Θεωρήματα μη πληρότητας

Ειδικό θέμα στη λογική

Κάρτας Κωνσταντίνος

Επιβλέπων Καθηγητής : Αθανάσιος Τζουβάρας

2016-2017

Πρόλογος

Σε αυτήν την εργασία θα επιχειρήσω να παρουσιάσω δύο από τα πιο σημαντικά θεωρήματα των μαθηματικών του 20ου αιώνα , τα θεωρήματα μη πληρότητας του Kurt Godel. Τα θεωρήματα αυτά ανήκουν στην κλάση των "δημοφιλών" αποτελεσμάτων της επιστήμης των μαθηματικών. Σχεδόν όλοι όσοι έχουν μια επαφή με τα μαθηματικά έχουν ακούσει μια έστω άτυπη διατύπωση του πρώτου θεωρήματος. Μια περιγραφική και όχι απόλυτα αυστηρή εκδοχή που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι η ακόλουθη : Κάθε συνεπής, αξιωματικοποιήσιμη θεωρία[1] εντός της οποίας μπορεί να κάνει κάποιος στοιχειώδη αριθμητική είναι μη πλήρης, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον πρόταση που ούτε η ίδια ούτε η άρνηση της είναι αποδείξιμες από τη θεωρία. Ο λόγος για τον οποίο το παραπάνω θεώρημα είναι τόσο εντυπωσιακό είναι διότι κατ' αρχάς οι ιδιότητες που απαιτούμε να έχει η θεωρία είναι απολύτα φυσιολογικές και από την άλλη η πληρότητα είναι μια ακόμα φυσική απαίτηση, αλλά όπως δείχνει το θεώρημα υπό αυτές τις προϋπόθεσεις ανέφικτη. Οποιαδήποτε θεωρία που αξίζει την προσοχή μας και έχει πρακτική σημασία για μας οφείλει να έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες. Το να απαιτήσουμε να είναι συνεπής, δηλαδή να μην αποδεικνύει αντιφάσεις , είναι κομβικής σημασίας. Αν είναι ασυνεπής τότε αποδεικνύει τα πάντα (principle of explosion), οπότε ποιος ο λόγος να τη χρησιμοποιήσουμε για οποιονδήποτε σκοπό ; Το να απαιτήσουμε να είναι αξιωματικοποιήσιμη είναι επίσης μια απολύτως φυσιολογική υπόθεση και σημαίνει πως πρέπει να έχουμε ένα σύνολο τύπων , που θα αποτελούν τα αξιώματα της θεωρίας , το οποίο παράγει όλη τη θεωρία και θα είναι θέμα αλγοριθμικής ρουτίνας να ελέγξουμε αν ένας τύπος ανήκει σε αυτό το σύνολο ή όχι. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση όταν κάποιος μας δίνει μια υποτιθέμενη απόδειξη από αυτά τα αξιώματα για κάποια πρόταση μπορούμε να ελέγξουμε αν όντως είναι γνήσια απόδειξη ή αν έχει κάνει κάπου λάθος. Σε κάθε βήμα ελέγχουμε αλγοριθμικά αν ο τύπος που χρησιμοποίησε είναι αξίωμα της θεωρίας (ή λογικό αξίωμα) ή προκύπτει από προηγούμενες προτάσεις της απόδειξης με κάποιον από τους συναγωγικούς κανόνες. Στο τέλος αποφαινόμαστε αν η απόδειξη είναι ορθή και εν τέλει αν η τελευταία πρόταση είναι θεώρημα της θεωρίας. Φανταστείτε τώρα να μην είχαμε αποτελεσματικό τρόπο να ελέγξουμε αν μια πρόταση ανήκει σε αυτά (ή σε κάποια άλλα) αξιώματα της θεωρίας. Θα ήταν πραγματικά ένας εφιάλτης. Θέλουμε να μην υπάρχει καμία αμφιβολία για το αν μια απόδειξη μιας πρότασης από ένα σύνολο αξιωμάτων είναι γνήσια ή όχι και αυτό το εξασφαλίζουμε μέσω της αλγοριθμικότητας του συνόλου των αξιωμάτων. Εξάλλου σε όλη την ιστορία της μαθηματικής πρακτικής αυτό ήταν σχεδόν αυτονόητο, απλά δεν είχε διατυπωθεί ρητά με αυτό τον τρόπο της αλγοριθμικότητας μέχρι τον εικοστό αιώνα. Από τον Ευκλείδη μέχρι την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων είχαμε το εξής φαινόμενο : Ξεκινούσαμε από ένα σύνολο αξιωμάτων, συχνά πεπερασμένο[2], και βλέπαμε τις λογικές συνέπειες του φτιάχνοντας αποδείξεις. Ο σκοπός μας ,σε πλατωνικούς όρους, ήταν και είναι να περιγράψουμε μια ορισμένη μαθηματική πραγματικότητα, είτε αυτή είναι ο κόσμος της γεωμετρίας , είτε το σύμπαν των συνόλων. Ιδανικά θα θέλαμε η περιγραφή μας να μπορεί να συνοψιστεί σε ένα τέτοιο επιθυμητό σύνολο αξιωμάτων και κάθε φορά που μας δίνει κάποιος μια πρόταση στη γλώσσα της εκάστοτε θεωρίας να μπορούμε να την αποδείξουμε ή να την καταρρίψουμε, ή με άλλα λόγια να είναι πλήρης η θεωρία. Αυτό όμως είναι αδύνατο σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας αν η θεωρία μας έχει αυτές τις φυσικές ιδιότητες. Μια από τις προτάσεις που δεν μπορεί ούτε να αποδείξει , αλλά ούτε και να καταρρίψει μια τέτοια θεωρία είναι η ίδια της η συνέπεια. Για την ακρίβεια είναι κάποια πρόταση που εκφράζει στη γλώσσα της θεωρίας τη συνέπεια της θεωρίας. Με άλλα λόγια αν μια τέτοια θεωρία αποδεικνύει τη συνέπεια της , είναι ασυνεπής ! Θα έλεγε κανείς ότι τιμωρείται για την έπαρση της. Αυτό ,σε αδρές γραμμές, είναι το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. Για να φτάσουμε τώρα σε αυτά τα δύο αποτελέσματα υπάρχουν κάποιες έννοιες που πρέπει να αναλύσουμε και αρκετά ενδιάμεσα προαπαιτούμενα αποτελέσματα που πρέπει να αποδείξουμε. Αναφέραμε κατ' αρχάς την έννοια της αλγοριθμικότητας. Πρέπει να αναπτύξουμε σε πρώτη φάση μια αυστηρή θεωρία της αλγοριθμικότητας, να καταστήσουμε αυτήν τη διαισθητική έννοια κομμάτι των μαθηματικών. Αυτός είναι ο στόχος του πρώτου κεφαλαίου και το εγχείρημα έχει αξία καθεαυτό, ανεξάρτητα από τον κομβικό ρόλο που παίζει στο να φτάσουμε στα θεωρήματα μη πληρότητας. Έπειτα πρέπει να αποδείξουμε κάποια ,τεχνικής φύσεως, βοηθητικά θεωρήματα και εκεί υπάρχει κίνδυνος να χάσουμε τη γενική ιδέα. Για τον σκοπό αυτό , έχω σημειώσει με αστερίσκο κάποια κεφάλαια ή θεωρήματα τα οποία μπορούν να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση χωρίς απώλεια της συνέχειας.

1.Η θεωρία ,εξ ορισμού, είναι ένα σύνολο τύπων κλειστό ως προς την αποδειξιμότητα. Έτσι οι προτάσεις : "θεώρημα της θεωρίας", "πρόταση/τύπος της θεωρίας" σημαίνουν το ίδιο πράγμα.

2. Και συχνά άπειρο. Πολλές θεωρίες περιέχουν αξιώματα σχήματα όπως αυτό της πρωτοβάθμιας επαγωγής που μας δίνει ένα αξίωμα για κάθε τύπο. Επομένως στο σύνολο μας δίνει αριθμήσιμα αξιώματα. Παρόλα αυτά μπορούμε να ελέγξουμε αλγοριθμικά σε πεπερασμένο χρόνο αν κάποιος χρησιμοποίησε το αξίωμα της επαγωγής από την μορφή του τύπου που χρησιμοποίησε.

Περιεχόμενα

1.0 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να περιγράψουμε τον αλγόριθμο ως μαθηματικό αντικείμενο. Ο αλγόριθμος , όπως τον αντιλαμβανόμαστε όλοι διαισθητικά, είναι μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων (ώστε η υλοποίηση τους να μην απαιτεί οποιαδήποτε πρωτοβουλία ή σκέψη) που μπορούν να εκτελεστούν σε πεπερασμένο χρόνο. Φυσικά εμείς θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στις αλγοριθμικές διαδικασίες επί μαθηματικών αντικειμένων. Αν έχουμε , λόγου χάριν, έναν αλγόριθμο για να υπολογίζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού τους φυσικούς, θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι υπολογίσιμη. Ένα απλό επιχείρημα μας πείθει ότι στην πραγματικότητα αξίζει να επικεντρωθούμε στην τυποποίηση της έννοιας της υπολογίσιμης συνάρτησης. Για παράδειγμα το να πούμε ότι υπάρχει αλγόριθμος που εξετάζει αν κάποιος φυσικός ανήκει σε δοθέν υποσύνολο των φυσικών είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι υπάρχει αλγόριθμος που υπολογίζει τη χαρακτηριστική του συνάρτηση. Άλλες αλγοριθμικές διαδικασίες επί μαθηματικών αντικειμένων, π.χ. τύπων της γλώσσας , μπορούν να αναχθούν μέσω κατάλληλης κωδικοποίησης , σε συναρτήσεις επί των φυσικών αριθμών. Το όλο ζήτημα επομένως ανάγεται στο αν μια αριθμητική συνάρτηση με ορίσματα φυσικούς αριθμούς, είναι υπολογίσιμη. Με το θέμα ασχολήθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί , μεταξύ των οποίων οι Turing, Church, Godel, Kleene και Post. Προσπάθησαν να ορίσουν τις αναδρομικές συναρτήσεις που θα ήταν το αυστηρό ανάλογο της υπολογίσιμης συνάρτησης. Οι Godel και Herbrand , ξεκινώντας απο μια κλάση συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν από τον Godel στην απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας , μελέτησαν την έννοια του υπολογίσιμου με βάση την έννοια της αναδρομής , πράγμα που συμπλήρωσε στη συνέχεια ο Kleene. Ο Turing έδωσε τον ορισμό του υπολογίσιμου μέσω της μηχανής Turing ενώ ο Church ανέπτυξε τον λ-λογισμό. Θα ασχοληθούμε με τις δύο πρώτες προσεγγίσεις. Όλα τα μοντέλα της υπολογισότητας που αναφέραμε αποδείχθηκαν ισοδύναμα , πράγμα που συνηγορούσε στο ότι έχουμε μια πολύ στέρεα αντίληψη για αυτήν την διαισθητική κλάση και έδωσε στους μαθηματικούς την βαθιά πεποίθηση ότι η έννοια της αναδρομικότητας ενσαρκώνει σωστά την έννοια του υπολογίσιμου.. Η έννοια της υπολογίσιμης συνάρτησης ταυτίστηκε τελικά με αυτήν της αναδρομικής συνάρτησης και επιστεγάστηκε με τη θέση των Church-Turing. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής (άπαξ και δώσουμε τους ορισμούς) : κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι τετριμμένα υπολογίσιμη. Ο ίδιος ο ορισμός μας παρέχει τον ζητούμενο αλγόριθμο όπως θα δούμε. Η άλλη κατεύθυνση είναι αυτή που έχει ενδιαφέρον. Αυτή η θέση βέβαια δεν είναι μια πρόταση που επιδέχεται μαθηματική απόδειξη γιατί εμπλέκει μια έννοια που είναι διαισθητική και όχι αυστηρά-μαθηματικά ορισμένη. Θεωρητικά μπορεί κάποιος στο μέλλον να κατασκευάσει μια συνάρτηση που όλοι οι μαθηματικοί θα συμφωνούν πως είναι διαισθητικά υπολογίσιμη και παρόλα αυτά δεν είναι αναδρομική. Η εμπειρία μας δείχνει πως αυτό είναι μάλλον απίθανο. Επίσης υπάρχουν αρκετά πειστικά επιχειρήματα , που δεν συνιστούν φυσικά μαθηματικές αποδείξεις , για το αδύνατο του παραπάνω εγχειρήματος αλλά δεν θα επεκταθούμε. Θα χρησιμοποιούμε κατά κόρον τη θέση Church-Turing για να απλοποιούμε κάποιες τεχνικές αποδείξεις. Κυρίως στα πρώτα βήματα, όποτε κρίνεται αναγκαίο θα δίνουμε και το αυστηρό ανάλογο της απόδειξης.

