστω U ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ και W ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1)$. Τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Η βαθμίδα του A είναι 3. Έπεται ότι $\dim(U + W) = 3$ και άρα $U + V = \mathbb{R}^3$. Η τομή $U \cap W$ έχει διάσταση 1 και παράγεται από το διάνυσμα $w_1 = v_1 + v_2$.

5. Θα βρούμε μία βάση για τον $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το διάνυσμα $v = (1, 1, 0)$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{R}^3 = S(\{v, e_1, e_2, e_3\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον **Αλγόριθμο Α** γιατί η μέθοδος αυτή επιλέγει για βάση ένα υποσύνολο του

αρχικού παράγοντος συνόλου δίνοντας προτεραιότητα στα πρώτα κατά σειρά διανύσματα. Έστω A ο παρακάτω πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι το σύνολο $\{v, e_1, e_3\}$ είναι βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Έστω V ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης m. Για τον επόμενο ορισμό θα θεωρήσουμε ότι η βάση του V με την οποία δουλεύουμε είναι διατεταγμένη, δηλ. η σειρά με την οποία τα στοιχεία εμφανίζονται στη βάση είναι καθορισμένη. Η διατεταγμένη βάση θα γράφεται χρησιμοποιώντας παρενθέσεις αντί για αγκύλες.

Ορισμός 3.3.14. *Έστω $B = (v_1, \ldots, v_m)$ μία διατεταγμένη βάση του V και έστω $v \in V$. Αν $v = \kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_m v_m$, όπου $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{R}$, τότε ο πίνακας $\begin{bmatrix} \kappa_1 & \cdots & \kappa_n \end{bmatrix}^T$ λέγεται* **πίνακας συντεταγμένων** *του v ως προς τη βάση B και συμβολίζεται $C_B(v)$ δηλ.*

$$v = \kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_n v_n \;\Leftrightarrow\; C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{bmatrix} .$$

Παραδείγματα 3.3.15.

- Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, $v = (1, 2)$. Αφού $e_1 = 1e_1 + 0e_2$, $e_2 = 0e_1 + 1e_2$, $v = 1e_1 + 2e_2$, έχουμε ότι

$$C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_B(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Έστω $w = -e_2 = (0, -1)$. Το σύνολο $D = (e_1, w)$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^2$. Ισχύει ότι $e_1 = 1e_1 + 0w$, $e_2 = 0e_1 - 1w$, $v = 1e_1 - 2w$. Άρα

$$C_D(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_D(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_D(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Έστω $D = (e_2, e_1)$. Τότε

$$C_D(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_D(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Έστω $v = (1,1)$, $w = (2,3)$. Το σύνολο $B = (v, w)$ είναι βάση για το $\mathbb{R}^2$. Θα βρούμε τις συντεταγμένες του $(4,5)$ ως προς αυτή τη βάση. Θέλουμε να γράψουμε το $(4,5)$ ως συνδυασμό των v, w. Παίρνουμε τον πίνακα με στήλες τα τρία διανύσματα και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & |4 \\ 1 & 3 & |5 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & |2 \\ 0 & 1 & |1 \end{bmatrix}$$

Άρα $(4,5) = 2v + w$ και

$$C_B(4,5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Έστω $D = (v_1, \ldots, v_n)$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^n$, $v, u, w \in \mathbb{R}^2$ και $v = ku + tw$. Τότε είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι

$$C_D(v) = kC_D(u) + tC_D(w) = \begin{bmatrix} C_D(u) & C_D(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} .$$

Ασκήσεις ενότητας 3.3

1. Να εξετάσετε αν τα στοιχεία

$$u_1 = (1,0,2,1), \quad u_2 = (0,0,2,4), \quad u_3 = (0,1,0,2), \quad u_4 = (2,0,4,2)$$

του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

2. Να βρεθούν δύο βάσεις για το χώρο γραμμών και δύο βάσεις για το χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} .$$

3. Να βρεθεί μία βάση για τον χώρο γραμμών του A, για τον χώρο στηλών του A και για τον $\text{null}(A)$ όπου A ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Δίνονται τα στοιχεία

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 3, -1), \quad v_3 = (1, 1, -3, 2)$$

του $\mathbb{R}^4$. Να βρείτε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης για τα στοιχεία αυτά και μία βάση για το χώρο $S(\{v_1, v_2, v_3\})$.

5. Δίνονται οι υποχώροι V και W του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^5$ με $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ και $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο $v \neq 0$ του $\mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $v \in V \cap U$.

6. Δίνονται οι υποχώροι V και W του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{10}$ με $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ $dim_{\mathbb{R}} W = 8$. Να βρείτε ποιές είναι οι δυνατές διαστάσεις των χώρων $V \cap U$ και $V + W$.

7. Για τα παρακάτω παραδείγματα $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων $U \leq V$ να βρείτε μία βάση του U και να την επεκτείνετε σε μία βάση του V.

   i) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + y = 0\ \}$.

   ii) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 3z = 0\ \}$.

   iii) $V = \mathbb{R}^4, \quad U = S\{(1, 0, 2, 1), (3, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 4)\}$.

8. Να υπολογίσετε $U+V$ και $U \cap V$ όπου $U = S(\{(1, -2, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\})$ και $V = S(\{(1, 3, 1), (1, 0, 0), (4, 3, 1)\})$.

9. Να επεκτείνετε το σύνολο $\{(1, 0, 2, 1), (3, 1, 0, 0)\}$, σε μία βάση του $\mathbb{R}^4$.

10. Να βρείτε μία βάση για το $U \cap W$ όπου $U = S(\{(1, 0, 2, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ και $W = S(\{(0, 0, 2, 1), (2, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

11. Έστω $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Να βρείτε $C_B(e_1)$ και $C_B(e_2)$ όταν α) $B = (e_1, e_2)$, β) $B = (e_2, e_1)$, γ) $B = ((1, -1), (0, 2))$.

12. Έστω $D = (v_1, v_2, v_3)$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε $C_D(5w_1 - w_2)$ όταν

$$C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_D(w_2) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$$

13. Να βρείτε το διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

όταν ι) $B = (e_1, e_2, e_3)$ ιι) $B = (e_1 + e_2, e_3, e_2)$.

14. Έστω $((1,0,1),(0,1,0)$ μία βάση για το επίπεδο $U = \{(x,y,z) : \ x - z = 0\}$. Να βρεθεί ο πίνακας των συντεταγμένων του $(2,2,2)$ ως προς αυτή τη βάση.

3.4 Γραμμικές συναρτήσεις.

Οι γραμμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συναρτήσεις που σέβονται τις αλγεβρικές δομές των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$. Στους χώρους αυτούς έχουν οριστεί οι πράξεις της πρόσθεσης και του σκαλιανού πολλαπλασιασμού. Οι γραμμικές συναρτήσεις είναι συμβατές με αυτές τις πράξεις και τις 'διατηρούν'.

Ορισμός 3.4.1. *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται* **γραμμική συνάρτηση** *αν*

$$f(v + u) = f(v) + f(u)$$

και

$$f(\kappa v) = \kappa f(v) \ ,$$

για όλα τα $\kappa \in \mathbb{R}$, $v, u \in \mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική συνάρτηση. Θα σκεφτόμαστε γραφικά τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ως τελικά σημεία διανυσμάτων με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων $O(0, \ldots, 0)$. Έστω P παραλληλόγραμμο στον $\mathbb{R}^n$ με κορυφές $OACB$. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ όπου D είναι εντός του P γράφεται ως

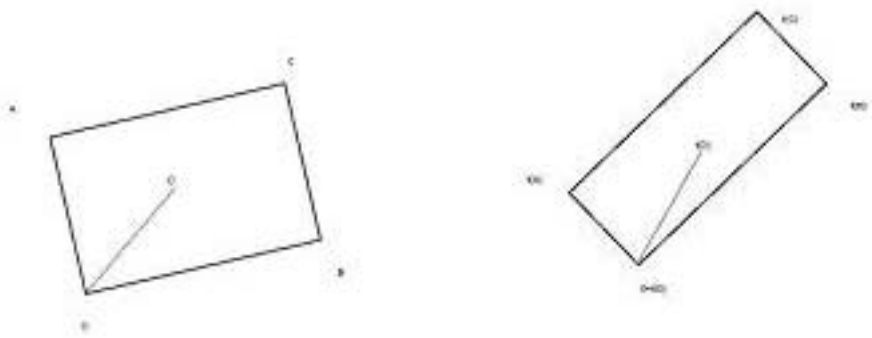
$$k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} : \ 0 \leq k_1 + k_2 \leq 1 \ .$$

Έπεται ότι

$$f(\overrightarrow{OD}) = k_1 f(\overrightarrow{OA}) + k_2 f(\overrightarrow{OB}) \ .$$

Αφού $0 \leq k_1 + k_2 \leq 1$ έπεται ότι το τελικό σημείο του $f(\overrightarrow{OD})$ είναι εντός του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $f(\overrightarrow{OA})$ και $f(\overrightarrow{OB})$.

Συνοψίζοντας αν P είναι παραλληλόγραμμο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $f(P)$ είναι παραλληλόγραμμο στον $\mathbb{R}^m$. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε εφαρμογές όπως γραφικά υπολογιστών.



Παρατηρούμε ότι αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική συνάρτηση, τότε $f(0,\ldots,0) = (0,\ldots,0)$. Πράγματι έστω ότι $f(1,\ldots,1) = w$, (θα μπορούσαμε να διαλέξουμε και οποιαδήποτε άλλο στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ αντί για το $(1,\ldots,1)$ για αυτήν την απόδειξη). Τότε $0 \cdot w = (0,\ldots,0)$. Έτσι

$$f(0,\ldots,0) = 0 \cdot f(1,\ldots,1) = 0 \cdot w = (0,\ldots,0)\ .$$

Έστω τώρα ότι $B = (v_1,\ldots,v_n)$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ και D διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^m$. Αν $v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n$ τότε

$$\begin{aligned} f(v) &= f(k_1v_1 + \cdots + k_nv_n) = f(k_1v_1) + \cdots + f(k_nv_n) \\ &= k_1f(v_1) + \cdots + k_nf(v_n)\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Άρα

$$\begin{aligned} C_D(f(v)) &= k_1C_D(f(v_1)) + \cdots + k_nC_D(f(v_n)) = \\ &= C_D(f(v_1))k_1 + \cdots + C_D(f(v_n))k_n = A^f_{D,B} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου

$$A^f_{D,B} = \left[\ C_D(f(v_1)) \quad C_D(f(v_2)) \quad \cdots \quad C_D(f(v_m))\ \right].$$

Ισχύει λοιπόν ότι

$$C_D(f(v)) = A^f_{D,B}\ C_B(v)\ .$$

Αντίστροφα αν καθορίσουμε διατετεγμένες βάσεις $B = (v_1, \ldots, v_n)$ και $D = (w_1, \ldots, w_n)$ για τους χώρους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ τότε σε κάθε πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ αντιστοιχεί μία γραμμική συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ που ορίζεται από τη σχέση

$$C_D(f(v)) = A\ C_B(v)\ .$$

Έτσι η i-στήλη του A είναι ίση με $C_D(f(v_i)$. Για παράδειγμα η εικόνα του $f(v_1)$ βρίσκεται από τη πρώτη στήλη του A:

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n\ .$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις εικόνες $f(v_i)$ για κάθε $v_i \in B$ και από τη σχέση 3.5 μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης για κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα 3.4.2.

1. Έστω ότι $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική συνάρτηση, $f(e_1) = (1,1)$ και $f(e_2) = (1,2)$. Θα υπολογίσουμε την εικόνα του $(2,3)$. Αφού $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$ έπεται ότι

   $$f(2,3) = 2f(1,0) + 3f(0,1) = 2(1,1) + 3(1,2) = (5,8)\ .$$

   Παρατηρούμε ότι

   $$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_B(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_B(f(v)) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = A^f_{B,B} C_B(v)\ .$$

   Ο αναλυτικός τύπος της f προκύπτει από τη σχέση $C_D(f(v)) = A^f_{B,B}\ C_B(v)$. Έστω $v = (a,b)$. Έχουμε

   $$C_B(f(v)) = A^f_{B,B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a+2b \end{bmatrix}$$

   και $f(a,b) = (a+b, a+2b)$.

2. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad (x, y, z) \mapsto (x - z, x + y).$$

Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $D = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Τότε $f(e_1) = (1, 1) = \epsilon_1 + \epsilon_2$ άρα $C_D(f(e_1)) = [1\ 1]^T$. Επίσης $f(e_2) = (0, 1) = 0\epsilon_1 + 1\epsilon_2$ και $C_D(f(e_2)) = [0\ 1]^T$. Τέλος $f(e_3) = (-1, 0) = -1\epsilon_1 + 0\epsilon_2$ και $C_D(f(e_2)) = [-1\ 0]^T$. Άρα

$$A^f_{D,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

3. Έστω ότι η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έχει πίνακα

$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση $B = (e_1, e_2, e_3)$ του R^3. Έπεται ότι

$$f(e_1) = (1, 0, 3), \quad f(e_2) = (2, 1, 0), \quad f(e_3) = (5, 1, 2).$$

Άρα, αν $v = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3$, τότε

$$f(v) = \kappa_1 f(e_1) + \kappa_2 f(e_2) + \kappa_3 f(e_3) =$$
$$= \kappa_1(1, 0, 3) + \kappa_2(2, 1, 0) + \kappa_3(5, 1, 2),$$

δηλ.

$$f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3, \kappa_2 + \kappa_3, 3\kappa_1 + 2\kappa_3).$$

Τονίζουμε και πάλι ότι ο αναλυτικός τύπος της γραμμικής συνάρτησης f βρίσκεται πολύ εύκολα με πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix}, \quad C_B(f(v)) = A\ C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3 \\ \kappa_2 + \kappa_3, 3\kappa_1 + 2\kappa_3 \end{bmatrix}$$

και $f(v) = (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3, \kappa_2 + \kappa_3, 3\kappa_1 + 2\kappa_3)$.

4. Θεωρούμε τους $\mathbb{R}$-διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ με αντίστοιχες διατεταγμένες κανονικές βάσεις $B = (e_1, e_2, e_3)$ και $D = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$. Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ με πίνακα

$$A^f_{D,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} .$$

Αν $v = (2, -1, 1)$ τότε $v = 2e_1 - e_2 + e_3$ και

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Άρα

$$C_D(f(v)) = A^f_{D,B}\, C_B(v) = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix}$$

και

$$f(v) = 3\epsilon_1 + 9\epsilon_2 + 15\epsilon_3 + 21\epsilon_4 = (3, 9, 15, 21).$$

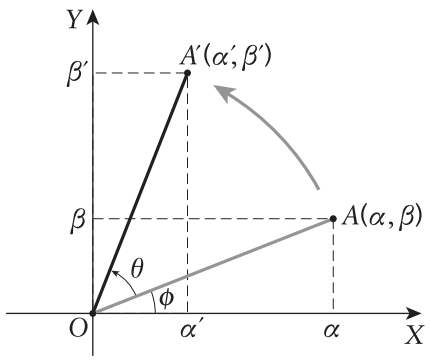
Αφού

$$A^f_{D,B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b + 3c \\ 4a + 5b + 6c \\ 7a + 8b + 9c \\ 10a + 11b + 12c \end{bmatrix}$$

έπεται ότι

$$f(a, b, c) = (a + 2b + 3c, 4a + 5b + 6c, 7a + 8b + 9c, 10a + 11b + 12c) .$$

5. Η **αριστερόστροφη περιστροφή** κατά γωνία θ, είναι η συνάρτηση r_θ του $\mathbb{R}^2$ που περιστρέφει το διάνυσμα OA κατά γωνία θ με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Η γεωμετρική παράσταση της συνάρτησης δίνεται από το επόμενο σχήμα.



Επομένως

$$r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha', \beta').$$

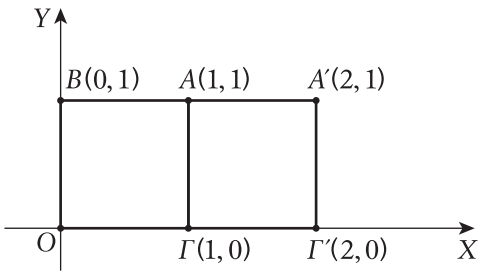
Από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι $(1,0) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ ενώ $(0,1) \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta)$. Έτσι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην r_θ ως προς τη κανονική βάση είναι

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} .$$

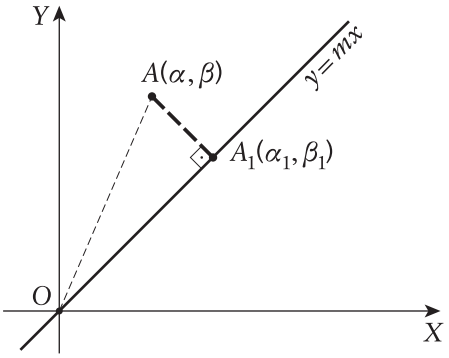
και $r_\theta(a,b) = (\cos\theta\ a - \sin\theta\ b, \sin\theta\ a + \cos\theta\ b)$.

6. Η συνάρτηση
$$f : R^2 \to R^2 , \quad (\alpha, \beta) \mapsto (k\alpha, \beta),$$
για κάποιο θετικό πραγματικό αριθμό k, λέγεται **διαστολή** ως προς τον άξονα των Χ αν $k \geq 1$, ενώ αν $0 < k < 1$, τότε η f λέγεται **συστολή** ως προς τον άξονα των Χ. Ο πίνακας της f ως προς τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$
Ανάλογα ορίζεται η συνάρτηση διαστολής ή συστολής ως προς τον άξονα των Y.

Η διαστολή ως προς τον άξονα των Χ με πίνακα
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
απεικονίζει το μοναδιαίο τετράγωνο $OBA\Gamma$ στο $OBA'\Gamma'$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα και $f(a,b) = (2a, b)$.



7. Έστω m κάποιος πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που απεικονίζει το διάνυσμα OA στο διάνυσμα OA_1 επί της ευθείας με εξίσωση $y = mx$ έτσι ώστε $OA1$ να είναι ορθογώνιο στο AA_1 λέγεται **προβολή** στην προαναφερθείσα ευθεία. Γεωμετρικά η συνάρτηση αναπαριστάται όπως στο επόμενο σχήμα:

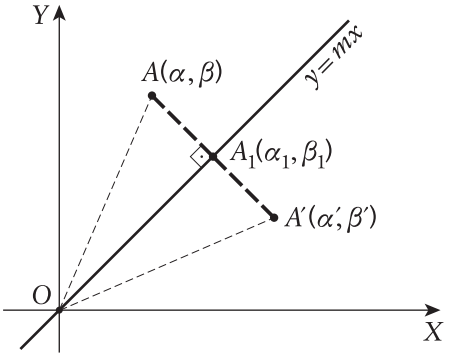


Στο επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε εσωτερικά γινόμενα για να υπολογίζουμε εύκολα προβολές. Σε κάποιες περιπτώσεις όμως είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις προβολές των e_1, e_2. Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε το πίνακα της προβολής f επί του άξονα των x ως προς τη κανονική βάση B του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι

$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και $f(a, b) = (a, 0)$.

8. Η συνάρτηση f του $\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί το διάνυσμα OA στο διάνυσμα OA' που απέχει από ως την ευθεία με εξίσωση $y = mx$ όσο και το OA λέγεται **αντικατοπτρισμός**:



Στο επόμενο κεφάλαιο, με εσωτερικά γινόμενα θα μπορέσουμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί σε αντικατοπτρισμό.

Θα βρούμε τον πίνακα του αντικατοπτρισμού f ως προς τον άξονα των X για τη κανονική βάση $B = \{e_1, e_2\}$ του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $f(e_1) = e_1$ ενώ $f(e_2) = (0, -1)$. Άρα

$$A_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και $f(a,b) = (a,-b)$.

9. Έστω $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^t$ γραμμικές συναρτήσεις. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^t$ είναι γραμμική συνάρτηση. Αν B, D, E είναι βάσεις για τους $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^t$ αντίστοιχα τότε προκύπτει ότι
$$A^{g\circ f}_{E,B} = A^g_{E,D} A^f_{D,B} \ .$$
Σημειώνουμε ότι ο τρόπος γραφής των δεικτών βοηθά τη μνημονική αποστήθιση του τύπου.

10. Θα υπολογίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση f που προκύπτει από τις συνθέσεις των εξής γραμμικών συναρτήσεων:

    - f_1: την αριστερόστροφη περιστροφή του $\mathbb{R}^2$ με γωνία $\theta = \pi/2$,
    - f_2: τον αντικατοπρισμό του $\mathbb{R}^2$ ως προς τον άξονα των X
    - f_3: τη διαστολή ως προς τον άξονα των U με συντελεστή 2.

    Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση είναι να βρούμε τους αντίστοιχους πίνακες και να τους πολλαπλασιάσουμε. Παρατηρούμε όμως ότι μπορούμε εύκολα να παρακολουθήσουμε τη τελική εικόνα για κάθε ένα από τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \xrightarrow{f_1} & e_2 & \xrightarrow{f_2} & -e_2 & \xrightarrow{f_3} & (0,-2) \\ e_2 & \xrightarrow{f_1} & -e_1 & \xrightarrow{f_2} & -e_1 & \xrightarrow{f_3} & (-1,0) \end{array} .$$
    Αν B είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, έπεται ότι $A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (a,b) \mapsto (-2b, -a).$$

11. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(a,b) = (a,-b)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(a,b) = (a,b,a-b)$ και B, D οι κανονικές βάσεις των χώρων $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα. Τότε
$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ A^g_{D,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ A^{g\circ f}_{D,B} = A^g_{D,B} \circ A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$
    Άρα
$$g \circ f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g \circ f)(a,b) = (a, -b, a+b) \ .$$

Ορισμός 3.4.3. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto f(v)$ μία γραμμική συνάρτηση. Η* **εικόνα** *της f συμβολίζεται με* $\mathrm{Im}\ f$ *ή $f(\mathbb{R}^n)$ και είναι το σύνολο*

$$\mathrm{Im}\ f = f(V) = \{\ f(v)\ :\ v \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Ο **πυρήνας** *της f συμβολίζεται* $\mathrm{Ker}\ f$ *και ορίζεται*

$$\mathrm{Ker}\ f = \{\ v \in \mathbb{R}^n\ :\ f(v) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Οι ορισμοί της βάσης και του πυρήνα μίας γραμμικής συνάρτησης δεν εξαρτώνται από τις βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$. Όταν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε την εικόνα και τον πυρήνα της f είναι συνήθως **χρήσιμο** να επιλέξουμε B και D τις **κανονικές βάσεις** των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα και να δουλέψουμε με τον πίνακα $A^f_{D,B}$. Αφού

$$C_D(f(v)) = A^f_{D,B}\ C_B(v)$$

έπεται ότι $w = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{Im} f$ αν και μόνο αν υπάρχει $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$A^f_{D,B} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

Άρα $w \in \mathrm{Im} f$ αν και μόνο αν w ανήκει στο χώρο στηλών του $A^f_{D,B}$. Επομένως $\mathrm{Im}\ f$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ και είναι ίσος με τον το χώρο στηλών του $A^f_{D,B}$. Για τον πυρήνα της f παρατηρούμε ότι $v \in \mathrm{Ker}\ f$ αν και μόνο αν

$$0 = A^f_{D,B}\ C_B(v)\ .$$

Άρα $v \in \mathrm{Ker}\ f$ αν και μόνο αν $v \in \mathrm{null}(A^f_{D,B})$ και

$$\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{null}(A^f_{D,B})\ .$$

Άρα $\mathrm{Ker}\ f$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 3.4.4. Έστω η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ , \quad (x, y, z) \mapsto (x - z,\ x + y)\ ,$$

B, D οι κανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και του $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$A^f_{D,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να περιγράψουμε τα διανύσματα $(a, b) \in \mathrm{Im} f$ θεωρούμε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα και κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις για να τον φέρουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & a \\ 1 & 1 & 0 & | & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b-a \end{bmatrix}$$

Αφού $\mathrm{rank}(A^f_{D,B}) = 2$ ο χώρος στηλών του $A^f_{D,B} = \mathbb{R}^2$ και άρα $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$. Για να βρούμε $\mathrm{Ker}\, f$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $A^f_{D,B} X = 0$. Προκύπτει ότι $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{null}(A^f_{DB})$ αν και μόνο αν $x_1 = x_3$ και $x_2 = -x_3$. Άρα

$$\mathrm{Ker}\, f = \{(x_3, -x_3, x_3) : \ x_3 \in \mathbb{R}\} = S(\{(1, -1, 1)\}) \ .$$

Λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι **ένα προς ένα** ή **μονομορφισμός** αν και μόνο $v_1 \neq v_2 \Leftrightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$. Παρατηρούμε ότι αν $f(v_1) = f(v_2)$ τότε $f(v_1) - f(v_2) = 0$ και $f(v_1 - v_2) = 0$. Άρα $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\, f$.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία γραμμική συνάρτηση. Τότε f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν* $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

Ο πυρήνας μίας γραμμικής συνάρτησης f ουσιαστικά μετράει πόσο απέχει η f από το να είναι μονομορφισμός. Η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται **επιμορφισμός** όταν $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^m$. Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται **ισομορφισμός** αν είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.

Παραδείγματα 3.4.6.

1. Έστω
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \quad v \mapsto 0$$
Τότε $\mathrm{Ker}\ f = \mathbb{R}^n$ ενώ $\mathrm{Im}\ f = \{0\}$.

2. Έστω
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad (x, y) \mapsto (x, 0, 0) \ .$$
Τότε $\mathrm{Ker}\ f = \{(0, y) : \ y \in \mathbb{R}\} = S(\{(0, 1)\})$ ενώ $\mathrm{Im}\ f = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = S(\{(1, 0, 0)\})$. Παρατηρούμε ότι
$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2).$$

3. Έστω
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y) \ .$$

Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Αφού $\det(A^f_{B,B}) = -1$ έπεται ότι $A^f_{B,B}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και άρα $\mathrm{null}(A^f_{B,B}) = \{0\}$ ενώ ο χώρος στηλών του $A^f_{B,B}$ είναι ο $\mathbb{R}^2$. Άρα η συνάρτηση είναι ισομορφισμός.

4. Έστω ότι $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός και έστω ότι B, D είναι δύο τυχαίες βάσεις του $\mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι πίνακας $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος. Ξεκινάμε με μία γενική παρατήρηση:

$$v \in \mathrm{Ker}\ f \text{ αν και μόνο αν } 0 = A^f_{D,B} C_B(v) .$$

Πράγματι αν $v \in \mathrm{Ker}\, f$ τότε $f(v) = 0$, άρα $C_D(f(v)) = 0$ και επομένως $C_B(v)$ είναι λύση του γραμμικού συστήματος $A^f_{D,B} X = 0$. Αφού f είναι ισομορφισμός έπεται ότι $\mathrm{Ker}\, f = 0$ και άρα

$$A^f_{D,B} X = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}(A^f_{D,B}) = n$$

και ο πίνακας $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος.

Αντίστροφα αν $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι $A^f_{D,B} X = Y$ είναι συμβατό για κάθε $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Έστω $w \in \mathbb{R}^n$, $Y = C_D(w)$ και X η λύση του συστήματος $A^f_{D,B} = Y$. Το διάνυσμα v έτσι ώστε $C_B(v) = X$ έχει εικόνα το w: $f(v) = w$. Άρα $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n$. Αφού $A^f_{D,B} X = 0$ έχει ως μόνη λύση $X = 0$ έπεται ότι $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Άρα η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός. Δείξαμε λοιπόν ότι

Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας όπου B, D δύο τυχαίες βάσεις του $\mathbb{R}^n$.

5. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισομορφισμός, B βάση του $\mathbb{R}^n$, $A = A^f_{B,B}$. Έστω ότι $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι η γραμμική συνάρτηση με πίνακα $A^g_{B,B} = A^{-1}$. Τότε

$$A^{g\circ f}_{B,B} = A^g_{B,B} A^f_{B,B} = A^{-1} A = I_n$$

και $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Με άλλα λόγια $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : v \mapsto v$. Η g θα λέγεται η **αντίστροφη συνάρτηση** της f και θα συμβολίζεται με f^{-1}. Έπεται ότι

$$A^{f^{-1}}_{B,B} = (A^f_{B,B})^{-1} .$$

6. Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y)$. Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Αφού

$$A = A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{f^{-1}}_{B,B} = (A)^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

έπεται ότι $f^{-1}(x, y) = (-3x + 2y, 2x - y)$.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις διαστάσεις των χώρων $\operatorname{Im} f$ και $\operatorname{Ker} f$ με τη διάσταση του χώρου στον οποίο δρα η γραμμική συνάρτηση.

Θεώρημα 3.4.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία γραμμική συνάρτηση. Τότε*

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ο πίνακας της συνάρτησης f ως προς τις κανονικές βάσεις B και D των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{null}(A)) = n\ . \tag{3.6}$$

Είδαμε ότι $\operatorname{Im} f = \Sigma(A)$ όπου $\Sigma(A)$ είναι ο χώρος στηλών του πίνακα A. Αφού $\dim\Sigma(A) = \operatorname{rank}(A)$ έπεται ότι $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Im} f)$. Επίσης $\operatorname{null}(A) = \operatorname{Ker} f$ και άρα $\dim(\operatorname{null}(A)) = \dim(\operatorname{Ker} f)$. Το θεώρημα τώρα έπεται αντικαθιστώντας στην 3.6. □

Οι ορισμοί και τα συμπεράσματα που δώσαμε παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις $f : V \to U$ όπου V υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ και U υποχώρος του $\mathbb{R}^m$. Έτσι αναφέρουμε συνοπτικά τα παρακάτω:

Ορισμός 3.4.8. *Μία συνάρτηση $f : V \to U$ λέγεται* **γραμμική συνάρτηση** *αν*

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

και

$$f(\kappa v) = \kappa f(v)\ ,$$

για όλα τα $\kappa \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, v \in V$.

Έστω $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση του V. Η f ορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων της B:

$$v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n \Rightarrow f(v) = k_1f(v_1) + \cdots + k_nf(v_n)\ .$$

Έστω D βάση του U. Ο **πίνακας** της f ως προς τις βάσεις D και B συμβολίζεται $A^f_{D,B}$ και είναι ο πίνακας

$$A^f_{D,B} = \left[\ C_D(f(v_1)) \quad C_D(f(v_2)) \quad \cdots \quad C_D(f(v_n))\ \right].$$

Ισχύει ότι

$$C_D(f(v)) = A^f_{D,B} C_B(v)\ .$$

Ο πίνακας $A^f_{D,B}$ έχει τόσες γραμμές όσες είναι η διάσταση του U, ενώ ο αριθμός των στηλών του ισούται με τη διάσταση του V. Η f είναι **μονομορφισμός** αν και μόνο αν $\operatorname{Ker} f = \{v \in V : \ f(v) = 0\}$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\operatorname{null}(A_f) = \{0\}$. Η f είναι **επιμορφισμός** αν και μόνο αν $\operatorname{Im} f = U$, δηλ. αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A^f_{D,B}) = \dim(U)$. Ισχύει ότι

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(Ker f) = \dim(V)\ .$$

Συγκρίνοντας διαστάσεις προκύπτει το εξής:

Πόρισμα 3.4.9. *Έστω V διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ και U διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $\dim(V) = \dim(U)$. Αν $f : V \to U$ είναι γραμμική συνάρτηση ισχύει ότι*

$$f \text{ ισομορφισμός } \Leftrightarrow f \text{ επιμορφισμός } \Leftrightarrow f \text{ μονομορφισμός}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τις τελευταίες δύο συνεπαγωγές. Εάν η f είναι επιμορφισμός τότε $\operatorname{Im} f = U$ και $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(U) = \dim(V)$. Έπεται ότι $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ και άρα $\operatorname{Ker} f = 0$ και η f είναι μονομορφισμός. Αντίστροφα αν η f είναι μονομορφισμός τότε $\operatorname{Ker} f = 0$ και $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ άρα $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(U)$ και f είναι επιμορφισμός. □

Τονίζουμε ότι αν $\dim(V) = \dim(U)$, B, D βάσεις των V και U αντίστοιχα, τότε η γραμμική συνάρτηση $f : V \to U$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα 3.4.10.

1. Έστω $V = S(\{(1,2,0),(0,0,1)\})$. Ο χώρος V είναι επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ και $\dim V = 2$. Θα βρούμε έναν ισομορφισμό ανάμεσα στο $\mathbb{R}^2$ και στο V. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = 0,0,1)$, $D = (v_1, v_2)$ βάση του V. Παίρνουμε τη γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to V$ όπου $f(e_1) = (1,2,0)$ και $f(e_2) = (0,0,1)$. Ο αναλυτικός τύπος της f προκύπτει από τη σχέση $f(a,b) = f(ae_1 + be_2) = af(e_1) + bf(e_2) = (a, 2a, 0) + (0,0,b) = (a, 2a, b)$ ενώ

$$A^f_{D,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Ο πίνακας $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος και η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός.

2. Έστω τώρα $V = S(\{(1,2,0),(0,0,1)\})$ και $W = S(\{(1,4,0),(0,0,1)\})$. Παρατηρούμε ότι $\dim(V) = \dim(W) = 2$. Θα βρούμε έναν ισομορφισμό $f : V \to W$. Έστω η βάση $D = (v_1, v_2)$ του V όπου $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ και η βάση $E = (w_1, w_2)$ του W όπου $w_1 = (1,4,0)$, $w_2 = (0,0,1)$. Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και τη γραμμική συνάρτηση $f : V \to W$ έτσι ώστε $A^f_{E,D} = A$. Έχουμε ότι $f(v_1) = w_2$ και $f(v_2) = w_1$, ενώ $f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$ άρα $f(a, 2a, b) = (b, 4b, a)$. Η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός.

3. Έστω ότι $\dim V = \dim W = n$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $D = \{w_1, \ldots, w_n\}$ βάσεις των V και W αντίστοιχα. Παίρνουμε f τη γραμμική συνάρτηση $f : V \to W$ με πίνακα $A^f_{D,B} = I_n$. Έτσι $f(v_i) = w_i$ για $i = 1, \ldots, n$. Ο πίνακας $A^f_{D,B}$ είναι αντιστρέψιμος και η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός.

Ασκήσεις ενότητας 3.4

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα τον A.

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα A.

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα A. Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ με πίνακα A^T.

4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ όπου $f(a, b, c) = (a + b + c, b + c, a + 2c, b + 3c)$. Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

5. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
ο πίνακας μίας γραμμικής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Να υπολογίσετε $f(4, -3)$.

6. Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που πρώτα περιστρέφει δεξιόστροφα ως προς γωνία $\pi/2$, μετά διαστέλλει ως προς τον άξονα των X με συντελεστή 3, στη συνέχεια διαστέλλει ως προς τον άξονα των Υ με συντελεστή 2 και τέλος αντικατροπτρίζει ως προς τον άξονα των Υ.

7. Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που πρώτα αντικατοπτρίζει ως προς την ευθεία $y = x$, και στη συνέχεια διπλασιάζει.

8. Δίνεται η συνάρτηση
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad (x, y, z) \to (x + 2y, y - z, x + 2z).$$
Να υπολογίσετε μία βάση των $\operatorname{Ker} f$ και $\operatorname{Im} f$.

9. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία γραμμική συνάρτηση και
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση. Να εξετάσετε αν τα στοιχεία $v_1 = (1, 2, 4)$ και $v_2 = (1, 3, 4)$ ανήκουν στην εικόνα της f, χρησιμοποιώντας την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα. Να περιγράψετε τον πυρήνα της f χρησιμοποιώντας την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα.

10. Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με
$$f(x, y, z) = (x + 3z,\ 2x + y + 5z,\ -y + 2z),$$
για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

11. Να βρεθεί ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^2 \to V$ όπου $V = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

12. Να βρεθεί ισομορφισμός $f:\ V \to \mathbb{R}^2$ όπου $V = \{(x,y,z):\ x+y+z=0\}$.