1.1 Βασικές αναδρομικές συναρτήσεις

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου με τον όρο μερική συνάρτηση θα εννοούμε μια συνάρτηση από ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^k$στο $\mathbb{N}$, ενώ με τον όρο ολική συνάρτηση θα εννοούμε μια συνάρτηση που το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{N}^k$.

Σε πρώτη φάση ορίζουμε ένα απλό αλλά απρόσμενα πλούσιο υποσύνολο των υπολογίσιμων συναρτήσεων, αυτό των βασικών αναδρομικών συναρτήσεων.

Ορισμός

Το σύνολο των βασικών αναδρομικών συναρτήσεων είναι ένα το ελάχιστο σύνολο F τέτοιο ώστε :

1. Η συνάρτηση διαδόχου $s(x) = x + 1$ είναι β.α
2. Για κάθε k η μηδενική συνάρτηση $Z(\vec{x}) = 0$ είναι β.α.
3. Για κάθε k και j με $1 \leq j \leq k$, η συνάρτηση προβολής $I_j^k(\vec{x}) = x_j$ είναι β.α.

Οι συναρτήσεις που περιγράφονται από τις (1)-(3) λέγονται αρχικές συναρτήσεις.

4. Η F είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση , δηλαδή αν $g_1, g_2, \ldots, g_n$ είναι συναρτήσεις k μεταβλητών και h είναι συνάρτηση m μεταβλητών τότε η συνάρτηση $h(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$ είναι β.α.
5. Η οικογένεια F 'είναι κλειστή ως προς την αναδρομή. Δηλαδή , αν h είναι συνάρτηση στο F με k μεταβλητές και g είναι συνάρτηση $k+2$ μεταβλητών επίσης στο F, τότε η συνάρτηση $k+1$ μεταβλητών που ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις:
$f(\vec{x}, 0) = h(\vec{x})$
$f(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$

Το να απαιτήσουμε το F να είναι το ελάχιστο τέτοιο σύνολο ισοδυναμεί με το να πούμε πως είναι η τομή όλων των συνόλων που ικανοποιούν τις (1)-(5) και επίσης με το ότι υπάρχει ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ τέτοια ώστε κάθε f_j να είναι ενός εκ των τύπων (1),(2) ή (3), ή να ορίζεται από προηγούμενες συναρτήσεις με χρήση των κανόνων (4) και (5). Είναι σαφές ότι κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη. Πράγματι οι αρχικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες. Επίσης το να υπολογίσουμε σύνθεση υπολογίσιμων συναρτήσεων είναι αλγοριθμική ρουτίνα και άρα μας δίνει υπολογίσιμη συνάρτηση. Το ίδιο ισχύει για την αναδρομή. Αν οι h και g είναι υπολογίσιμες , τότε για να υπολογίσουμε την τιμή $f(\vec{m}, n)$, υπολογίζουμε πρώτα την τιμή $f(\vec{m}, 0) = h(\vec{m})$, έπειτα την $f(\vec{m}, 1) = g(\vec{m}, 0, f(\vec{m}, 0))$, μετά την $f(\vec{m}, 2) = g(\vec{m}, 1, f(\vec{m}, 1))$ κ.ο.κ. ,μέχρι να φτάσουμε στην επιθυμητή τιμή $f(\vec{m}, n)$.Έτσι κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη[1].

Η συνηθισμένη προσθετική συνάρτηση είναι β.α. μιας και ορίζεται αναδρομικά απο τις σχέσεις $m + 0 = m = Id(m)$ (η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνάρτηση προβολής) και $m + (n+1) = (m+n) + 1 = s(m+n)$. Ομοίως ο πολλαπλασιασμός και η ύψωση σε δύναμη λόγω των αναδρομικών τους ορισμών είναι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις.

Ένα υποσύνολο $X \subset N^n$λέγεται βασικό αναδρομικό (β.α.) αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση c_x είναι βασική αναδρομική συνάρτηση.

Κάθε "απλό" υποσύνολο του N είναι β.α. ,όπως το σύνολο των αρτίων, το σύνολο των πρώτων κ.ο.κ. Οι σχέσεις $=, \leq, \geq, <, >$

είναι β.α. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά την βασική αναδρομικότητα της ισότητας.

Ορίζουμε

$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, \text{ αν } y \leq x \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$

1. Το F είναι το ελάχιστο σύνολο με τις ιδιότητες (1)-(5). Άρα αφού το σύνολο των υπολογίσιμων έχει τις ιδιότητες (1)-(5) θα είναι υπερσύνολο του F. Αυτή είναι μια "καμουφλαρισμένη" μορφή επαγωγής.

Η συνάρτηση $\dot{-}$ είναι β.α. μιας και ορίζεται αναδρομικά ως :
$x \dot{-} 0 = x$
$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y)^o$
όπου η ^{o}είναι η συνάρτηση του "προηγουμένου" και ορίζεται αναδρομικά ως :
$0^o = 0$
$(x+1)^o = x$
Ορίζουμε ακόμα :
$x' = \{ {}^{1,\text{ αν } x=0}_{0,\text{ αν } x>0}$
η οποία έχει τον εξής αναδρομικό ορισμό :
$0' = 1$
$(x+1)' = 0$
Τώρα $c_=(x,y) = |x-y|'$ (η απόλυτη τιμή είναι αναδρομική συνάρτηση ως άθροισμα των $x \dot{-} y$ και $y \dot{-} x$)

Θεώρημα

Το συμπλήρωμα , η τομή και η ένωση πεπερασμένου πλήθους β.α. συνόλων είναι β.α. σύνολο.

Απόδειξη
Για το συμπλήρωμα $\bar{X}$ του Χ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $c_{\bar{x}} = (c_X)'$
Ορίζουμε τώρα β.α. sgn τέτοια ώστε :
$sgn(0) = 0$
$sgn(x+1) = 1$
Για την ένωση έχουμε : $c_{X_1 \cup \ldots \cup X_n} = sgn(c_{X_1} + \ldots + c_{X_n})$
Για την τομή έχουμε : $c_{X_1 \cap \ldots \cap X_n} = c_{X_1} \cdot \ldots \cdot c_{X_n}$.

Ένα ερώτημα το οποίο καλούμαστε τώρα να απαντήσουμε είναι αν οι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις που ορίσαμε πάνω ενσαρκώνουν τη διαισθητική έννοια της υπολογίσιμης συνάρτησης ή αν πρέπει να προσθέσουμε και άλλες.
Η απάντηση είναι πως οι παραπάνω κανόνες δεν αρκούν και το επιχείρημα είναι αρκετά απλό στην ουσία του. Σκιαγραφούμε την ιδέα. Όπως είδαμε κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση f έχει μια "συνταγή", η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ τέτοια ώστε κάθε f_j να είναι ενός εκ των τύπων (1),(2) ή (3), ή ορίζεται από προηγούμενες συναρτήσεις με χρήση των κανόνων (4) και (5) και $f_n = f$. Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $(,), ', 'S, Z, I_k^n, cn$ (για τη σύνθεση),rec (για την αναδρομή) μπορούμε να περιγράψουμε τη συνταγή σαν πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων από ένα αριθμήσιμο λεξιλόγιο. Τώρα παραθέτουμε όλες τις ακολουθίες λεξικογραφικά και διαγράφουμε βήμα-βήμα αυτές που δεν είναι γνήσιες συνταγές, πράγμα το οποίο μπορεί να γίνει αλγοριθμικά. Μένουμε με μια λίστα των συνταγών όλων των βασικών αναδρομικών συναρτήσεων (κάποιες συνταγές μας δίνουν την ίδια συνάρτηση αλλά αυτό δεν μας πειράζει). Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $\delta(n) = f_n(n) + 1$, όπου f_n η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη n –οστή συνταγή της λίστας. Η δ είναι προφανώς υπολογίσιμη. Για να υπολογίσουμε το $\delta(n)$ πρέπει απλά να ανατρέξουμε στη n –οστή συνταγή της λίστας και να υπολογίσουμε σύμφωνα με αυτήν , την τιμή $f_n(n)$. Έπειτα προσθέτουμε 1. Από την άλλη η δ δεν μπορεί να είναι βασική αναδρομική καθώς τότε θα έπρεπε να ισούται με κάποια f_d, μιας και η λίστα μας περιλαμβάνει συνταγές για όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις. Αλλά εκ κατασκευής $\delta(d) = f_d(d) + 1 \neq f_d(d)$. Άρα δεν έχουμε φτάσει στο επιθυμητό σημείο ακόμα. Αυτό που χρειαζόμαστε στην πραγματικότητα είναι ακόμα ένας

κανόνας.

Έστω $P(\vec{x},y)$ κατηγόρημα και έστω ότι ισχύει (δηλαδή είναι αληθής στη δομή των φυσικών) η $\forall \vec{x}\ \exists y P(\vec{x},y)$, τότε
$\mu y P(\vec{x},y) =$ "το ελάχιστο y τέτοιο ώστε $P(\vec{x},y)$".

Ορίζουμε τώρα την κλάση των αναδρομικών συναρτήσεων. Η κλάση των αναδρομικών συναρτήσεων είναι η μικρότερη κλάση αριθμητικών συναρτήσεων που είναι κλειστή για τους κανόνες (1)-(6) όπου ο 6ος κανόνας είναι ο κάτωθι :

6. Αν G αναδρομική συνάρτηση τότε η $g(\vec{x}) = \begin{cases} \mu y(G(\vec{x},y)=0) \text{ ,αν υπάρχει τέτοιο } y \\ \text{δεν ορίζεται , αλλιώς} \end{cases}$ είναι επίσης αναδρομική. Θα λέμε ότι η g ορίζεται μέσω ελαχιστοποίησης από την G.

Όμοια με πριν θα λέμε ότι ένα υποσύνολο $X \subset N^n$ είναι αναδρομικό αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι αναδρομική.

Προφανώς κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη. Μένει να δούμε αν ο νέος κανόνας που προσθέσαμε μας κρατά εντός του πεδίου των υπολογίσιμων συναρτήσεων. Πράγματι , για να υπολογίσουμε το $g(\vec{x})$ για κάποιο $\vec{x} \in dom g$ υπολογίζουμε διαδοχικά τις τιμές $G(\vec{x},0), G(\vec{x},1),\ldots, G(\vec{x},n),\ldots$ μέχρι να υπολογίσουμε την τιμή 0. Τότε ορίζουμε σαν $g(\vec{x})$ την τιμή n για την οποία μηδενίστηκε η G. Ο παραπάνω αλγόριθμος δείχνει ότι μένουμε εντός του πεδίου των υπολογίσιμων συναρτήσεων εφαρμόζωντας τον κανόνα 6. Σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη. Η θέση του Church , που αναφέραμε στην εισαγωγή ,είναι ο ισχυρισμός πως ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή όλες οι υπολογίσιμες συναρτήσεις είναι αναδρομικές. Χρησιμοποιώντας τη θέση του Church , έχουμε μια σύντομη οδό για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι αναδρομική. Απλά υποδεικνύουμε έναν αλγοριθμικό τρόπο υπολογισμού της, δηλαδή δείχνουμε ότι είναι υπολογίσιμη , και επικαλούμενοι τη θέση του Church καταλήγουμε πως είναι αναδρομική. Φυσικά αυτό δεν συνιστά αυστηρή απόδειξη και για αυτό κρίνεται αναγκαίο , στα πρώτα βήματα τουλάχιστον, να παρουσιάζουμε και το αυστηρό ανάλογο κάθε επιχειρήματος που χρησιμοποιεί τη θέση του Church. Οι λεπτομέρειες είναι κοπιαστικές αλλά δεν έχουν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Από ένα σημείο και μετά γίνεται εμφανές πως μπορούν να συμπληρωθούν. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει ένα παρόμοιος τρόπος για να πειστούμε πως μια συνάρτηση είναι βασική αναδρομική. Η απάντηση είναι καταφατική. Μια βασική αναδρομική συνάρτηση είναι απλά κάποια συνάρτηση που ορίζεται μέσω των αρχικών συναρτήσεων με επανειλημμένες χρήσεις συνθέσεων και αναδρομής. Εκεί που πρέπει να εστιάσουμε είναι στην αναδρομή. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση παραγοντικού που έχει αναδρομικό ορισμό :

$0! = 1$

$(Sy)! = y! \times Sy$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της στο n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο :

1. $fact := 1$
2. $for\ y = 0\ to\ n-1$
3. $\quad fact := (fact \times Sy)$
4. $Loop$

Επομένως η αναδρομή αντιστοιχεί ουσιαστικά σε έναν απλό βρόχο "for". Η σύνθεση αντιστοιχεί απλά στο να δώσουμε το εξαγόμενο μιας ρουτίνας σαν είσοδο σε μια άλλη υπορουτίνα. Για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $(y^x)!$ στο $(4,5)$,τότε απλά υπολογίζουμε το $\exp := 4^5$ και τρέχουμε την υπορουτίνα του παραγοντικού για $n = \exp$. Τώρα η συνάρτηση $\times$ έχει επίσης αναδρομικό ορισμό μέσω της συνάρτησης $+$, η οποία με τη σειρά της έχει αναδρομικό ορισμό μέσω της συνάρτησης S. Με άλλα λόγια , η συνάρτηση παραγοντικού υπολογίζεται με φωλιασμένους βρόχους "for" , χρησιμοποιώντας μόνο αρχικές συναρτήσεις.Το επιχείρημα φυσικά μπορεί να γενικευθεί και το αντίστροφο αληθεύει επίσης. Αν έχουμε έναν βρόχο "for" που υπολογίζει την τιμή μιας συνάρτησης f για δοσμένα ορίσματα και έχει δύο υπορουτίνες , μια για να υπολογίσει κάποια συνάρτηση h (που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει την $f(\vec{x},0)$) και η άλλη για να υπολογίσει μια συνάρτηση g (που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει κάθε επόμενη τιμή της f), τότε αυτή η αλγοριθμική ρουτίνα εμφανώς αντιστοιχεί σε ορισμό μέσω αναδρομής. Γενικά αν μια συνάρτηση υπολογίζεται μέσω ενός προγράμματος μόνο με χρήση βρόχων "for" , και οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα είναι β.α. , τότε και η νέα συνάρτηση θα είναι βασική αναδρομική. Επομένως για να δούμε αν μια συνάρτηση είναι βασική αναδρομική αρκεί να σκιαγραφήσουμε μια αλγοριθμική ρουτίνα που να χρησιμοποιεί βρόχους "for" και να υπολογίζει τη συνάρτηση καλώντας ήδη γνωστές βασικές αναδρομικές συναρτήσεις. Η ελαχιστοποίηση αντιστοιχεί στον βρόχο "while" αλλά αυτό δεν θα το χρειαστούμε.

1.2 Μηχανές Turing

Θα περιγράψουμε τώρα την εκδοχή του Turing για την έννοια του "μηχανικά" υπολογίσιμου, την μηχανή Turing. Η μηχανή είναι φυσικά θεωρητική, ένα μαθηματικό αντικείμενο, με την έννοια ότι δεν υπόκειται σε χρονικούς ή χωρικούς περιορισμούς.

Ορισμός

Μια μηχανή Turing :

1)Έχει ένα πεπερασμένο πλήθος εσωτερικών καταστάσεων.

2)Περιέχει μια ταινία άπειρου μήκους χωρισμένη σε κελιά, καθένα από τα οποία περιέχει κάποιο απο τα σύμβολα 0 ή 1 και μπορούμε να φανταστούμε ένα δρομέα που διαβάζει το τρέχον κελί.

3)Πριν η μηχανή ξεκινήσει , και μετά απο κάθε βήμα, μια εσωτερική κατάσταση είναι η τρέχουσα κατάσταση και ένα κελί είναι το κελί που διαβάζει ο δρομέας. Η τωρινή κατάσταση μαζί με το τρέχον κελί συνιστούν την ολική κατάσταση (configuartion) της μηχανής σε κάθε βήμα.

4)Η μηχανή ξεκινάει απο την εσωτερική κατάσταση q_0 και ο δρομέας βρίσκεται σε κάποιο κελί και προχωρά σε διακριτά βήματα. Η δράση της μηχανής σε κάθε βήμα συνίσταται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος έχει να κάνει με την αλλαγή της εσωτερικής κατάστασης σε κάποια από τις υπόλοιπες (μπορεί να παραμείνει και στην ίδια κατάσταση). Το δεύτερο μέρος αποτελείται απο 4 ενδεχόμενα : Αλλαγή του αριθμού του τρέχοντος κελιού, μετακίνηση του δρομέα αριστερά , μετακίνηση του δρομέα δεξιά ή παύση του υπολογισμού μέσω μετάβασης σε μια τελική κατάσταση.

Αυτός ο ορισμός είναι περισσότερο μηχανικός παρά μαθηματικός. Αν θέλουμε να είμαστε σχολαστικοί μπορούμε να πούμε ότι η μηχανή Turing αποτελείται από τα σύνολα :

$A = \{0,1\}, S = \{0,1,R,L\}$ (R="right", L="left") , $K = \{q_0, q_1, \dots, q_k\}, H \subseteq K$, το σύνολο των τελικών καταστάσεων (συνήθως μονοσύνολο)

και μια απεικόνιση δ από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(K-H) \times A$ στο $S \times K$, που αναπαριστά τη συνάρτηση μετάβασης για την οποία μιλούσαμε στο 4.

Περιγράφουμε τώρα πως μια μηχανή Turing M εκτελεί υπολογισμούς σαν μερική συνάρτηση f_M για δοθέν όρισμα. Έστω M μηχανή Turing και έστω ότι μας δίνεται σαν όρισμα η k-άδα $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$. Για να εισαγάγουμε το όρισμα στη μηχανή ξεκινάμε από κάποιο κελί και δημιουργούμε $(x_1 + 1)$ μονάδες. Αφήνουμε το επόμενο κελί ως έχει, δηλαδή με το σύμβολο 0, και συνεχίζουμε δημιουργώντας $(x_2 + 1)$ μονάδες κ.ο.κ. Ξεκινάμε να "τρέχουμε" το πρόγραμμα της μηχανής και όταν και αν σταματήσει μετράμε το πλήθος των μονάδων στη μηχανή. Αυτό είναι το $f_M(x_1,x_2,\ldots,x_k) + 1$. Για παράδειγμα μια μηχανή Turing που υπολογίζει το άθροισμα δύο θετικών ακεραίων για το όρισμα 1111101111 θα δώσει 8 άσσους αφού 4+3=7. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε έναν παραπάνω άσσο για να αναπαραστήσουμε τα ορίσματα και τα εξαγόμενα αποτελέσματα είναι επειδή πρέπει με κάποιον τρόπο να αναπαραστήσουμε το 0. Άρα την απλούστερη συμβολοσειρά "1" την κρατάμε για το 0, τη συμβολοσειρά "11" για το 1 κ.ο.κ.

Ορισμός

Μια συνάρτηση k μεταβλητών που μπορεί να υπολογιστεί από μια μηχανή Turing ονομάζεται αναδρομική.