13. Έστω η γραμμική συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με
$$f(x,y,z) = (x+3z, 2x+y+5z, -y+2z)\ .$$
Να αποδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός και να ορίσετε την f^{-1}.

3.5 Πίνακες Αλλαγής Βάσης

Έστω $f:\ V \to U$ μία γραμμική συνάρτηση. Στη προηγούμενη ενότητα κατασκευάσαμε τον πίνακα $A^f_{D,B}$ ως προς τις βάσεις B του V και D του U. Έστω ότι B' και D' είναι δύο νέες βάσεις του V και U αντίστοιχα. Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στους πίνακες $A^f_{D,B}$ και $A^f_{D'B'}$; Αυτό είναι το ερώτημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτή την ενότητα. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τους πίνακες μετάβασης ανάμεσα σε δύο βάσεις.

Ορισμός 3.5.1. *Έστω ότι V είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$, $\dim(V) = n$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ και $B' = (w_1, \ldots, w_n)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του V. Ο πίνακας*
$$S_{B' \leftarrow B} = \left[\ C_{B'}(v_1)\ \ C_{B'}(v_2)\ \ \cdots\ \ C_{B'}(v_n)\ \right].$$
λέγεται **πίνακας μετάβασης** *από τη βάση B στη βάση B'. Οι στήλες του πίνακα $S_{B' \leftarrow B}$ είναι οι πίνακες συντεταγμένων των στοιχείων της βάσης B ως προς τη βάση B'.*

Παρατηρούμε ότι
$$S_{B' \leftarrow B} = A^{\mathrm{id}_V}_{B',B}\ ,$$
όπου $\mathrm{id}_V:\ V \to V$, $id_V(v) = v$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Ανίστοιχα
$$A^{\mathrm{id}_V}_{B,B'} = S_{B \leftarrow B'}\ .$$
Αφού
$$A^{\mathrm{id}_V}_{BB'} A^{\mathrm{id}_V}_{B'B} = A^{\mathrm{id}_V}_{BB} = I_n$$
έπεται ότι
$$(S_{B' \leftarrow B})^{-1} = S_{B \leftarrow B'}\ .$$
Όταν B είναι η κανονική βάση του V είναι πολύ εύκολο να βρούμε τον πίνακα $S_{B \leftarrow B'}$. Ο πίνακας $S_{B' \leftarrow B}$ προκύπτει τότε ως ο αντίστροφος του $S_{B \leftarrow B'}$. Μία πολύ χρήσιμη σχέση είναι η παρακάτω:
$$C_{B'}(v) = S_{B' \leftarrow B}\ C_B(v). \tag{3.7}$$

Παραδείγματα 3.5.2.

1. Έστω $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $B' = \{v_1, v_2\}$ όπου $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (1,1)$. Αφού $v_1 = e_1 + 2e_2$ και $v_2 = e_1 + e_2$ προκύπτει ότι
$$S_{B\leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$
Έπεται ότι
$$S_{B'\leftarrow B} = (S_{B\leftarrow B'})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} .$$
Άρα $e_1 = -v_1 + 2v_2$ και $e_2 = v_1 - v_2$.

2. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,-1)$ και $B' = (w_1, w_2)$. Παρατηρούμε ότι $w_1 = e_1 + e_2$, $w_2 = e_1 - e_2$. Άρα
$$S_{B\leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
ενώ
$$S_{B'\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} .$$
Έπεται ότι $e_1 = 1/2(w_1 + w_2)$, $e_2 = 1/2(w_1 - w_2)$. Θα βρούμε τις συντεταγμένες του στοιχείου $v = (2,1)$ ως προς τη βάση B'. Αφού $v = 2e_1 + e_2$ ισχύει ότι
$$C_{B'}(v) = S_{B'\leftarrow B}\, C_B(v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$
δηλ. $v = 3/2w_1 + 1/2w_2$. Για το στοιχείο $w = 3w_1 + w_2$ ισχύει
$$C_B(u) = S_{B\leftarrow B'}\, C_{B'}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$
και $w = 4e_1 + 2e_2 = (4,2)$.

3. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$, $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = e_3$ και $B' = (v_1, v_2, v_3)$. Θα βρούμε τους πίνακες μετάβασης από τη μία βάση στην άλλη. Θα ξεκινήσουμε με τον πιο απλό από τους δύο πίνακες, τον πίνακα μετάβασης από τη βάση B' στη βάση B. Οι στήλες αυτού του πίνακα είναι ίσες με τις συντεταγμένες των στοιχείων της βάσης B' ως προς τη βάση B.
$$S_{B\leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο αντίστροφος του πίνακα αυτού είναι ο πίνακας $S_{B'\leftarrow B}$ και επομένως

$$S_{B'\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι $e_1 = -v_1 + 2v_2$, $e_2 = v_1 - v_2$.

4. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις στήλες του A, δηλ. $v_1 = (3, 1)$, $v_2 = (2, 1)$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα και το σύνολο $B' = (v_1, v_2)$ είναι βάση για τον $\mathbb{R}^2$. Ισχύει ότι

$$S_{B\leftarrow B'} = A, \quad S_{B'\leftarrow B} = A^{-1} .$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει τις συντεταγμένες των στοιχείων της βάσης B ως προς τη βάση B'. Έτσι $e_1 = v_1 - v_2$ ενώ $e_2 = -2v_1 + 3v_2$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πίνακα μίας συνάρτησης και σύμφωνα με τους παραπάνω συμβολισμούς προκύπτει η παρακάτω πρόταση. Πρώτα δίνουμε τον ορισμό των **όμοιων πινάκων**. Δύο πίνακες $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ για τους οποίους υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$A' = S^{-1} A\, S$$

λέγονται **όμοιοι**.

Πρόταση 3.5.3. *Έστω $f : V \to W$ μία γραμμική συνάρτηση, $A^f_{D,B}$ ο πίνακας της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις B και D των V και W αντίστοιχα. Αν B' και D' είναι δύο νέες διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα και $A^f_{D',B'}$ είναι ο πίνακας της f ως προς τις νέες βάσεις, τότε*

$$A^f_{D',B'} = S_{D'\leftarrow D}\, A^f_{D,B}\, S_{B\leftarrow B'}, \tag{3.8}$$

όπου $S_{B\leftarrow B'}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση B' στη B και $S_{D'\leftarrow D}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση D στη D'.

Ιδιαίτερα αν $f : V \to V$ και ονομάσουμε S τον πίνακα $S_{B \leftarrow B'}$, τότε

$$A^f_{B',B'} = S^{-1} A^f_{B,B}\, S. \tag{3.9}$$

Οι πίνακες $A^f_{B,B}$, $A^f_{B',B'}$ είναι όμοιοι.

Παραδείγματα 3.5.4.

1. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ , \quad (x, y, z) \mapsto (x + 3y - z,\ 2x - y,\ y + 2z).$$

Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας της f ως προς τη βάση B είναι

$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$•. Τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $D = (v_1, v_2, v_3)$ είναι μία άλλη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε

$$S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$S_{D \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow D})^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

και

$$A^f_{D,B} = S_{D \leftarrow B}\, A^f_{B,B}\, S_{B \leftarrow B} = S_{D \leftarrow B}\, A^f_{B,B}\, I_3 =$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & -8 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $A^f_{D,B}$ δίνει τις συντεταγμένες ως προς τη βάση D των εικόνων των διανυσμάτων της βάσης B. Έτσι $f(e_1) = v_1 + v_2$, $f(e_2) = -\frac{8}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 + \frac{6}{5}v_3$ και $f(e_3) = -\frac{3}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 - \frac{4}{5}$. Θα υπολογίσουμε τώρα τον πίνακα $A^f_{D,D}$.

$$A^f_{D,D} = S_{D \leftarrow B}\, A^f_{B,B}\, S_{B \leftarrow D} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -5 & -6 & 13 \\ 0 & 11 & 7 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $A^f_{D,D}$ δίνει τις συντεταγμένες ως προς τη βάση D των εικόνων των διανυσμάτων της βάσης D. Έτσι $f(v_1) = -v_1 + 2v_3$, $f(v_2) = \frac{1}{5}(-6v_1 + 11v_2 + 2v_3)$ και $f(v_3) = \frac{1}{5}(13v_1 + 7v_2 + 4v_3)$.

2. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$f(e_1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \qquad f(e_2) = 2e_1 + 5e_2, \qquad f(e_3) = 3e_1 + 7e_2.$$

Ο πίνακας της f ως προς τη βάση B είναι ο πίνακας

$$A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Έστω $\varepsilon_1 = (3, 0, -1)$, $\varepsilon_2 = (1, 2, 0)$, $\varepsilon_3 = (-1, 3, 1)$. Τα διανύσματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ είναι άλλη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε

$$S_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Επομένως

$$A^f_{B',B'} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & -10 \\ -32 & -1 & 26 \\ 22 & 5 & -11 \end{bmatrix} .$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= 19\varepsilon_1 - 32\varepsilon_2 + 22\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) &= 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) &= -10\varepsilon_1 + 26\varepsilon_2 - 11\varepsilon_3 . \end{aligned}$$

3. Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)$ και $B' = (v_1, v_2)$. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική συνάρτηση έτσι ώστε $f(v_1) = v_1$ και $f(v_2) = 2v_2$. Θα βρούμε τον τύπο της f. Παρατηρούμε ότι

$$A^f_{B',B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ,$$

ενώ

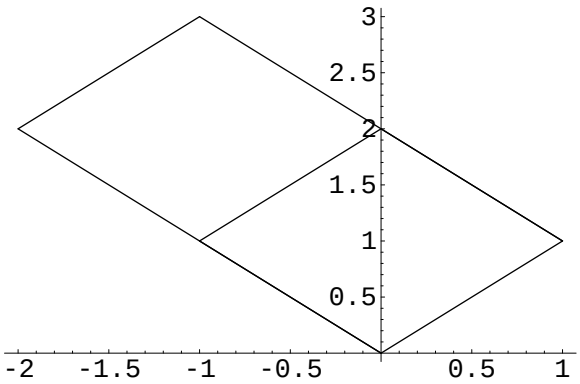
$$S_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; S_{B' \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow B'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι

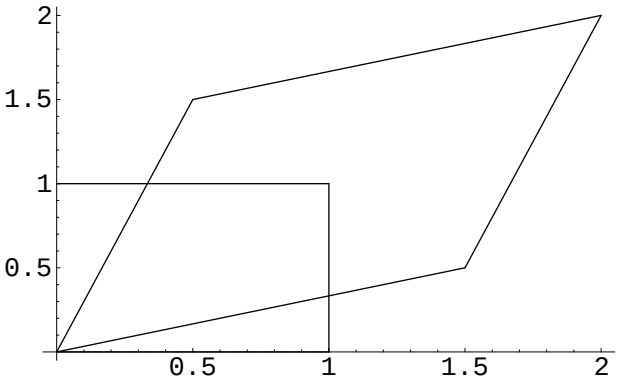
$$A^f_{B,B} = S_{B\leftarrow B'} A^f_{B',B'} S_{B'\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

και άρα $f(a,b) = \frac{1}{2}(3a+b, b+3a)$.

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα v_1, v_2 είναι ορθογώνια όπως και τα διανύσματα $f(v_1)$, $f(v_2)$. Τα v_1, v_2 καθορίζουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2. Τα $f(v_1)$, $f(v_2)$ καθορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 4, βλ. παρακάτω σχήμα.



Αντίστοιχα τα e_1 και e_2 καθορίζουν το μοναδιαίο τετραγώνο της παρακάτω εικόνας ενώ $f(e_1)$ και $f(e_2)$ καθορίζουν ένα παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 2, (ίσο με $|\det A_{BB}|$).



Οι πίνακες $A^f_{B,B}$, $A^f_{B',B'}$ είναι όμοιοι. Ο πίνακας $A^f_{B,'B'}$ είναι διαγώνιος και απλούστερος του A_{BB}. Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν είναι η εύρεση κριτηρίων για το πότε ένας πίνακας είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα. Προς αυτή την κατεύθυνση παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $f(v_1)$ και v_1 ανήκουν στην ίδια ευθεία, και

το ίδιο ισχύει για τα $f(v_2)$ και v_2. Ονομάζουμε τα διανύσματα v_1 και v_2 **ιδιοδιανύσματα** της f. Θα τα δούμε όλα αυτά αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Ασκήσεις ενότητας 3.5

1. Έστω οι πίνακες του $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

   i) Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, όταν $A = A_f = A_{BB}$ και $B = (e_1, e_2)$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$.

   ii) Να βρεθεί μία βάση $D = (v_1, v_2)$ του $\mathbb{R}^2$, ώστε $S_{B\leftarrow D} = S$, καθώς και ο πίνακας A_{DD}.

   iii) Να υπολογιστούν τα $C_D(f(v_1))$, $C_D(f(v_2))$.

   iv) Να υπολογιστεί το $f(v_1 + v_2)$.

2. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$, $\epsilon_1 = e_1 + e_4$, $\epsilon_2 = e_1 + 3e_2$, $\epsilon_3 = 3e_1 + e_2$, $\epsilon_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $D = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$. Να βρεθούν οι πίνακες $S_{D\leftarrow B}$ και $S_{B\leftarrow D}$.

3. Έστω $C = ((1, 1), (1, -1))$ και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

   Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, όταν $A = A_f = A_{C,C}$.

4. Δίνεται ο ενδομορφισμός του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad x\epsilon_1 + y\epsilon_2 + z\epsilon_3 \mapsto y\epsilon_1 + z\epsilon_2 + x\epsilon_3 ,$$

   όπου $\epsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\epsilon_2 = (1, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (1, 0, 0)$. Να ορίσετε την f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, δηλ. να περιγράψετε $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ και να δώσετε τον τύπο $f(a, b, c)$. Εάν η f είναι ισομορφισμός να βρεθεί η f^{-1}.

5. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$, $\epsilon_1 = e_1 + e_4$, $\epsilon_2 = e_1 + 3e_2$, $\epsilon_3 = 3e_1 + e_2$, $\epsilon_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,

$D = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$. Δίνεται επίσης ο ενδομορφισμός $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ που ορίζεται από τις σχέσεις :

$$f(\epsilon_1) = 3\epsilon_2, \quad f(\epsilon_2) = 7\epsilon_4, \quad f(\epsilon_3) = \epsilon_1 + \epsilon_3, \quad f(\epsilon_4) = \epsilon_1 - 5\epsilon_3.$$

Να ορίσετε την f ως προς τη βάση B και να δώσετε τον τύπο $f(a, b, c)$. Εάν η f είναι ισομορφισμός να βρεθεί η f^{-1}.

3.6 Επίλογος.

Στις ενότητες αυτού του κεφαλαίου μελετήσαμε διανυσματικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^n$. Η δομή ενός διανυσματικού υποχώρου V έγκειται στο ότι έχει οριστεί η πράξη της πρόσθεσης ανάμεσα στα στοιχεία του V και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι στοιχείο του V. Παράλληλα έχει οριστεί και η πράξη του σκαλιανού πολλαπλασιασμού ενός στοιχείο του V με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ και αυτό σε συνδυασμό με τη πράξη της πρόσθεσης μας επιτρέπει να πάρουμε γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του V. Έτσι ισχύουν οι εφτά βασικές ιδιότητες της πρώτης ενότητας για τα στοιχεία του V και μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας, της βάσης του V και της διάστασης του V. Αφού ο σκαλιανός πολλαπλασιασμός γίνεται με στοιχεία του $\mathbb{R}$, θα ήταν πιο ακριβές να λέγαμε ότι V είναι **$\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος** και να γράφαμε $\dim_{\mathbb{R}} V$ για τη διάσταση του V. Ο βασικός λόγος για να κάνουμε κάτι τέτοιο είναι για να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα μας. Η γενίκευση αυτή μπορεί να γίνει σε δύο κατευθύνσεις. Καταρχήν βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να περιοριοριστούμε σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ για να έχουμε τη επιθυμητή δομή. Εάν σε ένα σύνολο V μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη πρόσθεσης και μία πράξη 'σκαλιανού πολλαπλασιασμού' με στοιχεία του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν οι εφτά βασικές ιδιότητες της πρώτης ενότητας τότε V θα είναι ένας **$\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος** και θα έχει μία **βάση**. Έχουμε ήδη δει τέτοιους χώρους όπως για παράδειγμα το σύνολο $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι **$\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος** και $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m \cdot n$. Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$, είναι **$\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος** και $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]) = \infty$, (μία βάση του $\mathbb{R}[x]$ είναι το άπειρο σύνολο $\{1, x, x^2, \ldots\}$). Πιο συγκεκριμένα ας πάρουμε $m = 2$ και $n = 3$ και ας σταθούμε στον διανυσματικό χώρο $V = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

και ότι

$$A_1 + A_2 - B = 0 \ .$$

Έτσι A_1, A_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V ενώ A_1, A_2, A_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 6$ αφού οι πίνακες

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικοί ανεξάρτητοι και

$$\{E_{11}, \ldots, E_{23}\}$$

είναι βάση για το V. Η συνάρτηση

$$V \to \mathbb{R}^6, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

είναι **γραμμική συνάρτηση** και μάλιστα **ισομορφισμός**.

Υπό κάποια έννοια, όταν ο χώρος V που μελετάμε έχει πεπερασμένη διάσταση ίση με n τότε μπορούμε να σκεφτούμε τον V ως τον χώρο $\mathbb{R}^n$. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω V $\mathbb{R}$-διανυσματικοί χώροι. Αν $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ τότε υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}^n$ που να είναι ισομορφισμός.*

Κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}$. Έχουμε ότι μία βάση του $\mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος είναι το σύνολο $\{1, i\}$. Πράγματι κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι της μορφής $z = a + bi$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $z = a \cdot 1 + b \cdot i$. Επίσης ο μόνος τρόπος για να είναι $a + bi = 0$ είναι όταν $a = b = 0$, με άλλα λόγια $1,\ i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.