Είναι προφανές , όπως και στην προηγούμενη ενότητα , πως κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι υπολογίσιμη. Αν υπάρχει μια μηχανή Turing που υπολογίζει μια συνάρτηση τότε ακολουθώντας βήμα-βήμα για συγκεκριμένο όρισμα τις εντολές του προγράμματος , μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι η ενδιαφέρουσα και μαζί με την τετριμμένη κατεύθυνση συνιστούν τη θέση του Turing. Χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο όρο για να χαρακτηρίσουμε τις κατά Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις επειδή στην πραγματικότητα ορίζουν την ίδια κλάση συναρτήσεων με αυτήν της προηγούμενης ενότητας. Αυτό συνεπάγεται πως οι θέσεις Church και Turing είναι ισοδύναμες και εφεξής θα αναφερόμαστε στη θέση Church-Turing. Δεν θα αποδείξουμε την ισοδυναμία των δύο μοντέλων υπολογισιμότητας που παραθέσαμε καθώς ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας. Συνεχίζουμε εισάγοντας μια ακόμα σημαντική έννοια , ασθενέστερη από την αναδρομικότητα, που θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στο κεφάλαιο 7.

Ορισμός

Ένα σύνολο $A \subseteq N$ λέγεται αναδρομικά απαριθμήσιμο αν ικανοποιεί μια από τις κάτωθι ισοδύναμες συνθήκες :

Θεώρημα

(α)Το A είναι το πεδίο ορισμού μιας αναδρομικής συνάρτησης
(β)Το A είναι το πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης
(γ)Το A είναι το πεδίο τιμών μιας ολικής αναδρομικής συνάρτησης
(δ)$A = \{y|\exists x[(x,y) \in R]\}$, για κάποια αναδρομική σχέση R.

Απόδειξη

(α)⇒(β) : Έστω ότι το A είναι το πεδίο ορισμού μιας αναδρομικής συνάρτησης φ_w. Τροποποιούμε την μηχανή Turing M_w ως εξής : δοθέντος x, εκτελούμε τον υπολογισμό που εκτελεί η M_w, αλλά κρατάμε ένα "αντίγραφο" του x. Αν και όταν σταματήσει η μηχανή , αλλάζουμε το αποτέλεσμα από $\varphi_w(x)$ σε x. Προφανώς αυτή η μηχανή υπολογίζει μια μερικά αναδρομική συνάρτηση με $g(x) = x$ και $Rng(g) = Dom(g) = A$

(β)⇒(γ) : Έστω ότι το A είναι το πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης φ. Έστω c κάποιο στοιχείο του A. Δοθέντος x, υπολογίζουμε τους αριθμούς x_1,x_2 που είναι τέτοιοι ώστε $B_2(x_1,x_2) = x$, όπου B_2 η συνάρτηση ζεύγους. Έπειτα εκτελούμε τον υπολογισμό του $\varphi(x_1)$ για x_2 βήματα. Αν σταματήσει ο υπολογισμός έχουμε σαν εξαγόμενο το $\varphi(x_1)$, ειδάλλως έχουμε σαν εξαγόμενο το c.
Προφανώς η μηχανή υπολογίζει μια αναδρομική συνάρτηση με $Rng(g) \subseteq$ A. Αν πάλι θεωρήσουμε $y \in A$, τότε υπάρχει x_1 τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = y$. Αν ο προηγούμενος υπολογισμός απαιτεί x_2 βήματα , τότε $g(x) = y$, όπου $x = B_2(x_1,x_2)$.

(γ)⇒(δ) : Αν $A = \{\varphi(0),\varphi(1),\ldots\}$, τότε $A = \{y|\exists x(\varphi(x) = y)\}$. Η σχέση $\varphi(x) = y$ είναι αναδρομική διότι $c_{\varphi(x)=y}(x,y) = c_=(\varphi(I_1^2(x,y)),I_2^2(x,y))$. Γενικά αντικαθιστώντας τις μεταβλητές μιας αναδρομικής σχέσης με ολικές αναδρομικές συναρτήσεις παίρνουμε μια νέα αναδρομική σχέση.

(δ)⇒(α) : Αντιστοιχίζουμε κάθε $y \in A$ στο ελάχιστο x τέτοιο ώστε $(x,y) \in R$. Αυστηρά : $\varphi(y) = \mu x[c'_R(x,y) = 0]$, που είναι μερική αναδρομική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A, καθώς ορίζεται μέσω ελαχιστοποίησης της αναδρομικής συνάρτησης c'_R (η αναδρομική συνάρτηση $'$ ορίστηκε στο παράδειγμα της ισότητας).

Επικαλούμενοι τη θέση του Church μπορούμε να δώσουμε μια πολύ καλή διαισθητική εικόνα για τα αναδρομικά απαριθμήσιμα σύνολα. Συγκεκριμένα , είναι ακριβώς τα σύνολα για τα οποία υπάρχει ένας αλγόριθμος που να απαριθμεί τα στοιχεία του σε μορφή καταλόγου-λίστας. Πράγματι , ένα αναδρομικά απαριθμήσιμο σύνολο είναι πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης και άρα πεδίο τιμών μιας υπολογίσιμης συνάρτησης, ενός αλγορίθμου. Από την άλλη , αν έχουμε έναν αλγόριθμο που απαριθμεί τα στοιχεία του A , τότε από τη θέση του Church υπάρχει μια αναδρομική συνάρτηση που κάνει την ίδια δουλειά και άρα το A είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο (χρησιμοποιούμε τη μορφή γ).
Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα θεώρημα που συνδέει τις δύο βασικές έννοιες που πραγματευτήκαμε. Για να εξοικειωθούμε με τις έννοιες και παράλληλα με τους αυστηρούς ορισμούς δίνουμε αρχικά ένα αποδεικτικό σκετς για κάθε σκέλος και από κάτω την αυστηρή απόδειξη.

Θεώρημα Kleene[2]

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ τα κάτωθι είναι ισοδύναμα :

(α) Το A είναι αναδρομικό

(β)Τα A και $\mathbb{N} - A$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμα.

(γ)Το A είναι πεπερασμένο ή είναι πεδίο τιμών μια αύξουσας αναδρομικής συνάρτησης.

Απόδειξη

(α)⇒(β) : Αυτή η κατεύθυνση είναι τεριμμένη χρησιμοποιώντας σε διαισθητικό επίπεδο τη θέση του Church. Αν έχουμε έναν αλγόριθμο για να αποφανθούμε αν ένας τυχαίος φυσικός αριθμός ανήκει στο A τότε μπορούμε να παραθέσουμε τα στοιχεία του A σε λίστα. Απλά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο με τη σειρά σε όλους τους φυσικούς αριθμούς. Αν πάρουμε θετική απάντηση τον τοποθετούμε στη λίστα μας, ειδάλλως προχωράμε απλά στον επόμενο.

Πιο αυστηρά, έστω ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση c_A του A είναι αναδρομική. Τότε υπολογίζεται από μια μηχανή Turing M. Τροποποιούμε αυτή τη μηχανή ώστε σε περίπτωση που υπολογίσει 0 η M , τότε η νέα μηχανή θα τρέχει επ' άπειρον. Σε περίπτωση που υπολογίσει 1 η M, θα σταματάει κανονικά. Έτσι θα φτιάξουμε μια μηχανή που θα υπολογίζει μια αναδρομική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Για να το πετύχουμε αυτό προσθέτουμε τις καταστάσεις q_1,q_2,q_{halt} και τις εντολές

$\delta(q_1, 1) = (q_2, R), \delta(q_2, 0) = (q_0, L), \delta(q_2, 1) = (q_{halt}, L)$ και τροποποιούμε τις εντολές της M αντικαθιστώντας την τερματική της κατάσταση από την q_1(ώστε το πρόγραμμα να τρέξει ακριβώς τις εντολές που προσθέσαμε μετά την περάτωση του υπολογισμού της M). Η πρώτη και η δεύτερη εντολή μας εξασφαλίζουν ότι σε περίπτωση που η M υπολογίσει 0, δηλαδή τερματίσει με τη συμβολοσειρά "...0001000..." και ο δρομέας διαβάζει το 1 , τότε η νέα μηχανή θα μεταβεί στην κατάσταση q_2. Έπειτα θα διαβάσει 0, θα επιστρέψει πίσω ο δρομέας, η μηχανή θα μεταβεί πάλι στην κατάσταση q_1 διαβάζοντας 1 και άρα θα μπει σε ατέρμονα βρόγχο. Αν πάλι υπολογίσει 1, δηλαδή τερματίσει με τη συμβολοσειρά "...001100..." διαβάζοντας τον πρώτο άσσο, τότε ο δρομέας θα πάει δεξιά και η μηχανή θα μεταβεί στην κατάσταση q_2. Έπειτα θα ξαναδιαβάσει άσσο, θα πάει αριστερά και θα μεταβεί σε τερματική κατάσταση.

(β)⇒(γ) : Υποθέτουμε ότι τα A και $\mathbb{N} - A$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμα και το A είναι άπειρο. Απαριθμούμε τα A και $\mathbb{N} - A$ χρησιμοποιώντας δύο αναδρομικές συναρτήσεις. Σε κάποιο σημείο θα εμφανιστεί το 0 σε μία από τις δύο λίστες. Αν το 0 ανήκει στο Α , το τοποθετούμε στην λίστα μας. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο με τα 1,2,3 κ.ο.κ. η λίστα που θα σχηματιστεί θα είναι προφανώς αύξουσα και θα απαριθμεί όλα τα στοιχεία του Α.

Πιο αυστηρά , έστω $A = \{f(0), f(1), \dots\}$ και $\mathbb{N} - A = \{g(0), g(1), \dots\}$. Τότε $c_A(x) = c_=(f(\mu y[f(y) = x \vee g(y) = x]), x]$[3]. Με απλά λόγια ψάχνουμε το x στην $y-οστή$ θέση των A και $\mathbb{N} - A$. Επειδή τα δύο σύνολα είναι συμπληρωματικά θα υπάρχει y τέτοιο ώστε $f(y) = x \vee g(y) = x$. Ελέγχουμε για αυτό το y αν $f(y) = x$. Αν $f(y) = x$ τότε φυσικά $x \in A$. Αν $f(y) \neq x$, τότε λόγω της παραπάνω διάζευξης το x ανήκει στο συμπλήρωμα και άρα $x \notin A$.

(γ)⇒(α) : Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ανατρέχουμε την αύξουσα λίστα μας μέχρι να ξεπεράσουμε (ή να φτάσουμε) το n. Αν το φτάσουμε, τότε ανήκει στη λίστα. Ειδάλλως, αν το ξεπεράσουμε χωρίς να το φτάσουμε , δεν ανήκει. Η παραπάνω διαδικασία είναι η ζητούμενη μέθοδος απόφανσης για το αν $n \in A$.

Πιο αυστηρά έστω $A = \{f(0), f(1), \dots\}$, όπου f αύξουσα αναδρομική συνάρτηση. Τότε $c_A(x) = c_=(f(my[f(y) \geq x]), x)$.

Μέχρι στιγμής δεν αναφέραμε κάποιο αναδρομικά απαριθμήσιμο σύνολο που δεν είναι αναδρομικό. Για την ακρίβεια δεν αναφέραμε καν κάποιο σύνολο που δεν είναι αναδρομικό. Χρειάζεται τέχνη για να κατασκευάσουμε τέτοια σύνολα. Μάλιστα η κατασκευή αυτών των συνόλων συνδέεται στενά με κάποιες αποδείξεις των θεωρημάτων μη πληρότητας.
Τα κεφάλαια 3 και 7 θα ρίξουν φως σε αυτές τις προσεγγίσεις. Στο επόμενα κεφάλαια θα δούμε πως υπεισέρχονται αυτές οι έννοιες της υπολογισιμότητας στην ενασχόληση μας με τις θεωρίες τις αριθμητικής και συγκεκριμένα με την πιο διαδεδομένη εξ αυτών, την Peano Αριθμητική.

2. Το θεώρημα το Kleene είναι η ισοδυναμία των (α) και (β), το (γ) απλά χρησιμεύει σαν ενδιάμεσος κρίκος για την κατεύθυνση (β)⇒(α) και εκτός αυτού θα το χρησιμοποιήσουμε στο κεφάλαιο 3.

3. Χρησιμοποιήσαμε ελαχιστοποίηση στη σχέση $f(y) = x \vee g(y) = x$, ενώ ο αρχικός ορισμός μας επιτρέπει ελαχιστοποιήσεις σε σχέσεις της μορφής $G(\vec{x}, y) = 0$, όπου G αναδρομική συνάρτηση. Αυτό δεν είναι πρόβλημα. Η σχέση $f(y) = x$ είναι αναδρομική διότι προκύπτει ως σύνθεση της αναδρομικής σχέσης της ισότητας με την αναδρομική συνάρτηση f και τη συνάρτηση προβολής : $= (f(I_2^2(x,y)), I_1^2(x,y))$. Ομοίως και η $g(y) = x$. Η διάζευξη δύο αναδρομικών σχέσεων μας δίνει αναδρομική συνάρτηση. Πράγματι, $c_{R_1 \vee R_2}(x) = sgn(c_{R_1}(x) + c_{R_2}(x))$. Έστω c η χαρακτηριστική συνάρτηση της $f(y) = x \vee g(y) = x$. Τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε $c_A(x) = c_=(f(\mu y[c'(y) = 0]), x]$.

2.0 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να κωδικοποιήσουμε τις εκφράσεις της γλώσσας μας με αριθμούς, ένα κομβικό σημείο για την πορεία που ακολούθησε ο Godel για να αποδείξει τα θεωρήματα μη πληρότητας. Η πρωτότυπη ιδέα του Godel ήταν να αντιστοιχίσει εκφράσεις της τυπικής γλώσσας με αριθμητικούς κώδικες και έπειτα χρησιμοποιώντας την αριθμητική να μπορέσει να μιλήσει με έμμεσο τρόπο για τις εκφράσεις αυτές μέσω των αριθμητικών κωδικών τους. Σήμερα φυσικά η ιδέα ότι η πληροφορία εν γένει μπορεί να κωδικοποιηθεί με δυαδικούς αριθμούς είναι ευρέως γνωστή λόγω της εξοικείωσης μας με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Στη δεκαετία του 1920 όμως η παραπάνω ιδέα ήταν ρηξικέλευθη. Με αυτήν την κωδικοποίηση θα ασχοληθούμε στην πρώτη ενότητα. Στις άλλες δύο θα αποδείξουμε τη βασική αναδρομικότητα της σχέσης $prf(m,n)$ που αληθεύει όταν ο m κωδικοποιεί κάποια απόδειξη του τύπου με κωδικό n, ένα πολύ σημαντικό ενδιάμεσο αποτέλεσμα. Στην πρώτη δίνουμε απλά ένα αποδεικτικό σκετς ,βασισμένο στη διαίσθηση που έχουμε για τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις (υπολογίσιμες με βρόχους "for"), και στη δεύτερη δίνουμε αυστηρές αποδείξεις.

2.1 Αριθμητικοποίηση της σύνταξης

Θα ξεκινήσουμε με την αριθμητικοποίηση των εκφράσεων. Για αυτό χρειαζόμαστε εν πρώτοις μια αρίθμηση των συμβόλων της τυπικής γλώσσας μας. Έστω η ακόλουθη αρίθμηση :

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	$=$	$($	$)$	0	S	$+$	$\times$	x	y	z	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	2	4	6	...

Δίνουμε τώρα τον παρακάτω ορισμό για τον αριθμό Godel μιας έκφρασης.

Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι e είναι μια έκφραση $k+1$ συμβόλων $s_0, s_1, \ldots, s_k$. Τότε ο αριθμός Godel της έκφρασης e υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον κώδικα c_i καθενός s_i σαν εκθέτη στον $(i+1)$-οστό πρώτο αριθμό p_i και πολλαπλασιάζοντας τα αποτελέσματα , δηλαδή : $2^{c_0} \cdot 3^{c_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{c_k}$.

Λόγω του του θεμελιώδους θεωρήματος της αριθμητικής κάθε αριθμός κωδικοποιεί το πολύ μια έκφραση της γλώσσας. Με άλλα λόγια η συνάρτηση κωδικοποίησης είναι 1-1. Επίσης είναι θέμα αλγοριθμικής ρουτίνας η κωδικοποίηση μιας έκφρασης και η αποκωδικοποίηση ενός αριθμού Godel.

Για παράδειγμα ο αριθμός Godel της έκφρασης $S0+x=y$ είναι $2^{23} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot 7^{2} \cdot 11^{15} \cdot 13^{4}$.

Συνεχίζουμε με την αριθμητικοποίηση ακολουθιών εκφράσεων.

Ορισμός

Δοθείσης μιας ακολουθίας εκφράσεων $e_0, e_1, \ldots, e_n$ κωδικοποιούμε αρχικά καθένα από τα e_i με ένα αριθμό Godel g_i και σχηματίζουμε την ακολουθία $g_0, g_1, \ldots, g_n$. Τότε κωδικοποιούμε αυτήν την ακολουθία χρησιμοποιώντας το ίδιο τρικ με προηγουμένως , δηλαδή ως :
$2^{g_0} \cdot 3^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{g_n}$. Ο τελευταίος αριθμός ονομάζεται αριθμός Godel της ακολουθίας $\{e_i\}_{i=1}^{n}$.

2.2 Η σχέση $prf(m,n)$ είναι β.α.

Ορισμός

Ορίζουμε τα κατηγορήματα/τις ιδιότητες :

1. $Term(n)$: ισχύει όποτε το n κωδικοποιεί όρο της γλώσσας L_A.
2. $Wff(n)$: ισχύει όποτε το n κωδικοποιεί έναν τύπο της γλώσσας L_A.
3. $Sent(n)$: ισχύει όποτε το n κωδικοποιεί μια πρόταση της γλώσσας L_A.

καθώς και τη σχέση :

4. $prf(m,n)$: ισχύει όποτε το n κωδικοποιεί μια απόδειξη της πρότασης με αριθμό Godel n.

Εν συνεχεία δείχνουμε , όχι αυστηρά , ότι οι παραπάνω ιδιότητες είναι βασικές αναδρομικές καθώς και ότι η σχέση $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική.

Θεώρημα

Οι ιδιότητες 1,2,3 είναι βασικές αναδρομικές.

Αποδεικτικό σκετς

Δείχνουμε ότι η ιδιότητα $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική. Οι άλλες δύο προκύπτουν με παρόμοιο σκεπτικό. Για να ελέγξουμε αν ισχύει η $Term(n)$ εργαζόμαστε ως ακολούθως. Αποκωδικοποιούμε το n , αυτό είναι θέμα αλγοριθμικής ρουτίνας. Έπειτα ρωτάμε αν είναι το 0, μια μετάβλητη ή αν μπορεί να κατασκευαστεί από το 0 και τις μεταβλητές με χρήση του διαδόχου και των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης. Αυτό είναι επίσης αλγοριθμικά υπολογίσιμο. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται να πραγματοποιηθεί με "φραγμένους" for βρόγχους, πράγμα που συνεπάγεται ότι η ιδιότητα $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική.

Θεώρημα

Η σχέση $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική σχέση.

Αποδεικτικό σκετς

Για να ελέγξουμε αν ισχύει η $prf(m,n)$ εργαζόμαστε ως ακολούθως. Αποκωδικοποιούμε (

δύο φορές) το m και ρωτάμε αν αυτό που προκύπτει είναι ακολουθία καλά σχηματισμένων τύπων. Αυτό είναι αλγοριθμικά υπολογίσιμο. Έπειτα ρωτάμε αν η εν λόγω ακολουθία αποτελεί ορθά κατασκευασμένη αποδεικτική ακολουθία. Αυτό είναι επίσης αλγοριθμικά υπολογίσιμο. Εν συνεχεία ρωτάμε αν ο τελευταίος τύπος της ακολουθίας έχει αριθμό Godel n και τέλος αν η $Sent(n)$ αληθεύει. Εν κατακλείδι υπάρχει μια αλγοριθμική μέθοδος για να αποφανθούμε αν η $prf(m,n)$ αληθεύει. Επιπλέον σε κάθε βήμα ο υπολογισμός που εμπλέκεται μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με "for" βρόγχους.

2.2 Παράρτημα *

Παρακάτω ,χάριν πληρότητας, θα δώσουμε αυστηρές αποδείξεις για τους διαισθητικούς ισχυρισμούς μας στην προηγούμενη ενότητα. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική σχέση. Όπως μπορεί κανείς να συμπεράνει από τον όγκο του παραρτήματος το παραπάνω εγχείρημα δεν είναι εύκολο. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει κάτι "βαθύ" σε όσα θα ακολουθήσουν. Ο αναγνώστης που βιάζεται να διεισδύσει στην ουσία του επιχειρήματος του Godel μπορεί κάλλιστα να παραλείψει αυτό το παράρτημα χωρίς να έχει πρόβλημα στην κατανόηση των όσων θα ακολουθήσουν. Για να φτάσουμε στη βασική αναδρομικότητα της $prf(m,n)$, είναι απαραίτητη μια αλυσίδα αποδείξεων για τη βασική αναδρομικότητα πολλών άλλων συναρτήσεων. Ξεκινάμε λοιπόν :

Ορισμός

$f(n) = (\mu x \leq n)P(x) =$ "το ελάχιστο $x \leq n$ που έχει την ιδιότητα P, ειδάλλως αν κανένα $x \leq n$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα ,τότε $f(n) = n$".