Η δεύτερη κατεύθυνση προς την οποία μπορούμε να γενικεύσουμε είναι όταν επιτρέψουμε στα στοιχεία με τα οποία κάνουμε τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό να ανήκουν σε ένα σώμα $\Bbbk$ αντί το $\mathbb{R}$. Έτσι ορίζουμε **$\mathbb{C}$-διανυσματικούς χώρους** ή ακόμα και **$\Bbbk$-διανυσματικούς χώρους** αρκεί το $\Bbbk$ να είναι σώμα. Για παράδειγμα $\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$ (σύγκρινε με $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$), $\mathbb{C}^2$ είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2 = 2$, $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και $\dim_{\mathbb{C}}(V) = m \cdot n$. Κλείνουμε αυτήν τη σύντομη ενότητα τονίζοντας ότι αν V και U είναι $\Bbbk$-διανυσματικοί χώροι έτσι ώστε $\dim_{\Bbbk}(V) = n$, $\dim_{\Bbbk}(V) = m$, B, D βάσεις των V και U τότε όλες οι

πληροφορίες για τη γραμμική συνάρτηση $f : V \to U$ βρίσκονται στον πίνακα $A^f_{D,B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ για τον οποίο ισχύει:

$$C_D(f(u)) = A^f_{D,B} C_B(u) \ .$$

Για παράδειγμα έστω $V = \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$, $U = \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C})$. Τότε $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(U) = 2$ και

$$f : V \to U, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

είναι ισομορφισμός. Έστω

$$B = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}), \quad D = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix})$$

βάσεις για V και U αντίστοιχα. Τότε

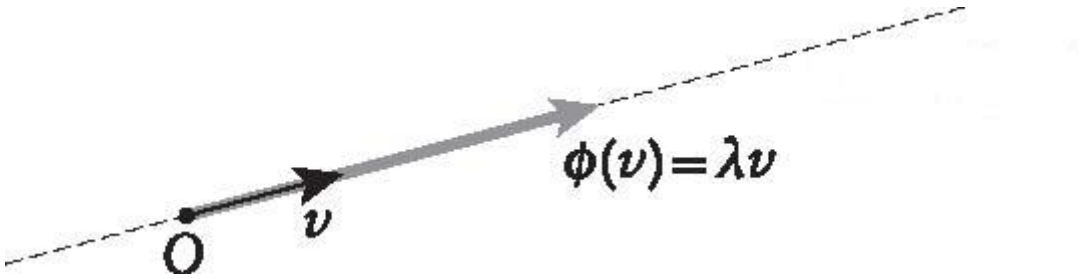
$$A^f_{D,B} = I_2 \ .$$

Κεφάλαιο 4

Ιδιοτιμές

4.1 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο $\mathbb{k}$ θα είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή το σώμα $\mathbb{C}$. Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν καθορίσουμε μία διατεταγμένη βάση B του $\mathbb{k}^n$ τότε σε κάθε πίνακα A του $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ αντιστοιχεί μία γραμμική συνάρτηση $\phi: \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ έτσι ώστε $A = A^{\phi}_{B,B}$ και αντίστροφα. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε συνθήκες έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι **διαγωνιοποιήσιμος**, δηλ. να είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα. Έστω ότι $\phi : V \to V$ μία γραμμική συνάρτηση. Μας ενδιαφέρουν τα μη μηδενικά διανύσματα v που οι εικόνες τους $\phi(v)$ είναι παράλληλες προς v. Τα διανύσματα αυτά τα ονομάζουμε **ιδιοδιανύσματα** της ϕ.



Ορισμός 4.1.1. *Έστω $V = \mathbb{k}^n$ και $\phi : V \to V$ μία γραμμική συνάρτηση. Το λ λέγεται* **ιδιοτιμή** *(eigenvalue) του ϕ, αν υπάρχει $v \in V$, $v \neq 0$, έτσι ώστε*

$$\phi(v) = \lambda v. \tag{4.1}$$

Το v λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** *(eigenvector) της ϕ για την ιδιοτιμή λ.*

Αν $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ τότε $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\Bbbk)$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ αν $X \neq \mathbf{0}$ και

$$AX = \lambda X \ .$$

Έστω ότι v ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή λ. Αφού $\phi(v) = \lambda v$ έπεται ότι

$$C_B(\phi(v)) = C_B(\lambda v) = \lambda C_B(v) \ .$$

Αφού $C_B(\phi(v)) = A^{\phi}_{B,B} C_B(v)$ έπεται ότι

$$A^{\phi}_{B,B} C_B(v) = \lambda C_B(v)$$

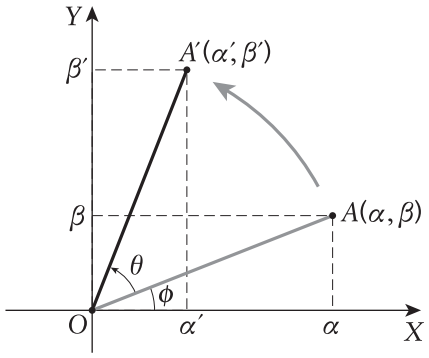
και $X = C_B(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A^{\phi}_{B,B}$ όταν v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ. Αντίστροφα έστω ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα για τον $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Έστω B μία βάση του $\Bbbk^n$ και θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $\phi : V \to V$ έτσι ώστε $A = A^{\phi}_{B,B}$. Βρίσκουμε το διάνυσμα v έτσι ώστε $X = C_B(v)$. Έπεται ότι v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ. Για να βρούμε λοιπόν ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές μίας γραμμικής συνάρτησης $\phi : V \to V$ αρκεί να βρούμε ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές του πίνακα $A^{\phi}_{B,B}$ και αντίστροφα. Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών.

Παραδείγματα 4.1.2.

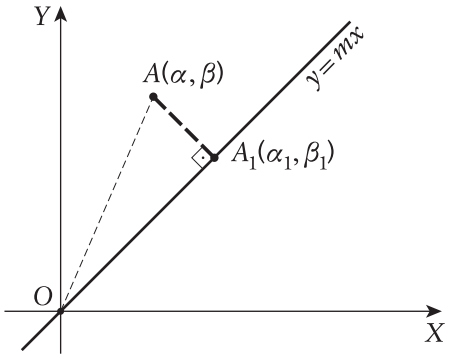
1. Η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$ έχει την ιδιοτιμή 1 και κάθε $v \neq 0 \in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Αντίστοιχα κάθε $X \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα για τον μοναδιαίο πίνακα I_n για την ιδιοτιμή 1 αφού
$$I_n X = X \ .$$

2. Κάθε μη μηδενικό στοιχείο v του V είναι ιδιοδιάνυσμα για τη μηδενική (τετριμμένη) συνάρτηση $\mathbf{0}_V : V \to V$ για την ιδιοτιμή 0 αφού $\mathbf{0}_V(v) = 0$.

3. Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει αριστερόστροφα κατά γωνία $\pi/4$ τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Για το συμπέρασμα αυτό αρκεί να δούμε την γραφική απεικόνιση της συνάρτησης: όταν $v \neq 0$ τότε $f(v)$ και v ορίζουν δύο ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\pi/4$. Άρα δεν υπάρχει λ έτσι ώστε $f(v) = \lambda\, v$.



4. Έστω $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η προβολή στην ευθεία $y = mx$:



Η ευθεία $y = mx$ περνά από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $(1,m)$. Είναι λοιπόν παράλληλη προς το διάνυσμα $(1,m)$ και κάθετη προς το διάνυσμα $(-m,1)$. Από τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης, συμπεραίνουμε ότι f έχει δύο ιδιοτιμές: 1 και 0. Πράγματι αν $v_1 = (1,m)$ τότε τότε $f(v_1) = v_1$ και άρα v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για το 1. Αντίστοιχα αν $v_2 = (-m,1)$ τότε $f(v_2) = 0$ και v_2 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0. Άρα τα ιδιοδιανύσματα της f για την ιδιοτιμή 1 είναι πολλαπλάσια του $v_1 = (1,m)$ ενώ τα ιδιοδιανύσματα της f για την ιδιοτιμή 0 είναι πολλαπλάσια του $v_2 = (-m,1)$. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $D = (v_1, v_2)$ η βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f. Γνωρίζουμε ότι

$$A^f_{B,B} = [C_B(f(e_1))\ C_B(f(e_2))]\ .$$

Αυτό δεν είναι και τόσο απλό παρόλο που στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι δεν είναι και τόσο δύσκολο. Ο πίνακας όμως $A^f_{D,D}$ είναι ιδιαίτερα εύκολο να υπολογισθεί και μπορούμε στην συνέχεια να τον χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τον $A^f_{B,B}$. Πράγματι αφού $f(v_1) = v_1$ και

$f(v_2) = 0$ έπεται ότι $C_D(f(v_1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $C_D(f(v_2)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Άρα

$$A^f_{D,D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω τώρα $S = S_{B \leftarrow D}$. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^f_{B,B} = SA^f_{B,B}S^{-1} = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας $A^f_{B,B}$ είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $A^f_{D,D}$ και είναι διαγωνιοποιήσιμος.

5. Έστω ότι $D = (v_1, \ldots, v_n)$ είναι βάση του $\mathbb{k}^n$ έτσι ώστε για v_i είναι ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής συνάρτησης $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ για $i = 1, \ldots, n$: $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Αφού η i-στη στήλη του $A^f_{D,D}$ είναι ο πίνακας

$$C_D(v_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

έπεται ότι ο πίνακας $A^f_{D,D}$ είναι διαγώνιος:

$$A^f_{D,D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Έστω B άλλη βάση του $\mathbb{k}^n$ και $S = S_{D \leftarrow B}$. Ο πίνακας

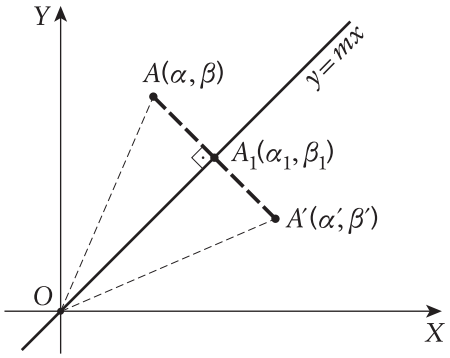
$$A^f_{B,B} = S^{-1}A^f_{D,D}S$$

και $A^f_{B,B}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Αντίστροφα αν $D = (v_1, \ldots, v_n)$ είναι βάση του $\mathbb{k}^n$ και $A^f_{D,D}$ είναι διαγώνιος,

$$A^f_{D,D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

τότε v_i είναι ιδιοδιάνυσμα της f για την ιδιοτιμή λ_i για $i = 1, \ldots, n$.

6. Έστω $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$.



Η f έχει την ιδιοτιμή 1 με ιδιοδιανύσματα τα πολλαπλάσια του $v_1 = (1, m)$, και την ιδιοτιμή -1 με ιδιοδιανύσματα τα πολλαπλάσια του $v_2 = (-m, 1)$. Έτσι ως προς τη βάση $D = (v_1, v_2)$ έχουμε ότι

$$A_{D,D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι ως προς οποιαδήποτε βάση B του $\mathbb{R}^2$ ο πίνακας $A^f_{B,B}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $S = S_{B\leftarrow D}$. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^f_{B,B} = SA^f_{D,D}S^{-1} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix} .$$

7. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x, y) \mapsto (2x + y, 4x + 2y).$$

Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και

$$A^\phi_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\phi(1, -2) = (0, 0) = 0(1, -2)$, δηλ. το 0 είναι ιδιοτιμή και $v_1 = (1, -2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή 0. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\operatorname{Ker}\phi$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή 0. Αφού $\phi(1, 2) = (4, 8) = 4(1, 2)$, το 4 είναι ιδιοτιμή του ϕ και το $v_2 = (1, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

4. Θέτουμε $V_{\mathbf{0}} = S(\{(v_1\})$ και $V_{\mathbf{4}} = S(\{v_2\})$. Τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^2$. Άρα $D = (v_1, v_2)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$. Έτσι $V_{\mathbf{0}} \cap V_{\mathbf{4}} = \{(0,0)\}$ και $V_{\mathbf{0}} + V_{\mathbf{4}} = S(\{v_1, v_2\}) = \mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι

$$A^{\phi}_{D,D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} ,$$

και

$$A^{\phi}_{D,D} = S^{-1} A^{\phi}_{B,B} S, \ \text{ όπου } S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Ο υποχώρος $V_{\mathbf{0}}$ λέγεται **ιδιοχώρος** για την ιδιοτιμή 0 ενώ ο υποχώρος $V_{\mathbf{4}}$ λέγεται **ιδιοχώρος** για την ιδιοτιμή 4.

Αντίστοιχα για τον πίνακα $A = A^{\phi}_{B,B}$ έχουμε ότι

$$X_1 = C_B(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad X_2 = C_B(v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A για τις ιδιοτιμές 0 και 4.

8. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x, y) \mapsto (2x, 3y).$$

Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$A^{\phi}_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και αφού $A^{\phi}_{B,B}$ είναι ήδη διαγώνιος έπεται ότι e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 2 ενώ e_2 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 3. Θέτουμε $V_{\mathbf{2}} = S(\{e_1\})$, $V_{\mathbf{3}} = S(\{e_2\})$. Παρατηρούμε ότι $V_{\mathbf{2}} \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$, $V_{\mathbf{2}} + V_{\mathbf{3}} = \mathbb{R}^2$ και μάλιστα δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε ότι $\phi(V_{\mathbf{2}}) \subset V_{\mathbf{2}}$ ενώ $\phi(V_3) \subset V_{\mathbf{3}}$. Λέμε ότι οι ιδιοχώροι $V_{\mathbf{2}}$, $V_{\mathbf{3}}$ είναι **αναλλοίωτοι** από την δράση της ϕ.

9. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (3\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_3)$. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε

$$A^{\phi}_{B,B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι e_1 και e_2 είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 3 ενώ e_3 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Θέτουμε $V_{\mathbf{3}} = S(\{e_1, e_2\})$, $V_{\mathbf{1}} =$

$S(\{e_3\})$. Παρατηρούμε ότι $V_{\mathbf{3}} \cap V_{\mathbf{1}} = \{(0,0,0)\}$, $V_{\mathbf{3}} + V_{\mathbf{1}} = \mathbb{R}^3$. Όλα τα μη μηδενικά διανύσματα του ιδιοχώρου $V_{\mathbf{3}}$ είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 3 ενώ όλα τα μη μηδενικά διανύσματα του ιδιοχώρου $V_{\mathbf{1}}$ είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 1.

10. Έστω $\phi : V \to V$ μία γραμμική συνάρτηση του V. Έστω ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του ϕ. Υπάρχει λοιπόν $0 \neq v \in V$ έτσι ώστε $\phi(v) = 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό του πυρήνα μίας συνάρτησης αυτό σημαίνει ότι $v \in \operatorname{Ker}\phi$ και ότι $\operatorname{Ker}\phi \neq \{0\}$. Αντίστροφα, αν $v \in \operatorname{Ker}\phi$ και $v \neq 0$, τότε $\phi(v) = 0$. Άρα το v είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Καταλήγουμε έτσι ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν η ϕ δεν είναι μονομορφισμός.

11. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και $A = A^T$, δηλ. A είναι συμμετρικός. Έστω ότι λ ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$. Θα αποδείξουμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός αρκεί να δείξουμε ότι είναι ίσος με τον συζυγή του. Θα δείξουμε λοιπόν ότι $\lambda = \overline{\lambda}$.

    Έστω ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ. Τότε $X \neq 0$ και $AX = \lambda X$. Τα στοιχεία του A είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα $A = \overline{A}$. Έπεται ότι

    $$\overline{A\,X} = \overline{\lambda X} \Rightarrow \overline{A}\;\overline{X} = \overline{\lambda}\;\overline{X} \Rightarrow A\;\overline{X} = \overline{\lambda}\;\overline{X}\ .$$

    Θα υπολογίσουμε τώρα το γινόμενο $(AX)^T\overline{X}$ με δύο τρόπους. Αφού X είναι ιδιοδιάνυσμα του A έχουμε ότι

    $$(AX)^T\overline{X} = (\lambda X)^T\overline{X} = \lambda(X^T\overline{X})\ .$$

    Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αναστρόφων πινάκων έχουμε ότι

    $$(AX)^T\overline{X} = X^TA^T\overline{X} = X^TA\overline{X} = X^T(A\overline{X}) = X^T(\overline{\lambda}\;\overline{X}) = \overline{\lambda}(X^T\overline{X})\ .$$

    Άρα

    $$\lambda(X^T\overline{X}) = \overline{\lambda}(X^T\overline{X})\ .$$

    Όμως $X^T\overline{X} \neq 0$ αφού $X \neq 0$. Άρα

    $$\lambda = \overline{\lambda}$$

    και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα για τον A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow AX - \lambda I_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Αφού το σύστημα $(A - \lambda I_n)X = 0$ έχει μη μηδενική λύση έπεται ότι ο πίνακας $A - \lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Οδηγούμαστε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα.

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε τα ιδιοδιανύσματα του A, που αντιστοιχούν στο λ, είναι οι μη μηδενικές λύσεις του $A - \lambda I_n = 0$.*

Ο **ιδιοχώρος** $V_\lambda(A)$ του A για την ιδιοτιμή λ είναι ο

$$V_\lambda(A) = \mathrm{null}(A - \lambda I_n)\ .$$

Παρατηρούμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε

$$\mathrm{dim} V_\lambda(A) \geq 1\ .$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω οι ιδιοτιμές του A μηδενίζουν την ορίζουσα $\det(A - xI_n)$. Εάν υπολογίσουμε την ορίζουσα του

$$A - xI_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - x \end{bmatrix}$$

θα βρούμε ένα πολυώνυμο στο $\mathbb{k}[x]$ βαθμού n. Το πολυώνυμο $|A - xI_n|$ λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A και συμβολίζεται με $P_A(x)$. Οι ιδιοτιμές του A μηδενίζουν το $P_A(x)$ και είναι οι ρίζες του. Αφού ο βαθμός του $P_A(x)$ είναι n έπεται ότι $P_A(x)$ έχει το πολύ n ρίζες στο $\mathbb{R}$ και ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν το πολύ n πλήθους ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ και ακριβώς n ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 4.1.4. *Έστω ότι $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε*

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\ .$$

Τότε $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$ όπου $\mathrm{Tr}(A) = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}$ και $\alpha_0 = \det A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$P_A(x) = |A - xI_n|\ .$$

Το δεύτερο σκέλος προκύπτει άμεσα αφού

$$P_A(0) = \alpha_0 = |A - 0I_n| = \det A.$$

Για το πρώτο σκέλος παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς n πλήθους όροι που περιέχουν το x^{n-1}, οι

$$\alpha_{11}(-x)^{n-1}, \ldots, \alpha_{nn}(-x)^{n-1}.$$

Άρα

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A).$$

□

Παραδείγματα 4.1.5.

1. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Τότε $P_A(x)$ έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$ και A έχει n ιδιοτιμές: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Έπεται ότι

$$P_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$$

και άρα $P_A(0) = (-1)^n(0 - \lambda_1)\cdots(0 - \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Επομένως $detA = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3-a & 3b & c \\ c & a & i \\ i & c+i & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω ότι $\det A = 2$ και ότι μία ιδιοτιμή του A είναι το 2. Θα βρούμε τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του A.

Έστω ότι $2, \lambda_1, _2$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Γνωρίζουμε ότι $2 = \det A = 2\lambda_1\lambda_2$ ενώ $2 = \operatorname{Tr} A = 2 + \lambda_1 + \lambda_2$. Έπεται ότι $\lambda_1 = -\lambda_2$ και $\lambda_1^2 = -1$. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $2, \pm i$.

3. Έστω ότι

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Τότε το 0 είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $P_A(0) = 0$ αν και μόνο αν $\alpha_0 = 0$. Επομένως:

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι διάφορος του μηδενός.

Ορίσαμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα. Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική για να μπορέσουμε να ορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μίας γραμμικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.1.6. *Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Έστω

$$B = S^{-1} A\, S\ .$$

Θα δείξουμε ότι $|B - xI_n| = |A - xI_n|$. Πράγματι

$$|B - xI_n| = |S^{-1} A\, S - xI_n| = |S^{-1} A\, S - S^{-1} x I_n S| =$$

$$= |S^{-1}(A - xI_n)S| = |S^{-1}||A - xI_n||S| = |A - xI_n|$$

□

Πριν ορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μίας γραμμικής συνάρτησης σημειώνουμε τη παρακάτω παρατήρηση.

Πόρισμα 4.1.7. *Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει συνδυάζοντας την Πρόταση 4.1.6 και την Πρόταση 4.1.4. □

Έστω τώρα $V = \mathbb{k}^n$, $\phi :\ V \to V$ γραμμική συνάρτηση, B, D δύο βάσεις του V. Οι πίνακες $A^f_{B,B}$ και $A^f_{D,D}$ είναι όμοιοι και έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή λ τότε $C_B(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^\phi_{B,B}$ για την ιδιοτιμή λ ενώ $C_D(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^\phi_{D,D}$ για την ιδιοτιμή λ. Ορίζουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $P_\phi(x)$ της ϕ να είναι

$$P_\phi(x) = P_{A^f_{B,B}}(x)\ ,$$

όπου B μία οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V. Ορίζουμε επίσης τον **ιδιοχώρο** $V_\lambda(\phi)$ να είναι ο χώρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα της ϕ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. Η ϕ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμη** αν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση B του V, ώστε ο πίνακας A της ϕ ως προς την B να είναι διαγώνιος. Μία γραμμική συνάρτηση $\phi :\ V \to V$ (αντίστοιχα ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$) είναι διαγωνιοποιήσιμη(ος) αν και μόνο αν η ϕ (αντίστοιχα ο πίνακας A) έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Περιγράφουμε τα βήματα για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μίας γραμμικής συνάρτησης $\phi : V \to V$ και γενικότερα ενός $n \times n$ πίνακα A. Παρατηρούμε ότι αν B είναι η κανονική βάση του V τότε

$$V_\lambda(\phi) = V_\lambda(A^\phi_{B,B})\ .$$

Αλγόριθμος υπολογισμού ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοχώρων της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$.

- **Βήμα 1** Υπολογίζουμε τον πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ της ϕ ως προς τη κανονική βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του $\Bbbk^n$.

- **Βήμα 2** Βρίσκουμε $P_A(x) = P_\phi(x)$ υπολογίζοντας την ορίζουσα
$$|A - xI_n|.$$

- **Βήμα 3** Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A και της ϕ υπολογίζοντας τις ρίζες του $P_A(x)$.

- **Βήμα 4** Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του ϕ, επιλύουμε το ομογενές σύστημα
$$(A - \lambda I_n)X = \mathbf{O}\ .$$
Οι λύσεις δίνουν τον ιδιοχώρο $V_\lambda(\phi) = (A - \lambda I_n)$. Τα ιδιοδιανύσματα του A και της ϕ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα του $V_\lambda(\phi)$.

Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν θα δούμε τον αλγόριθμο στη πράξη. Πρώτα αναφέρουμε μία ιδιότητα που είναι ιδιαίτερη χρήσιμη όταν θέλουμε να αποφασίσουμε για το αν ένας πίνακας ή μία γραμμική συνάρτηση είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

Πρόταση 4.1.8. *Έστω $\phi : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Αν w_1, $w_2, \ldots,$ w_κ είναι ιδιοδιανύσματα του V που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_1,$\lambda_2, \ldots,$ λ_κ, τότε $w_1, w_2, \ldots, w_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη όταν έχουμε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα w_1, w_2. Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι w_1, w_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η απόδειξη της γενικής περίπτωση γίνεται με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έστω
$$\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = 0 \tag{4.2}$$
μία γραμμική σχέση των w_1, w_2, όπου $\mu_1, \mu_2 \in \Bbbk$. Τότε
$$\phi(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = 0 \Rightarrow \mu_1 \phi(w_1) + \mu_2 \phi(w_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\mu_1 \lambda_1 w_1 + \mu_2 \lambda_2 w_2 = 0. \tag{4.3}$$
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (4.2) με λ_2 και την αφαιρούμε από τη σχέση (4.3). Έτσι
$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_2) w_1 = 0\ .$$
Όμως w_1 είναι ιδιοδιάνυσμα και άρα $w_1 \neq 0$. Έπεται ότι $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$ άρα $\mu_1 = 0$. Αντικαθιστούμε στην σχέση (4.2) και με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι $\mu_2 = 0$. $\square$

Τονίζουμε ότι σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση αν $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $1 \leq i, j \leq k$ τότε όχι μόνο $V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{0\}$ αλλά γενικότερα

$$\big(V_{\lambda_1}(A) + \cdots + V_{\lambda_{i-1}}(A) + V_{\lambda_{i+1}}(A) + \cdots V_{\lambda_k}(A)\big) \cap V_{\lambda_i}(A) = \{0\} \ .$$

Έτσι αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και

$$\dim(V_{\lambda_1}(A)) + \cdots + \dim(V_{\lambda_k}(A)) = n$$

τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Μία ιδιαίτερη περίπτωση είναι όταν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ έχει n **διακριτές** ιδιοτιμές: τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω και τον αλγόριθμο εύρεσης ιδιοδιανυσμάτων στα παρακάτω παραδείγματα. Τονίζουμε και πάλι ότι σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ παραγοντοποιείται πλήρως στο $\mathbb{C}$ ως γινόμενο γραμμικών παραγόντων και έτσι A έχει n μιγαδικές ιδιοτιμές, πιθανόν κάποιες από αυτές επαναλαμβανόμενες.

Παραδείγματα 4.1.9.

- Για να βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$ παίρνουμε τον πίνακα της ϕ ως προς τη κανονική βάση B. Αφού

$$A^{\phi}_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

  έπεται ότι

$$P_{\phi}(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 4 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x = x(x-4) \ ,$$

  και οι ιδιοτιμές είναι 0 και 4. Η ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμη.

- Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_n \end{bmatrix} \ .$$

  Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι το $(\alpha_1 - x) \cdots (\alpha_n - x)$. Άρα τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Ακόμη παρατηρούμε ότι $V_{a_i} = S(\{e_i\})$.

- Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (x, y, z) \mapsto 4(x, y, z)$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \,,$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $P_A(x) = (4 - x)^3$. Έτσι η μόνη ιδιοτιμή είναι το 4 και αφού $A - 4I_3 = \mathbf{O}$ έπεται ότι $V_{\mathbf{4}}(\phi) = \mathbb{R}^3$.

- Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & a_{1n} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \,.$$

ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Αν $a_{ii} \neq a_{jj}$ για $i \neq j$ τότε A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Αντίστοιχα, αν A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι διακριτά τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

- Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \,.$$

Τότε $P_A(x) = (4 - x)^3$ και η μόνη ιδιοτιμή του A είναι το 4. Επίσης

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $V_{\mathbf{4}}(A) = \{(s, t, 0) : \ s, t \in \mathbb{R}\} = S(\{e_1, e_2\})$. Ο πίνακας A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος γιατί δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

- Έστω A $n \times n$ πίνακας. Αφού

$$\det(A - xI_n) = \det(A - xI_n)^T = \det(A^T - xI_n).$$

έπεται ότι οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

- Θα προσδιορίσουμε τους ιδιοχώρους της γραμμικής συνάρτησης

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y).$$

Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ είναι το

$$P_\phi(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του ϕ είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$. Για να βρούμε τον $V_{\mathbf{1}}(\phi)$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - 1I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Φέρνουμε τον πίνακα $A - 1I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος, άρα και ο ιδιοχώρος του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, είναι το

$$V_{\mathbf{1}}(\phi) = \{ \ (-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{k}\} = S(\{(-1, 1)\}) = S(\{v\}),$$

όπου $v = (-1, 1)$.

Για το χώρο $V_{\mathbf{3}}(\phi)$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - 3I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Φέρνουμε τον πίνακα $A - 3I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

άρα

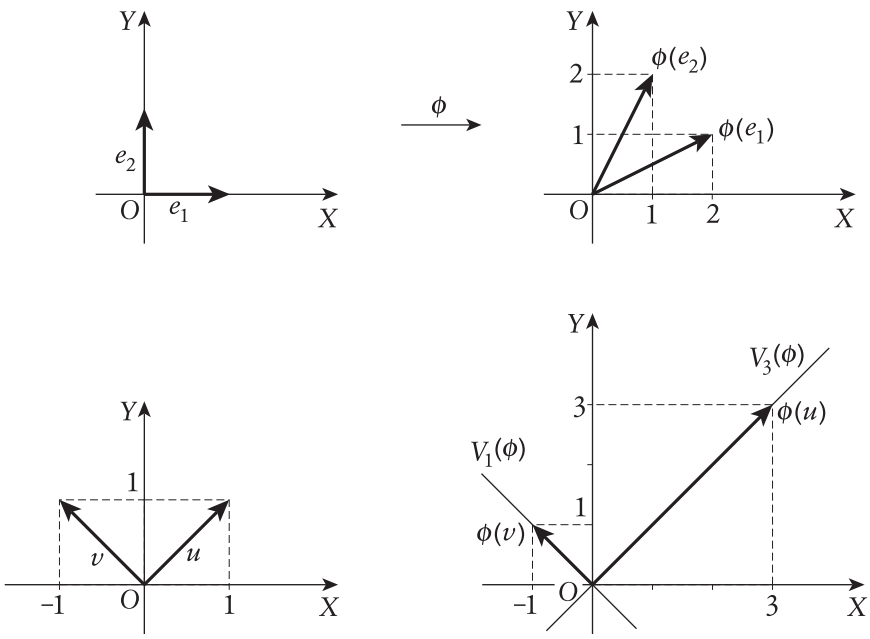
$$V_{\mathbf{3}}(\phi) = \{ \ (x_2, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{k}\} = S(\{(1, 1)\}) = S(\{u\}),$$

όπου $u = (1, 1)$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\{v, u\}$ είναι βάση για τον $\mathbb{R}^2$ και ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και όμοιος με τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε ότι ενώ e_1, e_2 σχηματίζουν ορθή γωνία οι εικόνες τους $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$ σχηματίζουν οξεία γωνία. Παρατηρούμε επίσης ότι η ορθή γωνία των v, u διατηρείται και για τα διανύσματα $\phi(v)$, $\phi(u)$.



- Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x + x^2 - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Για να βρούμε τον ιδιοχώρο V_{λ_1} λύνουμε το σύστημα $(A - \lambda_1 I_2)X = \mathbf{O}$. Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $A - \lambda_1 I_2$ είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$V_{\lambda_1}(A) = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2, x_2) \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\} = S(\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)\}) = S(\{(1+\sqrt{5}, 2)\}).$$

Αντίστοιχα

$$V_{\lambda_2}(A) = S(\{(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)\}) = S(\{(1-\sqrt{5}, 2)\}).$$

Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} .$$

- Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \ .$$

Το πολυώνυμο $P_A(x)$ δεν έχει ρίζες στον $\mathbb{R}$ και ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στον $\mathbb{R}$. Το πολυώνυμο $P_A(x)$ έχει ρίζες το $\pm i$ στον $\mathbb{C}$ και άρα ο A έχει ιδιοτιμές τους μιγαδικούς αριθμούς $\pm i$ και είναι διαγωνιοποιήσιμος στον $\mathbb{C}$. Οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$V_{\mathbf{i}}(A) = \{ \ (ix_2, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{C}\} = S(\{(i, 1)\}),$$

και

$$V_{-\mathbf{i}}(A) = \{ \ (ix_2, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{C}\} = S(\{(-i, 1)\}).$$

- Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι το

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -2 & 1-x & 0 \\ -2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)[(4-x)(1-x)+2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (1-x)(x-2)(x-3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Αφού ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος. Πράγματι, οι ιδιοχώροι του A είναι οι

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{1}} &= \{\ (0,\kappa,0):\ \kappa \in \mathbb{R}\} &&= S(\{(0,1,0)\}), \\ V_{\mathbf{2}} &= \{\ (-\tfrac{1}{2}\kappa,\kappa,\kappa):\ \kappa \in \mathbb{R}\} &&= S(\{(-\tfrac{1}{2},1,1)\}), \\ V_{\mathbf{3}} &= \{\ (-\kappa,\kappa,\kappa):\ \kappa \in \mathbb{R}\} &&= S(\{(-1,1,1)\}), \end{aligned}$$

Τα ιδιοδιανύσματα

$$\varepsilon_1 = (0,1,0), \ \ \varepsilon_2 = (-\frac{1}{2},1,1), \ \ \varepsilon_3 = (-1,1,1)$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω $D = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

και

$$E = S^{-1} A\, S$$

όπου

$$S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής συνάρτησης $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(a,b,c) = (3a+2b+2c, a+4b+2c, -a-2b)$. Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και έστω

$$A = A^f_{B,B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ είναι το

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 2 \\ -1 & -2 & -x \end{vmatrix} = 12 - 16x + 7x^2 - x^3 = (2-x)^2(3-x),$$

και οι ιδιοτιμές του A είναι το 2 και το 3. Φέρνουμε τον πίνακα $A - 2I_3$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος $(A - 2I_3)X = \mathbf{O}$ είναι το

$$V_{\mathbf{2}}(A) = \{\ (-2x_2 - 2x_3, x_2, x_3) :\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{\ t(-2,1,0) + s(-2,0,1) :\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Όμοια φέρνουμε τον πίνακα $A - 3I_3$ ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 είναι ο

$$V_{\mathbf{3}}(A) = S(\{(-1,-1,1)\}).$$

Αφού $V_{\mathbf{2}}(A) \cap V_{\mathbf{3}}(A) = \{0\}$ και

$$\dim(V_{\mathbf{2}}(A)) + \dim(V_{\mathbf{3}}(A)) = 3$$

έπεται ότι

$$V_{\mathbf{2}}(A) + V_{\mathbf{3}}(A) = \mathbb{R}^3\ .$$

Έτσι αν $v_1 = (-2,1,0)$, $v_2 = (-2,0,1)$, (ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 2) και $v_3 = (-1,-1,1)$ (ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 3), έπεται ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι βάση για το $\mathbb{R}^3$ και η f είναι διαγωνιοποιήσιμη. Έστω $D = (v_1, v_2, v_3)$, $E = (v_2, v_3, v_1)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}^3$. Τότε

$$A^f_{D,D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^f_{E,E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο $A^f_{B,B}$ είναι όμοιος και με τους δύο αυτούς πίνακες.

- Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ είναι

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(x^2+1).$$

Παρατηρούμε ότι η μοναδική ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{R}$ είναι το 2 ενώ στο $\mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του A είναι το 2 και το $\pm i$. Φέρνουμε τον πίνακα $A - 2I_4$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι στον $\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$V_{\mathbf{2}}(A) = \{\ (x_1, 0, 0, x_4) :\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} = S(\{(1,0,0,0), (0,0,0,1)\}).$$

Ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, αφού δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^4$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

Στο $\mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$V_2(A) = \{\ (x_1, 0, 0, x_4) :\ x_1, x_4 \in \mathbb{C}\} = S(\{(1,0,0,0), (0,0,0,1)\}).$$

Για να βρούμε τον ιδιοχώρο $V_i(A)$ παρατηρούμε ότι μετά από στοιχειώδεις πράξεις γραμμών έχουμε

$$A - iI_4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2-i}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$V_i(A) = \{\ x_3(0, \frac{-2+i}{5}, 1, 0)\ :\ t \in \mathbb{C}\} = \{k(0, -2+i, 5, 0) :\ k \in \mathbb{C}\}.$$

Αντίστοιχα
$$V_{-i}(A) = \{\ t(0, -2-i, 5, 0)\ :\ t \in \mathbb{C}\}.$$
Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στον C: τα ιδιοδιανύσματα
$$(1,0,0,0),\ (0,0,0,1),\ (0,-2+i,5,0),\ (0,-2-i,5,0)$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση για το $\mathbb{C}^4$. Ο πίνακας A στον $\mathbb{C}$ είναι όμοιος με τον πίνακα
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

- Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα για να να υπολογίσουμε αποτελεσματικά δυνάμεις του A. Έστω λοιπόν ότι
$$S^{-1}A\,S = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & d_n \end{bmatrix},$$
άρα
$$A = S\ D\ S^{-1}.$$
Έστω ότι m είναι θετικός ακέραιος. Τότε
$$D^m = \begin{bmatrix} d_1^m & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & d_n^m \end{bmatrix}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\ .$$
Άρα
$$A^m = (S\ D\ S^{-1})^m = (S\ D\ S^{-1})(S\ D\ S^{-1})\cdots(S\ D\ S^{-1}) = S\ D^m S^{-1}.$$
Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $d_1 \cdots d_n \neq 0$. Άρα έχει νόημα ο πίνακας
$$D^{-m} = \begin{bmatrix} d_1^{-m} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & d_n^{-m} \end{bmatrix}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$
και
$$A^{-m} = (A^m)^{-1} = (S\ D^m S^{-1})^{-1} = S\ D^{-m} S^{-1}.$$

- Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές ± 1 και $\pm i$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

$$A^{4k} = I_n \ .$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι αφού A είναι διαγωνιοποιήσιμος,

$$A = S\ D\ S^{-1},$$

όπου οι τιμές της κυρίας διαγωνίου του D είναι οι ιδιοτιμές ± 1 και $\pm i$, (χωρίς να ξέρουμε πόσες φορές η με ποιά σειρά εμφανίζονται). Γνωρίζουμε επίσης από το προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$A^{4k} = S\ D^{4k} S^{-1}, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως $1^{4k} = (-1)^{4k} = i^{4k} = (-i)^{4k} = 1$. Άρα $D^{4k} = I_n$ και

$$A^{4k} = S\ D^{4k} S^{-1} = S\ I_n S^{-1} = S\ S^{-1} = I_n \ .$$

- Έστω ότι $\phi : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ είναι ισομορφισμός. Αν λ είναι ιδιοτιμή της ϕ και v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για το λ τότε θα δούμε ότι λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της ϕ^{-1} και ότι v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ^{-1} για λ^{-1}. Πράγματι έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$. Τότε $\phi(v) = \lambda v$ και

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\lambda^{-1}\lambda v) = \lambda^{-1}\phi^{-1}(\phi(v)) = \lambda^{-1} v,$$

δηλ. το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του αυτομορφισμού ϕ^{-1} με ιδιοδιάνυσμα το v.

- Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(x, y) = (y, -2x + 3y)$. Οι ιδιοτιμές της ϕ είναι το 2 και το 3, ενώ ο $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{2}(3x - y, 2x)$, έχει ιδιοτιμές $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$.

Ένα από τα πιό σημαντικά και χρήσιμα θεωρήματα που αφορούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα είναι το επόμενο θεώρημα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.1.10. (Cayley-Hamilton) *Έστω $A \in M_n(\Bbbk)$ και*

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Τότε

$$P_A(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = \mathbf{O}.$$

Παραδείγματα 4.1.11.

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$
$P_A(x) = -x^3+2x-1$ και σύμφωνα με το Θεώρημα των Cayley-Hamilton
$$-A^3 + 2A - I_3 = \mathbf{O}$$
Πράγματι εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει τη παραπάνω ισότητα κάνοντας τις πράξεις. Θα υπολογίσουμε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $P_A(0) = -1 \neq 0$ και A είναι αντιστρέψιμος. Αφού $-A^3+2A-I_3 = \mathbf{O}$ έπεται ότι $-A^3+2A = I_3$ και άρα $A(-A^2 + 2I_3) = I_3$. Επομένως
$$A^{-1} = -A^2 + 2I_3.$$

2. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$-πίνακας και $P_A(x) = (-1)^n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι
$$P_A(A) = \mathbf{O} \Rightarrow$$
$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = \mathbf{O} \Rightarrow$$
$$-(-1)^n A^n = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n \Rightarrow$$
$$A^n = (-1)^{n+1}\alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_1 A + (-1)^{n+1}\alpha_0 I_n \qquad (4.4)$$
Έτσι βλέπουμε ότι ο πίνακας A^n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων A^κ, $0 \leq \kappa < n$. Επίσης πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της ισότητας 4.4 με A βλέπουμε ότι
$$A^{n+1} = (-1)^{n+1}\alpha_{n-1}A^n + \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_1 A^2 + (-1)^{n+1}\alpha_0 A \ .$$
Αντικαθιστώντας τώρα A^n με το δεξί μέρος της 4.4 προκύπτει ότι
$$A^{n+1} = (\alpha_{n-1}^2 + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2})A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_0 I_n \ .$$
Άρα ο πίνακας A^{n+1} εκφράζεται επίσης ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων A^κ, $0 \leq \kappa < n$. Γενικότερα, όλες οι δυνάμεις A^m όπου $m \geq n$ μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των δυνάμεων A^κ, $0 \leq \kappa < n$.

Αν $\alpha_0 \neq 0$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A = -\alpha_0 I_n \ .$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το A από το αριστερό μέρος της παραπάνω ισότητας βρίσκουμε ότι

$$A\big((-1)^n A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n\big) = -\alpha_0 I_n,$$

δηλ.

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\,((-1)^n A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n).$$

Όπως και προηγουμένως, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος όλες οι δυνάμεις A^m όπου $m \in \mathbb{Z}$ μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των δυνάμεων A^κ, $0 \leq \kappa < n$.

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\det \begin{bmatrix} -x & 0 & i \\ i & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{bmatrix} = (-x)(-x)^2 - i \cdot i = -x^3 + 1.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Cayley-Hamilton $-A^3 + I_3 = \mathbf{O}$ άρα $A^3 = I_3$. Επομένως για $\kappa \in \mathbb{N}$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις

$$\begin{cases} A^{3\kappa} = (A^3)^\kappa = I_3^{\,\kappa} = I_3 \\ A^{3\kappa+1} = (A^3)^\kappa A = A \\ A^{3\kappa+2} = (A^3)^\kappa A^2 = A^2 \end{cases}$$

Έτσι οι διακεκριμένες δυνάμεις του πίνακα A είναι οι I_3, A, A^2. Εφόσον ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι $1 \neq 0$ έπεται ότι A είναι αντιστρέψιμος. Αφού $A^3 = I_3$ έχουμε ότι $A\,A^2 = I_3 = A^2 A$, άρα $A^{-1} = A^2$.

Ασκήσεις ενότητας 4.1

1. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει τα διανύσματα αριστερόστροφα κατά γωνία π. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ϕ. Είναι η ϕ διαγωνιοποιήσιμη;

2. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που αντικατοπτρίζει τα διανύσματα στο επίπεδο $y = 0$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ϕ. Είναι η ϕ διαγωνιοποιήσιμη;

3. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω γραμμικών συνάρτησεων

   i) $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 4y, 2x + 3y)$.

   ii) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (a, b, c) \mapsto (b, c, a)$.

   iii) $f : R^3 \to R^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

4. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix},$$

   $$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Έστω ότι $\phi : V \to V$ μία γραμμική συνάρτηση με την ιδιότητα $\phi^2 = \phi$. Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές ιδιοτιμές του ϕ είναι το 0 ή το 1.

6. Έστω ότι $D = P^{-1}A\ P$. Έστω ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Να αποδείξετε ότι $P^{-1}X$ είναι ιδιοδιάνυσμα του D που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

7. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, λ μία ιδιοτιμή του A και X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Να αποδείξετε ότι το $\lambda + k$ είναι μία ιδιοτιμή του $A + kI_n$ και ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του $A + kI_n$. Επίσης να αποδείξετε ότι το λ^m είναι μία ιδιοτιμή του A^m και ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του A^m που αντιστοιχεί στο λ^m.

8. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και λ είναι μία ιδιοτιμή του A. Να αποδείξετε ότι το $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $3A^2 - A + 2I_n$.

9. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{bmatrix} .$$
Αν $\det A = 8$ και μία ιδιοτιμή του A είναι το 2 να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές.

10. Να υπολογίσετε για ποιές τιμές των a, b διαγωνιοποιείται ο πίνακας
$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

11. Να εξετάσετε αν ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
είναι διαγωνιοποιήσιμος.

12. Να εξετάσετε αν ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & \\ 2 & \end{bmatrix}$$
είναι διαγωνιοποιήσιμος.

13. Να δείξετε ότι ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
είναι διαγωνιοποιήσιμος.

14. Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{100}, όπου
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Να εξετάσετε αν είναι διαγωνιοποιήσιμοι οι πίνακες
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Να δείξετε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ τότε $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του $\overline{A}$ και του $\overline{A}^T$.

17. Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το
$$x^4 - 2x^3 + x + 4.$$
Να υπολογίσετε το μέγεθος του A και να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A.

18. Με εφαρμογή του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$
και να γράψετε τον A^4 ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, A, A^2.

4.2 Ορθογώνιοι πίνακες και εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Θυμίζουμε ότι ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός αφού ισχύει ότι
$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A\ .$$
Ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνιος** αν
$$A^T A = I_n \quad \text{ή ισοδύναμα αν} \quad A^{-1} = A^T.$$

Παραδείγματα 4.2.1.

1. Ο I_n είναι ορθογώνιος πίνακας.

2. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$
Ο A είναι ορθογώνιος πίνακας αφού πολλαπλασιάζοντας με τον A^T μπορεί να ελεχθεί ότι
$$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως συνδέεται η έννοια του ορθογώνιου πίνακα με το εσωτερικό γινόμενο. Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** στο $\mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ (\beta_1, \ldots, \beta_n)\rangle\ = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n\ .$$

Έστω ότι $v, u, w \in \mathbb{R}^n$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

- $\langle v, v\rangle\ = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \geq 0$ και $\langle v, v\rangle = 0$ αν και μόνο αν $v = 0$.
- $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$
- $\langle \kappa v + \lambda w, u\rangle = \kappa\langle v, u\rangle + \lambda\langle w, u\rangle$,
- $\langle v, \kappa u + \lambda w\rangle\ = \kappa\langle v, u\rangle + \lambda\langle v, w\rangle$.

Έστω $B = (e_1, \ldots, e_n)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$C_B(u)^T C_B(v) = C_B(v)^T C_B(u) = [\ \langle v, u\rangle\ ]\ .$$

Για συντομογραφία ταυτίζουμε το διάνυσμα v με τη στήλη $C_B(v)$ και γράφουμε

$$\langle v, u\rangle = v^T u\ . \tag{4.5}$$

Το **μήκος** του v συμβολίζεται $\|v\|$ και είναι ίσο με $\sqrt{\langle v, v\rangle}$. Η **απόσταση** δύο στοιχείων $v, u \in V$ είναι το μήκος του στοιχείου $v - u$ του V και συμβολίζεται $d(v, u)$ δηλ. $d(v, u) = \|u - v\|$. Η παρακάτω ανισότητα είναι σημαντική:

$$-\|u\|\|v\| \leq \langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|\ .$$

Έτσι ισχύει ότι

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1\ .$$

Αν v, $u \neq 0$ τότε **γωνία** των v και u ορίζεται η γωνία θ για την οποία $0 \leq \theta \leq \pi$ και

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\ .$$

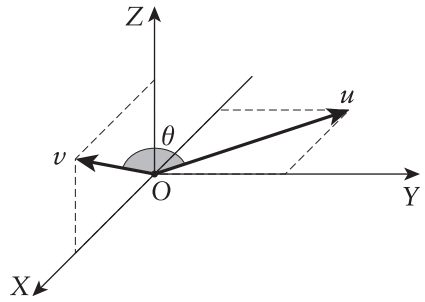
Δύο διανύσματα v, u λέγονται **ορθογώνια** αν $\langle v, u\rangle = 0$.

Παραδείγματα 4.2.2.

1. Έστω $v = (1, 0, 1)$, $u = (-1, 1, 0)$. Τότε

$$\cos\theta = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\|u\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.



2. Έστω $B = (e_1, \ldots, e_n)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε
$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ 1, & \text{για } i = j \end{cases} \qquad \square$$
και τα e_i, e_j είναι ανά δύο ορθογώνια.

3. Η διατεταγμένη βάση $(v_1, \ldots, v_n)$ του διανυσματικού χώρου $V \subset \mathbb{R}^m$ λέγεται **ορθογώνια** αν
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{όταν} \quad i \neq j.$$
Η βάση $(v_1, \ldots, v_n)$ του V λέγεται **ορθοκανονική** αν είναι ορθογώνια και αν $\|v_i\| = 1$, για όλα τα $i \in I$. Κάθε ορθογώνια βάση του V γίνεται ορθοκανονική αν *κανονικοποιήσουμε* τα στοιχεία της, δηλ. αν διαιρέσουμε με το μήκος τους.

4. Η βάση $B = (e_1, \ldots, e_n)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθοκανονική αφού $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ όταν $i \neq j$ και $\|e_i\| = 1$, για $i = 1, \ldots, n$.

5. Έστω $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$. Αφού $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ και v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι $D = (v_1, v_2)$ είναι ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^2$. Το μήκος και των δύο διανυσμάτων της βάσης είναι $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{2}$. Η βάση D δεν είναι ορθοκανονική. Θέτουμε $w_1 = 1/\sqrt{2}(1, 1)$, $w_2 = 1/\sqrt{2}(1, -1)$. Το σύνολο (w_1, w_2) είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

6. Έστω $v_1 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$, $v_2 = 1/\sqrt{6}(-2, 1, 1)$, $v_3 = 1/\sqrt{2}(0, -1, 1)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ανά δύο τα διανύσματα είναι ορθογώνια. Θα δείξουμε ότι v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος αφού ο A είναι ορθογώνιος όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.2.2. Επίσης $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ Έπεται ότι το σύνολο (v_1, v_2, v_3) είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

7. Έστω ότι $v_1, \ldots, v_t$ είναι ανά δύο ορθογώνια. Θα δείξουμε ότι $v_1, \ldots, v_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι έστω ότι

$$k_1 v_1 + \cdots + k_t v_t = 0 \tag{4.6}$$

Θα δείξουμε ότι οι συντελεστές $k_1, \ldots, k_t$ είναι 0. Θα πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο και των δύο πλευρών της σχέσης 4.6 με το διάνυσμα v_1. Αφού

$$\langle v_1, k_1 v_1 + \cdots + k_t v_t \rangle = \langle v_1, 0 \rangle = 0$$

έπεται ότι

$$\langle v_1, k_1 v_1 \rangle + \cdots + \langle v_1, k_t v_t \rangle = 0$$

και

$$k_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \cdots + k_t \langle v_1, v_t \rangle = 0 \ ,$$

άρα

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 + \cdots + k_t \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \ . \tag{4.7}$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να επαναλάβουμε τα παραπάνω παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με κάθε ένα από τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_t$ και να δείξουμε ότι $k_1 = \cdots = k_t = 0$.

8. Έστω (v_1, v_2) ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^2$. Το παραλληλόγραμμο P που ορίζεται από τα δύο αυτά διανύσματα είναι ορθογώνιο. Εάν (v_1, v_2) είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε το P είναι τετράγωνο και έχει εμβαδό ίσο με 1.

9. Έστω B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική συνάρτηση, και $A = A^{\phi}_{B,B}$. Θεωρούμε τον πίνακα A^T και παίρνουμε $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τη γραμμική συνάρτηση με πίνακα $A^{\phi^*}_{B,B} = A^T$. Θα δείξουμε ότι

$$\langle \phi(v), w \rangle = \langle v, \phi^*(w) \rangle$$

Πράγματι σύμφωνα με τον τύπο 4.5 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\phi(v)^T w = v^T \phi^*(w) \ .$$

Έχουμε ότι $C_B(\phi(v)) = A\ C_B(v)$ και $C_B(\phi^*(w)) = A^T C_B(w)$. Άρα

$$(A\ C_B(v))^T C_B(w) = (C_B(v)^T A^T) C_B(w) = C_B(v)^T (A^T C_B(w))$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τα διανύσματα v_i έτσι ώστε

$$A = \begin{bmatrix} C_B(v_1) & \dots & C_B(v_n) \end{bmatrix} .$$

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι

$$A^T\ A = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} .$$

Άρα για να είναι $D = (v_1, \dots, v_n)$ **ορθογώνια βάση** του $\mathbb{R}^n$ θα πρέπει $A^T A$ να είναι **διαγώνιος** πίνακας ενώ για να είναι D **ορθοκανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$ θα πρέπει $A^T A = I_n$ και A να είναι **ορθογώνιος** πίνακας.

Παραδείγματα 4.2.3.

1. Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι $\{w_1, w_2\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ όπου $w_1 = 1/\sqrt{2}(1,1)$, $w_2 = 1/\sqrt{2}(1,-1)$. Άρα ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

   είναι ορθογώνιος. Αφού $A^T = A$ έπεται ότι

$$A^{-1} = A^T = A .$$

   Παρατηρούμε επίσης ότι $\det A = \det(A^T) = 1$.

2. Έστω A ορθογώνιος πίνακας. Αφού $A^T\ A = I_n$ έπεται ότι

$$\det A^T\ A = \det I_n = 1 \Rightarrow \det A^T \det A = 1 \Rightarrow$$

$$\det A \det A = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1 .$$

Το κύριο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι ποιές συνθήκες είναι αναγκαίες έτσι ώστε τα ιδιοδιανύσματα μίας γραμμική συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ να αποτελούν μία ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^n$. Σε αυτή τη περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα θα καθορίζουν ένα νέο σύστημα αξόνων που θα διευκολύνει τη μελέτη της συνάρτησης. Οι γραμμικές συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα λέγονται **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμες**. Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος** αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix} = P^T A\ P .$$

Τα στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ανήκουν στο $\mathbb{R}$ και είναι ιδιοτιμές του A ενώ οι στήλες του P είναι ιδιοδιανύσματα του A. Ο A είναι λοιπόν ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό και ως **Φασματικό θεώρημα**.

Θεώρημα 4.2.4. *Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν $A = A^T$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος είναι πέρα από τους στόχους αυτού του μαθήματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι γίνεται με μαθηματική επαγωγή στο n. Θα μελετήσουμε την απόδειξη της μίας κατεύθυνσης όταν $n = 2$.