Θεώρημα

Α. Αν $f\ (\vec{x})$ είναι μια β.α. συνάρτηση n μεταβλητών τότε η αντίστοιχη σχέση $R(x,y) =_{def} f(x) = y$ είναι βασική αναδρομική σχέση.
Β.Κάθε boolean συνδυασμός βασικών αναδρομικών σχέσεων είναι βασική αναδρομική σχέση.
Γ. Κάθε ιδιότητα (ή σχέση) ορισμένη από μια βασική αναδρομική ιδιότητα (ή σχέση) με πρόθημα κάποιον φραγμένο ποσοδείκτη είναι βασική αναδρομική ιδιότητα (ή σχέση).
Δ.Αν P είναι μια βασική αναδρομική ιδιότητα , τότε η συνάρτηση $f(n) = (\mu x \leq n)P(x)$ είναι βασική αναδρομική. Γενικότερα αν $g(n)$ είναι μια βασική αναδρομική συνάρτηση και P είναι μια βασική αναδρομική ιδιότητα τότε
η συνάρτηση $f'(n) = (\mu x \leq g(n))P(x)$ είναι βασική αναδρομική.

Απόδειξη

Α. Χάριν απλότητας στο συμβολισμό θεωρούμε συνάρτηση μίας μεταβλητής. Απλά παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση αυτής της σχέσης είναι η $c(x,y) = |f(x) - y|'$ η οποία είναι βασική αναδρομική ως σύνθεση βασικών αναδρομικών

συναρτήσεων.
Β.$c_{\neg P}(x) = c_P(x)', c_{P \wedge Q}(x) = c_P(x) \cdot c_Q(x)$
Γ.Έστω $p(x)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της βασικής αναδρομικής ιδιότητας P. Θέλουμε να δείξουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της ιδιότητας $K(n) = (\forall x \leq n)Px$. Έστω $h(u,v) = (p(Su) \times v)$. Ορίζουμε τη β.α. συνάρτηση k :
$k(0) = p(0)$
$k(Sy) = h(y, k(y))$
Έτσι $k(n) = p(n) \times p(n-1) \times \ldots \times p(0) = c_K$. Άρα η Κ είναι βασική αναδρομική ιδιότητα.
Τώρα λ.χ. για την ιδιότητα $K'(n) = (\forall x \leq g(n))Px$ παρατηρούμε ότι $c_{K'}(n) = c_K(g(n))$ άρα η c_K είναι β.α. ως σύνθεση βασικών αναδρομικών συναρτήσεων. Η περίπτωση του υπαρκτικού ποσοδείκτη προκύπτει αναλόγως.
Δ.Έστω $A(n) = (\exists x \leq n)Px$. Ορίζουμε p όπως στο Γ , $a = c_A$ και θεωρούμε τη συνάρτηση :
$f(0) = 0$
$f(n) = a'(n-1) + a'(n-2) + \ldots + a'(0)$

Ας σκεφτούμε γιατί $f(n) = (\mu x \leq n)P(x)$. Ας υποθέσουμε ότι το ελάχιστο $x \leq n$ που έχει την ιδιότητα P είναι κάποιο j. Τότε $a(i) = 0$ για $i < j$ αφού η $A(i)$ είναι ψευδής και άρα $a'(i) = 1$ για $i < j$. Επίσης $a(i) = 1$ για $i \geq j$ αφού η $A(i)$ είναι αληθής και άρα $a'(i) = 0$. Επομένως $f(n) = 1 + 1 + \ldots + 1$ (j φορές) $= j$.

Τέλος , για να δείξουμε αυστηρά ότι η f είναι β.α. ορίζουμε $h'(u,v) = a'(u) + v$ και παίρνουμε τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό της f :

$f(0) = 0$
$f(Sy) = h'(y, f(y))$.

Θεώρημα

α.Η σχέση $m|n$ είναι βασική αναδρομική.
β.Η σχέση $prime(n)$ που αληθεύει όποτε ο n είναι πρώτος είναι βασική αναδρομική.
γ.Η συνάρτηση $\pi(n)$ που η τιμή της είναι ο $n - οστός$ πρώτος είναι βασική αναδρομική.
δ.Η συνάρτηση $\exp(n,i)$ που δίνει τον εκθέτη του $i - οστού$ πρώτου στη παραγοντοποίηση του n είναι βασική αναδρομική.
ε.Η συνάρτηση $len(n)$ που δίνει το πλήθος των πρώτων παραγόντων του αριθμού n είναι βασική αναδρομική.

Απόδειξη

α.$m|n \leftrightarrow (\exists y \leq n)(0 < y \wedge 0 < m \wedge m \times y = n)$. Η σχέση που εκφράζει ο τύπος μετά τον ποσοδείκτη είναι β.α. ως boolean
συνδυασμός β.α. σχέσεων. Από το Γ του προηγούμενου θεωρήματος έπεται ότι η σχέση $m|n$ είναι β.α.
β.$prime(n) \leftrightarrow n \neq 1 \wedge (\forall u \leq n)(\forall v \leq n)(u \times v = n \rightarrow (u = 1 \vee v = 1))$. Επιχειρηματολογούμε αναλόγως.
γ.Θεωρούμε τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό :
$\pi(0) = 2$
$\pi(Sn) = (\mu x \leq \pi(n)! + 1)(\pi(n) < x \wedge prime(x))$
Εδώ χρησιμοποιούμε το ότι ο $n + 1 - οστός$ πρώτος είναι μικρότερος από $\pi(n)! + 1$, που είναι ουσιαστικά η απόδειξη του

Ευκλείδη για την απειρία των πρώτων.

δ.$\exp(n,i) = (\mu x \leq n)\{(\pi^x(i)|n) \wedge \neg(\pi^{x+1}(i)|n)\}$

ε.Έστω η βασική αναδρομική σχέση $prime(m) \wedge m|n$ και $pf(m,n)$ η χαρακτηριστική της συνάρτηση. Έτσι :

$len(n) = p(0,n) + p(1,n) + \ldots + p(n,n)$. Ο αναδρομικός ορισμός μπορεί να δοθεί ως εξής :

$l(x,0) = p(0,x)$

$l(x,Sy) = (p(Sy,x) + l(x,y))$

και τέλος $len(n) = l(n,n)$.

Θεώρημα

Υπάρχει μια συνάρτηση παράθεσης $\star$ που είναι βασική αναδρομική και είναι τέτοια ώστε ο $m \star n$ να είναι ο αριθμός Godel της έκφρασης που προκύπτει από την παράθεση της έκφρασης με αριθμό Godel m και της έκφρασης με αριθμό Godel n.

Απόδειξη

Έστω m και n αριθμοί Godel με $len(m) = j$ και $len(n) = k$. Ορίζουμε :

$m \star n = (\mu x \leq B_{m,n})[(\forall i < len(m))\{\exp(x,i) = \exp(m,i)\} \wedge (\forall i < len(n))\{\exp(x,i + len(m)$

σαν $B_{m,n}$ αρκεί να επιλέξουμε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό για τους σκοπούς μας π.χ. τον $\pi(m+n)^{m+n}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο παραπάνω τύπος ορίζει συνάρτηση παράθεσης και εφόσον προκύπτει από boolean συνδυασμούς εκφράσεων με χρήση μόνο φραγμένων ποσοδεικτών ορίζει βασική αναδρομική συνάρτηση.

Προχωράμε με μερικά ακόμα χρήσιμα αποτελέσματα που μπορούν να αποδειχτούν εύκολα χάρη στο προηγούμενο θεώρημα :

Θεώρημα

α.Η συνάρτηση $num(n)$ που παίρνει τιμή τον αριθμό Godel του αριθμητικού $\bar{n}$ είναι βασική αναδρομική.

β.Η συνάρτηση $diag(n)$ που παίρνει σαν όρισμα έναν αριθμό n και επιστρέφει τον αριθμό Godel της διαγωνιοποίησης του τύπου φ με αριθμό Godel n είναι βασική αναδρομική. (Η διαγωνιοποίηση του φ είναι εν γένει ο τύπος $\exists y(y = \ulcorner\varphi\urcorner \wedge \varphi$)

Απόδειξη

α.Δίνουμε τον εξής αναδρομικό ορισμό :

$num(0) = \ulcorner 0 \urcorner = 2^{21}$

$num(Sx) = \ulcorner S \urcorner \star num(x) = 2^{23} \star num(x)$.

Άρα η συνάρτηση $num(n)$ είναι βασική αναδρομική.

β.$diag(n) = \ulcorner \exists y(y = \urcorner \star num(n) \star \ulcorner \wedge \urcorner \star n \star \ulcorner) \urcorner$ οπότε η $diag(n)$ είναι σύνθεση βασικών αναδρομικών συναρτήσεων και άρα βασική αναδρομική.

Έχουμε τώρα αρκετά εργαλεία για να αποδείξουμε τα θεωρήματα για τα οποία είχαμε δώσει μόλις ένα αποδεικτικό σκετς στην προηγούμενη ενότητα.

Θεώρημα

α. Η ιδιότητα $Var(n)$ που ισχύει όταν ο n είναι αριθμός Godel μιας μεταβλητής είναι βασική αναδρομική συνάρτηση.

β.Η σχέση $Term\operatorname{seq}(m,n)$ που ισχύει όταν ο m είναι αριθμός Godel μιας κατασκευαστικής ακολουθίας τύπων με τελευταίο τύπο έναν με αριθμό Godel n , είναι βασική αναδρομική. (Μια κατασκευαστική ακολουθία τύπων είναι απλά μια ακολουθία τύπων $< \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n >$ τέτοια ώστε κάθε τύπος τ_k να είναι (i) είτε το 0 , (ii)είτε μια μεταβλητή, (iii) είτε να έχει τη μορφή $S\tau_j$ για κάποιον τ_j με $j < k$,(iv) είτε να έχει τη μορφή $(\tau_i + \tau_j)$,(v) είτε να έχει τη μορφή $(\tau_i + \tau_j)$ για κάποιους τ_i, τ_j με $i,j < k$,(v) είτε να έχει τη μορφή $(\tau_i \times \tau_j)$ για κάποιους τ_i, τ_j με $i,j < k$.).

γ.Η ιδιότητα $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική.

Απόδειξη

α.Ανακαλούμε την αρίθμηση Godel και συμπεραίνουμε ότι : $Var(n) = (\exists x \leq n)(n = 2^{2x})$

β. Η $Term\operatorname{seq}(m,n)$ θα έχει την ακόλουθη μορφή (απλά συμπεριλαμβάνουμε όλες τις περιπτώσεις που προβλέπει ο ορισμός της κατασκευαστικής ακολουθίας) :

$Term\operatorname{seq}(m,n) = \exp(m, len(m) - 1) = n \wedge (\forall k < len(m))\{\exp(m,k) = \ulcorner 0 \urcorner \vee (\exists j < k)(\exp(m$

$(\exists i < k)(\exists j < k)(\exp(m,k) = \ulcorner (\urcorner \star \exp(m,i) \star \ulcorner + \urcorner \star \exp(m,j) \star \ulcorner) \urcorner) \vee$

$(\exists i < k)(\exists j < k)(\exp(m,k) = \ulcorner (\urcorner \star \exp(m,i) \star \ulcorner \times \urcorner \star \exp(m,j) \star \ulcorner) \urcorner)\}$

Η παραπάνω έκφραση είναι σύνθετη αλλά εύκολα βλέπουμε ότι ορίζει βασική αναδρομική σχέση.

γ.$Term(n) = (\exists x \leq B_n)Term\operatorname{seq}(x,n)$, όπου σαν B_n μπορούμε να επιλέξουμε ένα αρκετά μεγάλο φράγμα όπως το $B_n = \pi(l)^{nl}$, όπου $l = len(n)$. Βλέπουμε ότι δουλεύει μιας και δοθέντος ενός όρου με αριθμό Godel n ,και άρα με $l = len(n)$ σύμβολα , έχουμε σίγουρα μια κατασκευαστική ακολουθία του όρου αυτού που έχει μήκος το πολύ l και οι ενδιάμεσοι όροι είναι μήκος το πολύ l, άρα ο αριθμός Godel αυτής της ακολουθίας πρέπει να είναι μικρότερος από $(\pi(l)^n)^l$.

Το πρώτο δύσκολο βήμα έγινε. Αποδείξαμε ότι η ιδιότητα $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική. Από αυτό έπεται εύκολα ότι η ιδιότητα $Atom(n)$ που αληθεύει όποτε ο n είναι αριθμός Godel ενός ατομικού τύπου είναι επίσης βασική αναδρομική. Πράγματι ,
$Atom(n) = (\exists x \leq n)(\exists y \leq n)[Term(x) \wedge Term(y) \wedge n = (x \star \ulcorner = \urcorner \star y)]$,που επιβεβαιώνει ότι η $Atom(n)$ είναι βασική αναδρομική.

Τώρα μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο τρικ που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε ότι η $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική προκειμένου να δείξουμε ότι η ιδιότητα $Wff(n)$ (που ισχύει όταν το n κωδικοποιεί έναν τύπο) είναι βασική αναδρομική.

Συγκεκριμένα λέμε ότι μια ακολουθία τύπων $< \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n >$ είναι ακολουθία ορθά κατασκευασμένων τύπων αν κάθε τύπος φ_k είναι (i) είτε ατομικός τύπος , (ii) είτε αποτέλεσμα χρήσης κάποιου λογικού συνδέσμου σε προηγούμενο/ους τύπο/ους , (iii) είτε αποτέλεσμα χρήσης ποσοδείκτη σε κάποιον προηγούμενο τύπο της ακολουθίας. Κατ' αναλογία η σχέση $Form\operatorname{seq}(m,n)$,που ισχύει όταν το m κωδικοποιεί μια ακολουθία τύπων με τελευταίο τύπο κάποιον με αριθμό Godel n , είναι βασική αναδρομική. Έτσι η ιδιότητα

Τώρα μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο τρικ που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε ότι η $Term(n)$ είναι βασική αναδρομική προκειμένου να δείξουμε ότι η ιδιότητα $Wff(n)$ (που ισχύει όταν το n κωδικοποιεί έναν τύπο) είναι βασική αναδρομική.

Συγκεκριμένα λέμε ότι μια ακολουθία τύπων $< \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n >$ είναι ακολουθία ορθά κατασκευασμένων τύπων αν κάθε τύπος φ_k είναι (i) είτε ατομικός τύπος , (ii) είτε αποτέλεσμα χρήσης κάποιου λογικού συνδέσμου σε προηγούμενο/ους τύπο/ους , (iii) είτε αποτέλεσμα χρήσης ποσοδείκτη σε κάποιον προηγούμενο τύπο της ακολουθίας. Κατ' αναλογία η σχέση $Form\mathrm{seq}(m,n)$,που ισχύει όταν το m κωδικοποιεί μια ακολουθία τύπων με τελευταίο τύπο κάποιον με αριθμό Godel n , είναι βασική αναδρομική. Έτσι η ιδιότητα $Wff(n) = (\exists x \leq B_n) Form\mathrm{seq}(x,n)$ είναι βασική αναδρομική. Σαν B_n μπορούμε να επιλέξουμε , πάλι με το ίδιο σκεπτικό , το βασικό αναδρομικό φράγμα $\pi(l)^{nl}$.

Τέλος , δείχνουμε ότι η σχέση $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική σχέση. Οι λεπτομέρειες εξαρτώνται φυσικά από το αποδεικτικό σύστημα το οποίο έχουμε υιοθετήσει. Υποθέτουμε πως δουλεύουμε με το κλασικό αποδεικτικό σύστημα του Hilbert. Σε αυτό το σύστημα έχουμε προτασιακά αξιώματα (σχήματα) όπως το $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,όπου οι προτασιακές μεταβλητές φ και ψ μπορούν να αντικατασταθούν από οποινδήποτε τύπο της γλώσσας μας , και αξιώματα που εμπλέκουν ποσοδείκτες όπως το αξίωμα (σχήμα) : $\forall \xi \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\tau)$, όπου ο όρος τ είναι ελεύθερος για τη μεταβλητή ξ στον τύπο $\varphi(\xi)$. Οι κανόνες συναγωγής του συστήματος είναι ο κλασικός κανόνας Modus Ponens και ο κανόνας της γενίκευσης[1]. Σε αυτό το σύστημα μια απόδειξη είναι απλά μια ακολουθία τύπων $< \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n >$ όπου κάθε τύπος είναι είτε αξίωμα είτε προκύπτει από προηγούμενους τύπους με κάποιον από τους δύο συναγωγικούς κανόνες. Τώρα η σχέση $Modusponens(m,n,o)$ - που ισχύει όποτε ο τύπος με αριθμό Godel o έπεται από τους τύπους με αριθμούς Godel m και n με χρήση του Modus Ponens είναι προφανώς βασική αναδρομική, καθώς ισχύει όταν :

$$m = \ulcorner (\urcorner \star n \star \ulcorner \rightarrow \urcorner \star o \star \ulcorner) \urcorner \wedge Wff(n) \wedge Wff(o)$$

Το ίδιο ισχύει και για τον κανόνα γενίκευσης. Η σχέση $Univ(m,n)$ – που ισχύει όποτε ο n είναι αριθμός Godel ενός τύπου που αποτελεί γενίκευση του τύπου με αριθμό Godel m είναι βασική αναδρομική καθώς αληθεύει όταν :

$$(\exists x \leq n)(var(x) \wedge Wff(m) \wedge n = \ulcorner \forall \urcorner \star x \star m)$$

Η ιδιότητα $Axiom(n)$ που ισχύει όταν ο n κωδικοποιεί κάποιο λογικό ή μη λογικό αξίωμα (δηλαδή αξίωμα της PA) είναι επίσης βασική αναδρομική. Αυτή η ιδιότητα είναι σαφώς η διάζευξη όλων αυτών των αξιωμάτων. Για να δείξουμε λοιπόν ότι είναι βασική αναδρομική ιδιότητα αρκεί να ασχοληθούμε ξεχωριστά με όλα τα λογικά και τα μη λογικά αξιώματα. Αυτό είναι αρκετά κοπιαστικό και για αυτό θα δείξουμε ενδεικτικά πως θα χειριζόμασταν μερικά από αυτά. Ας πάρουμε το λογικό προτασιακό αξίωμα Π1:$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$. Η ιδιότητα $Axiom_{\Pi_1}(n)$ που αληθεύει όποτε το n κωδικοποιεί κάποιον τύπο της μορφής του σχήματος Π1 αληθεύει όποτε : $(\exists x \leq n)(\exists y \leq n)(Wff(x) \wedge Wff(y) \wedge n = x \star \ulcorner \rightarrow \urcorner \star \ulcorner (\urcorner \star y \star \ulcorner \rightarrow \urcorner \star x \star \ulcorner) \urcorner)$. Άρα είναι βασική αναδρομική. Τα περισσότερα αξιώματα μπορούμε να τα χειριστούμε με ανάλογο τρόπο. Τα μόνα αξιώματα που παρουσιάζουν κάποια δυσκολία είναι αυτά που έχουν να κάνουν με ποσοδείκτες. Ας πάρουμε για παράδειγμα το αξίωμα $\forall \xi \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\tau)$, όπου ο όρος τ είναι ελεύθερος για τη μεταβλητή ξ στον τύπο $\varphi(\xi)$. Πρέπει να κωδικοποιήσουμε κατ' αρχάς την αντικατάσταση της μεταβλητής ξ από τον όρο τ και έπειτα το γεγονός ότι ο όρος τ είναι ελεύθερος για τη μεταβλητή ξ στον τύπο $\varphi(\xi)$.

Τέλος : $prf(m,n) = \exp(m, len(m)-1) = 1 \wedge Wff(n) \wedge (\forall k < len(m) \{Axiom(\exp(m,k)) \vee$ $(\exists i \leq k)(\exists j \leq k) Modusponens(\exp(m,i), \exp(m,j), \exp(m,k)) \vee$

$(\exists j \leq k) Univ(\exp(m,j), \exp(m,k))\}$,που είναι βασική αναδρομική καθώς χτίζεται από βασικές αναδρομικές συνιστώσες δηλαδή χτίζεται με χρήσεις λογικών συνδέσμων, φραγμένων ποσοδεικτών και βασικών αναδρομικών σχέσεων και ιδιοτήτων.

3.0 Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο είναι ένα καλό σημείο να σταματήσουμε και με τα εργαλεία που έχουμε στη διάθεση μας να αποδείξουμε μια πρώιμη μορφή του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα δείξουμε ότι κάθε συνεπής, ,επαρκώς ισχυρή, αξιωματικοποιήσιμη θεωρία είναι μη πλήρης. Οι όροι που εμπλέκονται θα οριστούν αυστηρά παρακάτω. Ο λόγος για τον οποίον παρουσιάζουμε αυτό το ενδιάμεσο θεώρημα είναι διότι ο τρόπος απόδειξης του είναι ποιοτικά διαφορετικός από την απόδειξη του θεωρήματος του Godel και μας δίνει μια πολύ καθαρή εικόνα για το πως υπεισέρχεται η υπολογισιμότητα στα θεωρήματα μη πληρότητας. Κάθε διαφορετική προσέγγιση ρίχνει φως σε ένα διαφορετικό σημείο.