Έστω ότι $A = A^T$. Θα αποδείξουμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ότι ο $\mathbb{R}^2$ έχει μία ορθογώνια βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Πράγματι στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι λ_1 είναι μία από τις ιδιοτιμές του A και ότι

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ_1. Έστω

$$X_2 = \begin{bmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} \text{ και } P = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} .$$

Ο P είναι ορθογώνιος πίνακας. Θα δείξουμε ότι X_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Έστω $AX_2 = Y$. Είναι αναγκαίο να δείξουμε ότι Y είναι πολλαπλάσιο του X_2. Αφού P είναι αντιστρέψιμος πίνακας έπεται ότι το σύστημα $PX = Y$ είναι συμβατό. Άρα Y ανήκει στους χώρους στηλών του A και υπάρχουν k, t έτσι ώστε $Y = kX_1 + tX_2$. Έχουμε λοιπόν ότι $AX_2 = kX_1 + tX_2$. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $k = 0$.
Θα υπολογίσουμε το γινόμενο $(AX_2)^T X_1$. Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$(AX_2)^T X_1 = X_2^T (A^T X_1) = X_2^T (AX_1) = X_2^T (\lambda_1 X_1) = \lambda_1 (X_2^T X_1) = \mathbf{0} .$$

Αντικαθιστώντας $kX_1 + tX_2$ στη θέση του AX_2 βρίσκουμε ότι

$$(AX_2)^T X_1 = (kX_1 + tX_2)^T X_1 = (kX_1^T + tX_2^T) X_1$$

$$= k(X_1^T X_1) + t(X_2^T X_1) = k(X_1^T X_1) + t\mathbf{0} = k(X_1^T X_1) .$$

Αφού $X_1^T X_1 \neq \mathbf{0}$ και $k(X_1^T X_1) = \mathbf{0}$ έπεται ότι $k = 0$. Άρα $AX_2 = tX_2$ και X_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή t. Έπεται ότι ο 2×2 πίνακας A έχει δύο ορθογώνια ιδιοδιανύσματα και άρα ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. $\square$

Παραδείγματα 4.2.5.

1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι $A = A^T$. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)[(2-x)(1-x)-1]+[-(1-x)]$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (1-x)x(x-3).$$

Οι ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ του $P_A(x)$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Υπολογίζουμε τους ιδιοχώρους $V_1(A), V_0(A), V_3(A)$ του A.

Έχουμε ότι

$$V_1(A) = \{ \ (-\kappa, 0, \kappa) \ : \ \kappa \in \mathbb{R}\} = S(\{(-1,0,1)\}) \ ,$$

$$V_0(A) = \{ \ (\kappa, \kappa, \kappa) \ : \ \kappa \in \mathbb{R}\} = S(\{(1,1,1)\}) \ ,$$

και

$$V_3(A) = \{ \ (\kappa, -2\kappa, \kappa) \ : \ \kappa \in \mathbb{R}\} = S(\{(1,-2,1)\}) \ .$$

Επιλέγουμε ένα διάνυσμα από κάθε ιδιοχώρο και βρίσκουμε μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω $\varepsilon_1 = (-1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$, $\varepsilon_3 = (1,-2,1$ τότε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ και μάλιστα ορθογώνια, αλλά όχι ορθοκανονική. Διαιρούμε τα ε_i με το μήκος τους και βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A:

$$(\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \ \ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \ \ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \ ) \ .$$

Ο πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} ,$$

είναι ορθογώνιος και

$$S^T A\, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} .$$

Αφού $A = A^T$, A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Παρατηρούμε ότι

$$P_A(x) = (1-x)(x^2 - 5x - 10)$$

και οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{65}}{2},\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{65}}{2} .$$

Μετά από γραμμοπράξεις βρίσκουμε ότι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $A - I_3$ είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Έπεται ότι $V_1(A) = \{t(1,0,0) :\ t \in \mathbb{R}\}$ και $v_1 = (1,0,0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Μετά από γραμμοπράξεις φέρνουμε τον $A - \lambda_2 I_3$ στην μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{65}}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο παραπάνω πίνακας δεν είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, όμως αρκεί για να υπολογίσουμε τον ιδιοχώρο $V_{\lambda_2}(A)$. Πράγματι αν $(x,y,z) \in V_{\lambda_2}(A)$ τότε από τη πρώτη γραμμή του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι $x = 0$, ενώ από τη δεύτερη γραμμή προκύπτει ότι

$$\frac{-1+\sqrt{65}}{2} y + 4z = 0 \Rightarrow z = \frac{1-\sqrt{65}}{8} y .$$

Άρα

$$V_{\lambda_2}(A) = \{t(0,1,\frac{1-\sqrt{65}}{8}) : \ t \in \mathbb{R}\} = \{s(0,8,1-\sqrt{65}) : \ s \in \mathbb{R}\}$$

και $v_2 = (0,8,1-\sqrt{65})$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_2. Ομοίως

$$V_{\lambda_3}(A) = \{t(0,8,1+\sqrt{65}) : \ t \in \mathbb{R}\}$$

και $v_3 = (0,8,1+\sqrt{65})$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_3. Το σύνολο

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

είναι ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Κανονικοποιούμε και βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{130-2\sqrt{65}}}(0,8,1-\sqrt{65}), \frac{1}{\sqrt{130+2\sqrt{65}}}(0,8,1+\sqrt{65})\} .$$

Ο πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{130-2\sqrt{65}}} & \frac{8}{\sqrt{130+2\sqrt{65}}} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{65}}{\sqrt{130-2\sqrt{65}}}) & \frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{130+2\sqrt{65}}} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = P^T A P \ .$$

Επίλογος

Η θεωρία που αναπτύξαμε σε αυτή την ενότητα αφορά το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$. Μπορεί κανείς να μελετήσει το **γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο** σε έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο V. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρος. Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο στον V είναι μία συνάρτηση $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες

- $\langle v, v\rangle \ \geq 0$ και $\langle v, v\rangle = 0$ αν και μόνο αν $v = 0$.
- $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$
- $\langle \kappa v + \lambda w, u\rangle = \kappa\langle v, u\rangle + \lambda\langle w, u\rangle$,

- $\langle v, \kappa u + \lambda w\rangle \ = \kappa\langle v, u\rangle + \lambda\langle v, w\rangle$.

Η αντίστοιχη θεωρία για το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$ είναι επίσης πολύ ενδιαφέρουσα. Είδαμε ότι ο συζυγής ανάστροφος ενός πίνακα είναι σημαντικός στις αποδείξεις. Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθογώνιος** αν

$$A\overline{(A^T)} = I_n$$

Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** στο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ (\beta_1, \ldots, \beta_n)\rangle \ = \alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}\ .$$

Προκύπτει ότι αν $A = \overline{(A^T)}$ τότε ο πίνακας A έχει **πραγματικές ιδιοτιμές** και είναι **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος** στο $\mathbb{C}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1} = \overline{(P^T)}$ έτσι ώστε οι στήλες του P να είναι ιδιοδιανύσματα του A και

$$\overline{(P^T)}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Υπάρχουν πίνακες στο $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ που είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι και που δεν είναι ίσοι με τον συζυγή ανάστροφο τους. Μπορεί όμως κανείς να αποδείξει ότι ένας πίνακας A είναι **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος** αν και μόνο αν είναι **κανονικός**, δηλ. αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$A\overline{A}^T = \overline{A}^T A\ .$$

Ασκήσεις ενότητας 4.2

1. Να αποδείξετε ότι τα $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ είναι ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$.

2. Έστω $v = (1, 2, 3, 4)$. Να βρείτε $\|v\|$, $\|3v\|$, $\|\frac{1}{5}v\|$. Έστω $k \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\|kv\| = |k|\|v\|$.

3. Αν A είναι ορθογώνιος πίνακας τότε να αποδείξετε ότι A^T είναι ορθογώνιος πίνακας.

4. Έστω A ορθογώνιος πίνακας. Να αποδείξετε ότι $\det A = \pm 1$.

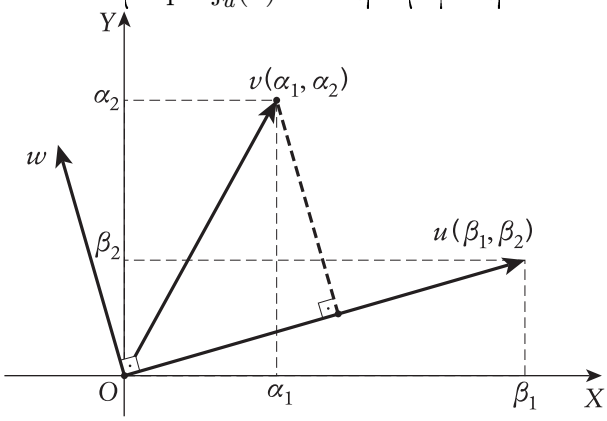
5. Έστω A ορθογώνιος πίνακας, λ ιδιοτιμή του A και v ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ. Εξετάζοντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle Av, Av\rangle$ να αποδείξετε ότι $\lambda = \pm 1$.

6. Για τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
να βρείτε ένα διαγώνιο πίνακα D και ένα πίνακα P έτσι ώστε $D = P^T AP$.

7. Να διαγωνιοποιήσετε ορθογώνια τον πίνακα
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.3 Προβολές και Βέλτιστες λύσεις

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$. Θέλουμε να γράψουμε το v ως άθροισμα δύο διανυσμάτων
$$v = \text{proj}_u(v) + w,$$
όπου $\text{proj}_u(v)$ να είναι παράλληλο προς το u και $w = v - \text{proj}_u(v)$ να είναι κάθετο στο u. Το διάνυσμα $\text{proj}_u(v)$ είναι η προβολή του v πάνω στο u.



Ισχύει ότι

- $\text{proj}_u v = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\langle w, u\rangle = 0$.

Αφού $v = \lambda u + w$ παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle v, u\rangle$ προκύπτει ότι

$$\langle v, u\rangle = \langle \lambda u + w, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle + \langle w, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle \ .$$

Λύνοντας ως προς λ βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u \ .$$

Ο τύπος

$$w = v - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u$$

δίνει ένα διάνυσμα $w \in S(\{u, v\})$ έτσι ώστε w να είναι ορθογώνιο στο u.

Παραδείγματα 4.3.1.

1. Έστω $v_1 = (0, 1, 1)$, και $v_2 = (0, 2, 0)$. Τότε

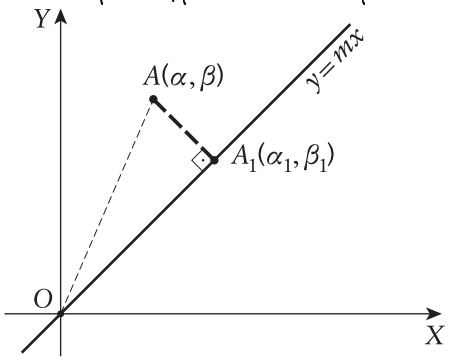
$$\mathrm{proj}_{v_1}(v_2) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\, v_1 = \frac{0\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0}{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}\,(0, 1, 1) = (0, 1, 1).$$

   Το διάνυσμα $u = v_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(v_2) = (0, 1, -1)$ είναι ορθογώνιο προς το v_1

2. Έστω $u = (1, m)$. Τότε

$$\mathrm{proj}_u(e_1) = \frac{1}{1+m^2}(1, m),\ \mathrm{proj}_u(e_2) = \frac{m}{1+m^2}(1, m) \ .$$

   Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση προβολής στην ευθεία $y = mx$, βλ. Παράδειγμα 3.4.2.8 και Παράδειγμα 4. Βλέπουμε ότι $f(v) = \mathrm{proj}_u(v)$.



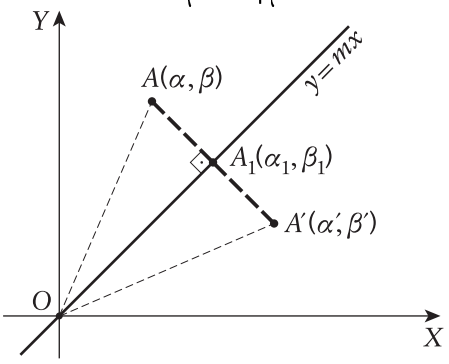
   Τότε

$$C_B(f(e_1)) = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix}1\\ m\end{bmatrix}, C_B(f(e_2)) = \frac{m}{1+m^2}\begin{bmatrix}1\\ m\end{bmatrix}$$

   και

$$A^f_{B,B} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix}1 & m\\ m & m^2\end{bmatrix} \ .$$

3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$, βλ. Παράδειγμα 3.4.2.9 και Παράδειγμα 6.



Έστω $u = (1, m)$. Αν $v \in \mathbb{R}^2$, βλέπουμε ότι αν $w = v - \mathrm{proj}_u(v)$ τότε

$$f(v) = \mathrm{proj}_u(v) - w = \mathrm{proj}_u(v) - (v - \mathrm{proj}_u(v)) = 2\,\mathrm{proj}_u(v) - v\ .$$

Άρα

$$f(e_1) = \frac{2}{1+m^2}(1, m) - (1, 0) = \frac{1}{1+m^2}(1 - m^2, 2m)$$

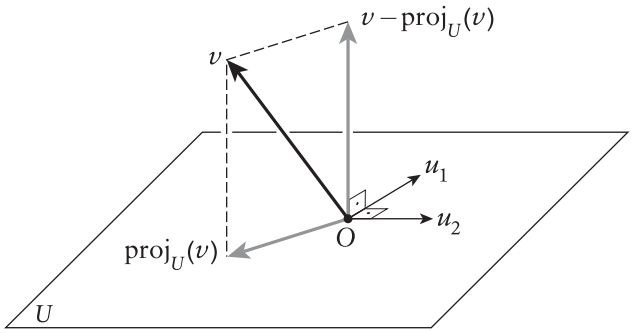
ενώ

$$f(e_2) = \frac{2m}{1+m^2}(1, m) - (0, 1) = \frac{1}{1+m^2}(2m, m^2 - 1)\ .$$

Έπεται ότι

$$A^f_{B,B} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}\ .$$

4. Έστω ότι $\{u_1, \ldots, u_n\}$ είναι ορθογώνια βάση για τον χώρο U. Η **ορθογώνια προβολή**, $\mathrm{proj}_U(v)$, του v στον U, είναι διάνυσμα του U έτσι ώστε $v - \mathrm{proj}_U(v))$ να είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του U.



Στη περίπτωση αυτή όπου $\{u_1, \ldots, u_n\}$ είναι ορθογώνια βάση για τον U θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_U(v) &= \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle}\, u_n \\ &= \mathrm{proj}_{u_1}(v) + \cdots + \mathrm{proj}_{u_n}(v)\ . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Πράγματι έστω

$$w = v - \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \cdots - \frac{\langle v, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle}\, u_n.$$

Για να δείξουμε ότι $\langle u, w\rangle = 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $\langle u_i, w\rangle = 0$ για $i = 1, \ldots, n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle w, u_i\rangle \ &= \ \langle v, u_i\rangle - \sum_{j\in I} \frac{\langle v, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle}\, \langle u_j, u_i\rangle \ = \\ &= \ \langle v, u_i\rangle - \frac{\langle v, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle}\, \langle u_i, u_i\rangle \ = 0. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται εύκολα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι το

$$\|v - \mathrm{proj}_U(v)\| \le \|\ v - u\|,\ \forall\ u \in U\ .$$

Το τελευταίο θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στις εφαρμογές.

5. Έστω
$$v_1 = (\ \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\ ),\ \ v_2 = (\ \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\ , -\frac{1}{2}\ , -\frac{1}{2}\ ),$$
$V = S(\{v_1, v_2\}$ και $w = (1, 3, 1, 5)$. Το σύνολο (v_1, v_2) είναι ορθοκανονική βάση για το V. Έχουμε ότι
$$\mathrm{proj}_{v_1}(w) = 5v_1,\ \mathrm{proj}_{v_2}(w) = -v_2 \text{ άρα } \mathrm{proj}_V(w) = 5v_1 + v_2\ .$$

6. Έστω $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $V = S(\{v_1, v_2\}$ και $w = (1, 2, 3)$. Θα βρούμε τη προβολή $\mathrm{proj}_V(w)$. Το σύνολο (v_1, v_2) είναι βάση για το V αλλά δεν είναι ορθογώνια. Πρώτα απ΄ όλα λοιπόν πρέπει να βρούμε μία ορθογώνια βάση για το V. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα
$$v_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(v_2) = \frac{1}{2}(-1, 1, 2)$$

όπως και κάθε πολλαπλάσιό του είναι ορθογώνιο προς το v_1. Άρα μία ορθογώνια βάση για το V αποτελείται από τα διανύσματα $v_1 = (1,1,0)$ και $v_2' = (-1,1,2)$). Έχουμε

$$\mathrm{proj}_{v_1}(w) = \frac{3}{2}(1,1,0),\ \mathrm{proj}_{v_2'}(w) = \frac{7}{6}(-1,1,2),$$

άρα

$$\mathrm{proj}_V(w) = \mathrm{proj}_{v_1}(w) + \mathrm{proj}_{v_2'}(w) = \frac{1}{3}(1,8,7)\ .$$

Έχουμε ότι

$$w = \mathrm{proj}_V(w) + (w - \mathrm{proj}_V(w)) = \frac{1}{3}(1,8,7) + \frac{1}{3}(2,-2,2)\ .$$

Το διάνυσμα $\frac{1}{3}(2,-2,2)$ και κάθε πολλαπλάσιο του είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του V. Έπεται ότι

$$\big((1,1,0),(-1,1,2),(2,-2,2)\big)$$

είναι ορθογώνια διατεταγμένη βάση για το $\mathbb{R}^3$. Αφού $\mathrm{proj}_V(w) \neq w$ έπεται ότι $w \notin V$. Το 'πλησιέστερο' στο w στοιχείο του V είναι $\mathrm{proj}_V(w)$. Έτσι για να μετρήσουμε την απόσταση του σημείου $(1,2,3)$ από το επίπεδο V αρκεί να πάρουμε το μήκος του κάθετου διανύσματος προς το V με κορυφή το $(1,2,3)$ δηλαδή του διανύσματος $w - \mathrm{proj}_V(w)$. Έχουμε ότι

$$\|w - \mathrm{proj}_V(w)\| = \|\frac{1}{3}(2,-2,2)\| = \frac{1}{3}\|2,-2,2)\| = \frac{1}{3}\sqrt{12} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\ .$$

.

7. Έστω

$$v_1 = (\ \frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ),\ \ v_2 = (\ \frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ),$$
$$v_3 = (\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ),\ \ v_4 = (\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ )$$

και $v = (1,3,1,5)$. Το σύνολο $D = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$. Θα γράψουμε το v ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της D. Παρατηρούμε ότι $v = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^4}(v)$ και ότι

$$\langle v_1, v\rangle = 5,\ \langle v_2, v\rangle = 1,\ \langle v_3, v\rangle = -2,\ \langle v_4, v\rangle = 1\ .$$

Χρησιμοποιώντας την D ως βάση του $\mathbb{R}^4$ και τον τύπο 4.8 βρίσκουμε ότι

$$v = 5v_1 + v_2 - 2v_3 + v_1\ .$$

Στις εφαρμογές η εύρεση ορθοκανονικών βάσεων είναι μεγάλης σημασίας και είναι η βάση για υπολογιστικές μεθόδους εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, βλ. QR-ανάλυση πινάκων. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι με διαδοχικές προβολές και αφαιρέσεις διανυσμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ορθογώνια βάση για τον διανυσματικό χώρο V. Η μέθοδος που στηρίζεται σε αυτή τη διαδικασία λέγεται μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt.

Αλγόριθμος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt για τον χώρο V.

- **Βήμα 1** Βρίσκουμε μία βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ για τον V.
- **Βήμα 2** Θέτουμε $w_1 = v_1$.
- **Βήμα 3** Για $i = 2, \ldots, n$, θέτουμε $V_{i-1} = S(\{w_1, \ldots, w_{i-1}\})$ και βρίσκουμε $w_i = v_i - \mathrm{proj}_{V_{i-1}}(v_i) = v_i - \mathrm{proj}_{w_1}(v_i) - \cdots - \mathrm{proj}_{w_{i-1}}(v_i)$.
- **Βήμα 4** Κανονικοποιούμε τα w_i για $i = 1, \ldots, n$ και

$$\{\frac{w_1}{\|w_1\|}\ ,\ \frac{w_2}{\|w_2\|}\ , \ldots,\ \frac{w_n}{\|w_n\|}\}$$

  είναι ορθοκανονική βάση για τον V.

Είναι φανερό ότι τα διανύσματα w_i που προκύπτουν στο Βήμα 3 είναι ορθογώνια προς τα προηγούμενα και ότι $V_{i-1} = S(\{v_1, \ldots, v_{i-1}\})$ για κάθε i. Μία παραλλαγή του παραπάνω αλγορίθμου αντικαθιστά τα διανύσματα που προκύπτουν στο Βήμα 3 με κατάλληλα πολλαπλάσια. Τα νέα διανύσματα παραμένουν ορθογώνια προς τα διανύσματα που έχουν ήδη προσδιοριστεί στις προηγούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου και παράλληλα μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε οι συντεταγμένες τους να είναι σχετικά απλούστερες σε κάποιες περιπτώσεις. Εάν τα διανύσματα στο Βήμα 1 παράγουν τον V και δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάποια από τα διανύσματα στο Βήμα 3 προκύψουν να είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή τα αγνοούμε για τις επόμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου και προχωρούμε στο Βήμα 4 με τα μη μηδενικά εναπομείναντα διανύσματα.

Παραδείγματα 4.3.2.

1. Έστω

$$v_1 = (1, 1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, -2, 1)\ \ v_3 = (0, -1, 0, 2),$$

   και $V = S(\{v_1, v_2, v_3\})$. Τότε

- $w_1 = v_1 = (1,1,0,0)$,
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2 = (1,1,-2,1) - \frac{2}{2}(1,1,0,0) = (0,0,-2,1)$,
- $w_3 = v_3 - \text{proj}_{w_1}(v_3) - \text{proj}_{w_2}(v_3) = (0,-1,0,2) - -1/2(1,1,0,0) - 2/5(0,0,-2,1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = 1/10(5,-5,8,16)$.

Μία ορθογώνια βάση του V αποτελείται από τα διανύσματα

$$(1,1,0,0), (0,0,-2,1), (5,-5,8,16)$$

ενώ τα διανύσματα

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{5}}\,(0,0,-2,1), \frac{1}{\sqrt{370}}\,(5,-5,8,16)$$

αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του V.

2. Θα υπολογίσουμε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου

$$V = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - 5y - 2z = 0\}\ .$$

Παρατηρούμε ότι

$$V = \{\ (5y+2z, y, z) :\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{\ y(5,1,0) + z(2,0,1) :\ y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= S(\{(5,1,0),(2,0,1)\}).$$

Έστω $v_1 = (5,1,0)$, $v_2 = (2,0,1)$. Τότε

$$\{v_1, v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2)\} = \{(5,1,0),(1,1,-2)\}$$

είναι ορθογώνια βάση του V ενώ

$$\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1-2)\}$$

είναι ορθοκανονική βάση του V.

3. Έστω $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (4,3,2)$ και $V = S(\{v_1, v_2, v_3\})$. Εφαρμόζοντας τα βήματα 2 και 3 του αλγορίθμου των Gram-Schmidt βρίσκουμε ότι

- $w_1 = v_1$,
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{w_1}(v_2) = (1,0,-1)$ και
- $w_3 = v_3 - \text{proj}_{w_1}(v_3) - \text{proj}_{w_2}(v_2) = (4,3,2) - \frac{9}{3}(1,1,1) - \frac{2}{2}(1,0,-1) = (0,0,0)$.

Αφού $w_3 = 0$ έπεται ότι $v_3 = \text{proj}_{S(\ w_1, w_2\})}(v_3)$, άρα $v_3 \in S(\ w_1, w_2\})$ και κατά συνέπεια $V = S(\{w_1, w_2\})$. Έπεται ότι μία ορθογώνια βάση του V είναι το σύνολο $\{w_1, w_2\}$.

Έστω V διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ και $w \in \mathbb{R}^m$. Για να εφαρμόσουμε ον τύπο 4.8 και να βρούμε $\text{proj}_V(w)$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία ορθογώνια βάση για το V. Ξεκινώντας από οποιαδήποτε παράγον σύνολο του V μπορούμε να βρούμε μία ορθογώνια βάση για το V σύμφωνα με τον αλγόριθμο των Gram-Schmidt. Παρακάτω δίνουμε ακόμη μία μέθοδο για να υπολογισθεί $\text{proj}_V(w)$ που προσπερνάει την εύρεση ορθογώνιας βάση και ανάγει το πρόβλημα στην εύρεση λύσης ενός γραμμικού συστήματος.

Αλγόριθμος εύρεσης $\text{proj}_V(w)$ μέσω επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.

- **Βήμα 1** Έστω ότι $V = S(\{v_1, \ldots, v_n\}) \subset \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} C_B(v_1) & \cdots & C_B(v_n) \end{bmatrix}$ όπου B η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$.
- **Βήμα 2** Βρίσκουμε μία λύση $(k_1, \ldots, k_n)$ του συστήματος

$$(A^T A)X = A^T C_B(w) \ . \tag{4.9}$$

- **Βήμα 3** Τότε

$$\text{proj}_V(w) = k_1 \cdot v_1 + \cdots + k_n \cdot v_n \ .$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος χρήζει εξήγησης. Το κομβικό σημείο βρίσκεται στα Βήματα 2 και 3. Θα εξηγήσουμε γιατί το σύστημα 4.9 είναι συμβατό καθώς και γιατί οι λύσεις του συστήματος 4.9 είναι οι συντελεστές στο Βήμα 4. Θα ξεκινήσουμε ανάποδα. Αφού $\text{proj}_V(w) \in V = S(\{v_1, \ldots, v_n\})$ έπεται ότι υπάρχουν $k_1, \ldots, k_n$ έτσι ώστε $\text{proj}_V(w) = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$. Θα δείξουμε ότι $(k_1, \ldots, k_n)$ είναι λύση του συστήματος 4.9. Το διάνυσμα $w - \text{proj}_V(w)$ είναι ορθογώνιο προς κάθε στοιχείο του V. Άρα

$$\langle v_i, w - \text{proj}_V(w) \rangle = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\langle v_i, w - k_1 v_1 - \cdots - k_n v_n \rangle = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Άρα για $i = 1, \ldots, n$ ισχύει ότι

$$C_B(v_i)^T \big(C_B(w) - (k_1 C_B(v_1) + \cdots + k_n C_B(v_n))\big) = \mathbf{0}. \tag{4.10}$$

Όμως

$$k_1 C_B(v_1) + \cdots + k_n C_B(v_n) = AK \text{ όπου } K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} .$$

Άρα η σχέση 4.10 γίνεται

$$C_B(v_i)^T \big(C_B(w) - AK\big) = \mathbf{0} \text{ για } i = 1, \ldots, n$$

και

$$C_B(v_i)^T C_B(w) = C_B(v_i)^T (AK) \text{ για } i = 1, \ldots, n \ .$$

Αφού τα παραπάνω ισχύουν για το γινόμενο κάθε γραμμής του A^T με τον πίνακα-στήλη $C_B(w)$ έπεται ότι

$$A^T C_B(w) = A^T (AK) \Rightarrow A^T C_B(w) = (A^T A)K$$

και άρα το σύστημα

$$(A^T A)X = A^T C_B(w)$$

είναι συμβατό και έχει λύση $X = K$ όπως ήταν το ζητούμενο.

Παράδειγμα 4.3.3. Έστω $V = S(\{(1,1,1,1),(1,1,0,0)\}$. Θα βρούμε τη προβολή $\text{proj}_V(e_1)$ και με τις δύο μεθόδους. Τα διανύσματα που παράγουν τον V δεν είναι ορθογώνια. Σύμφωνα με τη πρώτη μέθοδο βρίσκουμε πρώτα μία ορθογώνια βάση για τον V. Μία τέτοια βάση του V αποτελείται από τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1,1)$ και $v_2 = (1,1,-1,-1)$. Έτσι

$$\text{proj}_V(e_1) = \text{proj}_{v_1}(e_1) + \text{proj}_{v_2}(e_1) = \frac{1}{4}(1,1,1,1) + \frac{1}{4}(1,1,-1,-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,1,0,0) \ .$$

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ A^T C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$(A^T A)X = A^T C_B(w) \ .$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και η λύση του συστήματος είναι $(0, 1/2)$. Άρα

$$\mathrm{proj}_V(e_1) = 0(1,1,1,1) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,0,0)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ιδέες για την εύρεση των **βέλτιστων προσεγγιστικών** λύσεων γραμμικών συστημάτων. Θυμίζουμε ότι αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, και $E \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ τότε το σύστημα $AX = E$ είναι συμβατό αν και μόνο αν το διάνυσμα $w \in \Sigma(A)$, ($\Sigma(A)$ είναι ο χώρος στηλών του A), όπου w είναι το διάνυσμα που οι συντεταγμένες του ως προς τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ είναι η στήλη E. Έτσι αν $E = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix}^T$ τότε $w = (c_1, \ldots, c_m)$. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ τα διανύσματα που οι συντεταγμένες τους ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ είναι οι στήλες του A. Όταν $AX = E$ δεν είναι συμβατό τότε $w \notin \Sigma(A)$. Το στοιχείο του $\Sigma(A)$ που βρίσκεται πλησιέστερα του w είναι η προβολή $\mathrm{proj}_{\Sigma(A)}(w)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$\mathrm{proj}_{\Sigma(A)}(w) = z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \ .$$

Είδαμε προηγουμένως ότι $(z_1, \ldots, z_n)$ είναι λύση του συστήματος

$$(A^T A)X = A^T E \ .$$

Ονομάζουμε τη λύση $(z_1, \ldots, z_n)$ λέγεται **βέλτιστη προσεγγιστική λύση** του $AX = E$. Η **απόκλιση** (το λάθος) είναι το μήκος της διαφοράς $w - \mathrm{proj}_{\Sigma(A)}(w)$. Έτσι αν $\mathrm{proj}_{\Sigma(A)}(w) = (p_1, \ldots, p_n)$ τότε η απόκλιση είναι ίση με

$$\|w - \mathrm{proj}_{\Sigma(A)}(w)\| = \sqrt{(c_1 - p_1)^2 + \cdots + (c_n - p_n)^2} \ .$$

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $AX = E$ ένα γραμμικό σύστημα, όπου $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $E \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Τότε κάθε λύση Z του συστήματος*

$$(A^T A)X = A^T E$$

είναι βέλτιστη προσεγγιστική λύση του $AX = B$.

Παραδείγματα 4.3.5.

1. Το σύστημα
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}$$
δεν έχει λύση. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$
Τότε
$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \text{ και } A^T E = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$
Οι λύσεις του $(A^T A)X = A^T E$ είναι το σύνολο:
$$\{(\frac{3}{5}, 0) + t(-1, 1) : \ t \in \mathbb{R}\} .$$
Κάθε ένα από τα στοιχεία αυτού του συνόλου είναι βέλτιστη προσεγγιστική λύση του $AX = E$. Μία συγκεκριμένη λύση είναι $(\frac{3}{5}, 0)$. Για αυτήν την λύση (όπως και για κάθε άλλη βέλτιστη προσεγγιστική λύση) έχουμε ότι
$$A \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
και η απόκλιση είναι $\sqrt{(2/5)^2 + (-1/5)^2} = \sqrt{1/5}$.

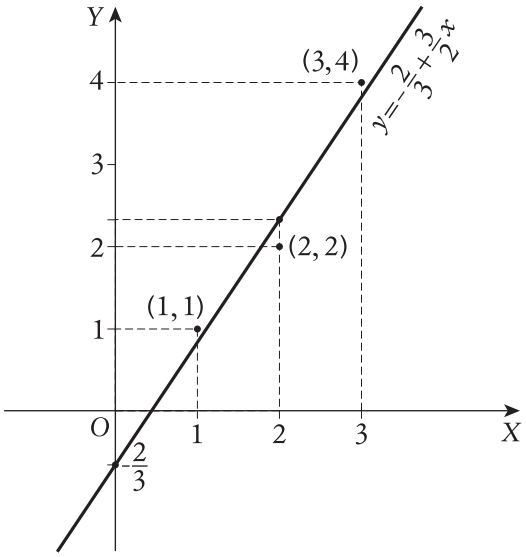
2. Έστω τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι δεν υπάρχει ευθεία $y = a_0 + a_1 x$ που να περνά και από τα τρία σημεία και το σύστημα
$$\begin{array}{rcrcl} a_0 & + & a_1 & = & 1 \\ a_0 & + & 2a_1 & = & 2 \\ a_0 & + & 3a_1 & = & 4 \end{array}$$
δεν έχει λύση. Η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του παραπάνω συστήματος καθορίζει την ευθεία **ελαχίστων τετραγώνων** αυτών των σημείων. Έχουμε ότι
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T E = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}.$$
Επιλύουμε το σύστημα $(A^T A)X = A^T E$. Η λύση αυτού του συστήματος είναι η $(-2/3, 3/2)$. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η
$$y = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} x .$$

Παρατηρούμε ότι

$$A\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 23 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Η απόκλιση είναι ίση με

$$\sqrt{(1/6)^2 + (-1/3)^2 + (1/6)^2} = \sqrt{1/6}\ .$$



Ασκήσεις ενότητας 4.3

1. Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$B = \{\ v_1 = (3,1,-1),\ v_2 = (1,-2,1),\ v_3 = (1,4,7)\ \}$$

του $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε την προβολή του $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ σε κάθε ένα από τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 καθώς και στον χώρο που παράγεται από τα v_1, v_2 και τέλος να γράψετε το $v = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^3}(v)$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3.

2. Έστω $v_1 = (-3,0,4)$, $v_2 = (4,0,-3)$, $v_3 = (0,5,0)$ και $u = (1,2,3)$. Να βρεθούν τα $\mathrm{proj}_{v_1} u$, $\mathrm{proj}_{S(\{v_2,v_3\})} u$, και να γράψετε το $v = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^3}(v)$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3.

3. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου

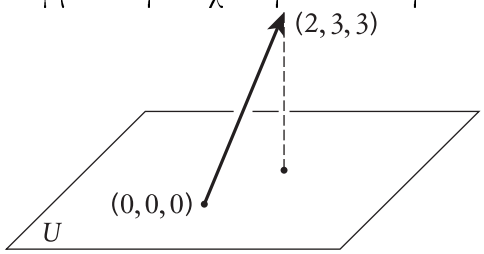
$$U = S(\{(2,1,0),(1,3,2)\})$$

του $\mathbb{R}^3$ και να την συμπληρώσετε σε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

4. Δίνεται η βάση $B = \{u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (2,1,-3),\ u_3 = (-1,1,0)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Να υπολογισθεί με τη μέθοδο των Gram-Schmidt μία ορθοκανονική βάση B' του $\mathbb{R}^3$ που προκύπτει από τη δοθείσα βάση.

5. Δίνονται τα στοιχεία $v = (0,1,2,-1)$, $u = (1,0,0,2)$, $w = (3,1,-2,1)$. Αν $U = S(\{u,w\})$, να βρεθεί το $\mathrm{proj}_U v$.

6. Δίνεται το επίπεδο $U = S(\{v_1, v_2\})$ του $\mathbb{R}^3$ όπου $v_1 = (1,0,1)$ και $v_2 = (1,1,2)$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του $(2,3,3)$ από το U.



7. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 2 \\ x & + & 5y & = & 3 \end{array}$$

είναι μη συμβατό και να βρεθεί η βέλτιστη προσεγγιστική λύση.

8. Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων των σημείων $(-1,1)$, $(0,0)$, $(2,3)$, $(3,4)$ του $\mathbb{R}^2$.

Βιβλιογραφία

1. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας*Εισαγωγή στη ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ* Θεσσαλονίκη 2006

2. Nicholoson, K. , *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.

3. Rorres, C. and Anton, H., *Applications of Linear Algebra*, John Wiley and Sons, 1984

4. Ε. Ψωμόπουλος, *Γραμμική Άλγεβρα* , Θεσσαλονίκη 2004.