3.1 Πρώιμη μορφή του πρώτου θεωρήματος

Ορισμός

Μια θεωρία είναι ένα σύνολο τύπων T της γλώσσας κλειστό ως προς την αποδειξιμότητα. Δηλαδή αν $T \vdash \varphi$ τότε $\varphi \in T$.

Επειδή η αντίστροφη κατεύθυνση ισχύει πάντα, το να λέμε για έναν τύπο ότι είναι θεώρημα της θεωρίας και το να λέμε ότι ανήκει στη θεωρία είναι το ίδιο πράγμα. Επίσης λόγω του θεωρήματος πληρότητας και του θεωρήματος ορθότητας δεν αλλάζει κάτι αν απαιτήσουμε κλειστότητα ως προς το λογικό συμπέρασμα αντί για την κλειστότητα ως προς την αποδειξιμότητα.
Ξέρουμε τι σημαίνει για ένα σύνολο φυσικών να είναι αναδρομικό. Αυτό ήταν το αντικείμενο μελέτης της πρώτης ενότητας. Θέλουμε σαφώς να επεκτείνουμε αυτή τη χρήσιμη έννοια και σε άλλα σύνολα. Ο πιο φυσικός τρόπος να γίνει αυτό είναι να κωδικοποιήσουμε κατάλληλα τα στοιχεία του συνόλου με φυσικούς αριθμούς και να απαιτήσουμε το σύνολο των κωδικών που προκύπτει να είναι αναδρομικό. Ανάλογα δουλεύουμε για τον ορισμό των αναδρομικά απαριθμήσιμων συνόλων. Έτσι για ένα σύνολο τύπων δίνουμε τον παρακάτω ορισμό :

Ορισμός

Θα λέμε ότι ένα σύνολο τύπων είναι αναδρομικό (αναδρομικά απαριθμήσιμο), αν το σύνολο των αριθμών Godel των τύπων του είναι αναδρομικό (αναδρομικά απαριθμήσιμο).

Κρίνεται απαραίτητο να γίνουν ορισμένα σχόλια. Είναι εμφανές ότι , a priori τουλάχιστον , το αν ένα σύνολο τύπων είναι αναδρομικό ή όχι μπορεί να εξαρτάται από το είδος της κωδικοποίησης που επιλέξαμε. Αν επιλέγαμε ένα άλλο είδος κωδικοποίησης μπορεί κάποια σύνολα που τώρα θα θεωρούμε αναδρομικά να μην ήταν αναδρομικά με την άλλη αρίθμηση και αντίστροφα.
Αυτό είναι εν γένει αληθές για τυχαίες κωδικοποιήσεις αλλά εμείς επιβάλλαμε έναν πολύ αυστηρό περιορισμο στις όποιες πιθανές αριθμήσεις Godel μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει. Συγκεκριμένα απαιτήσαμε να υπάρχει ένα είδος αλγοριθμικότητας στην κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση. Έτσι αν έχουμε τώρα δύο αριθμήσεις Godel g και g', με την g να είναι η αρίθμηση που ορίσαμε παραπάνω, υπάρχει ένας αλγόριθμος που μας πηγαίνει από τον κωδικό μιας έκφρασης στην πρώτη αρίθμηση , έστω n, στον κωδικό της ίδιας έκφρασης στη δεύτερη αρίθμηση και αντίστροφα. Πράγματι, απλά αποκωδικοποιούμε το n , βρίσκουμε την έκφραση που προκύπτει και έπειτα υπολογίζουμε τον κωδικό της στη δεύτερη αρίθμηση.Υπάρχει

επομένως (από τη θέση του Church) μια αναδρομική συνάρτηση tr που μεταφράζει τους κωδικούς των εκφράσεων στη δεύτερη αρίθμηση στους κωδικούς της αυθεντικής μας αρίθμησης. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου των αριθμών Godel της δεύτερης αρίθμησης είναι $c_2(n) = c_1(tr(n))$. Το επιχείρημα είναι συμμετρικό. Έτσι ένα σύνολο τύπων είναι αναδρομικό με την αυθεντική αρίθμηση αν και μόνο αν είναι με κάποια καινούρια.

Ορισμός

Μια θεωρία T ονομάζεται αξιωματικοποιήσιμη αν υπάρχει αναδρομικό σύνολο προτάσεων Σ τέτοιο ώστε $T = Cn\,\Sigma$.

Θεώρημα

Για κάθε θεωρία T τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α)Η T είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη
(β)Η T είναι αξιωματικοποιήσιμη

Απόδειξη

(α)⇒(β) : Υποθέτουμε ότι η T είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη. Από το θεώρημα υπάρχει αναδρομική συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathrm{T} = \{Q_n | n \in \mathbb{N}\}$ όπου $f(n) = \ulcorner Q_n \urcorner$. Τώρα εφαρμόζουμε ένα γνωστό τρικ που οφείλεται στον Craig. Ορίζουμε μια νέα θεωρία $T' = \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$ όπου $P_n = (Q_0 \wedge Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n)$. Προφανώς η T' είναι ισοδύναμη με την Τ. Η T' είναι όμως αναδρομική καθώς χρησιμοποιώντας την f μπορούμε να κατασκευάσουμε την αύξουσα g με $g(n) = \ulcorner P_n \urcorner$. Από το (γ) του σκέλος του θεωρήματος του Kleene παίρνουμε ότι η T' είναι αναδρομική. Άρα η Τ είναι αξιωματικοποιήσιμη αφού $ConT' = T$.
(β)⇒(α) : Έστω $T = Con\Sigma$, όπου το Σ είναι αναδρομικό σύνολο. Η σχέση $prf(m, n)$ που αληθεύει όποτε το m κωδικοποιεί μια απόδειξη του τύπου με κωδικό n από το σύνολο Σ είναι βασική αναδρομική και άρα το σύνολο $T^* = \{n | \exists m[prf(m, n)]\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

Θεώρημα

Αν μια αξιωματικοποιήσιμη θεωρία T είναι συνεπής και πλήρης τότε είναι αναδρομική.

Απόδειξη

Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο των αριθμών Godel των προτάσεων της T, έστω T^* , είναι αναδρομικό. Ξέρουμε ότι το σύνολο T^* είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο από το προηγούμενο θεώρημα . Από το θεώημα του Kleene αρκεί να δείξουμε ότι και το συμπλήρωμα είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Ένας φυσικός n ανήκει στο συμπλήρωμα αν και μόνο αν δεν κωδικοποιεί πρόταση του T, που λόγω πληρότητας σημαίνει ότι ο $neg(n)$ ανήκει στο T^*. Αντίστροφα , αν ο αριθμός $neg(n)$ ανήκει στο T^*, τότε λόγω συνέπειας ο n δεν ανήκει στο T^*, δηλαδή ανήκει στο συμπλήρωμα του T^*. Συμπερασματικά ο n ανήκει στο συμπλήρωμα του T^* αν-ν ο $neg(n)$ ανήκει στο T^*. Έτσι $\overline{T^*} = \{n | \exists m[prf(m, neg(n))]\}$, πράγμα που αποδεικνύει πως το συμπλήρωμα είναι συμπληρωματικό. Το ζητούμενο έπεται.

Ενδεικτικά σημειώνουμε πόσο θα μπορούσε να απλουστευθεί η παραπάνω απόδειξη με χρήση της θέσης Church-Turing. Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η σχέση $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική σχέση αλλά αυτό όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι εύκολο να δειχθεί . Από την άλλη , ένα πολύ απλό επιχείρημα μας πείθει ότι η παραπάνω σχέση είναι υπολογίσιμη και αυτό αρκεί για τους σκοπούς μας. Πράγματι αν μας δώσουν m και n , είναι αλγοριθμική ρουτίνα να τα αποκωδικοποιήσουμε και να εξετάσουμε αν η ακολουθία τύπων που κωδικοποιεί ο m είναι γνήσια απόδειξη από το Σ του τύπου που κωδικοποιεί ο n. Άρα η σχέση $prf(m,n)$ είναι υπολογίσιμη. Τώρα θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο για να ελέγξουμε αν ο τυχαίος τύπος φ ανήκει στη θεωρία. Βρίσκουμε κατ' αρχάς τον αριθμό Godel του τύπου, έστω n. Τώρα στο $m-οστό$ βήμα του αλγορίθμου ελέγχουμε δύο πράγματα : Αν $prf(m,n)$ και αν $prf(m,neg(n))$. Λόγω πληρότητας θα υπάρχει ένας m που θα κωδικοποιεί είτε μια απόδειξη του τύπου με κωδικό n , είτε του τύπου με κωδικό $neg(n)$. Σε αυτό το βήμα επομένως θα διαπιστώσουμε αν ο τύπος με κωδικό n είναι ή δεν είναι θεώρημα. Αν $prf(m,n)$ τότε είναι. Αν $prf(m,neg(n))$ τότε λόγω συνέπειας δεν είναι. Επομένως έχουμε αλγόριθμο για να αποφανθούμε αν κάποιο n ανήκει στο T^* ή όχι. Από τη θέση Church-Turing έπεται ότι το T^* είναι αναδρομικό σύνολο ή με άλλα λόγια πως η θεωρία είναι αναδρομική.

Χρειαζόμαστε έναν τελευταίο ορισμό :

Ορισμός

Μια θεωρία T , στη γλώσσα L_A της αριθμητικής, θα λέμε ότι είναι επαρκώς ισχυρή αν για κάθε αναδρομικό σύνολο R υπάρχει τύπος $\varphi(x)$ τέτοιος ώστε :
1)$n \in R \Rightarrow T \vdash \varphi(\bar{n})$
2)$n \notin R \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\bar{n})$

Όταν κατασκευάζουμε μια θεωρία της αριθμητικής ασφαλώς θα θέλαμε να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα. Αν ακολουθούμε μια καθαρά μηχανική διαδικασία για να αποφανθούμε αν το n ανήκει στο σύνολο R , τότε θα θέλαμε η θεωρία μας να μπορεί να ακολουθήσει και να αναπαραστήσει πιστά αυτά τα βήματα. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι η Peano αριθμητική είναι μια τέτοια θεωρία.

Θεώρημα

Κάθε συνεπής, επαρκώς ισχυρή αξιωματικοποιήσιμη θεωρία είναι μη αναδρομική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η T είναι συνεπής , επαρκώς ισχυρή αξιωματική θεωρία που είναι επίσης αναδρομική και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Παραθέτουμε με λεξικογραφική σειρά όλους τους καλά σχηματισμένους τύπους με μια μεταβλητή , την "x" : $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$
Ορίζουμε το κατηγόρημα D :
Το n έχει την ιδιότητα $D \Leftrightarrow T \vdash \neg\phi_n(\bar{n})$ (*)
Το βήμα - κλειδί για την απόδειξη είναι το ακόλουθο : Η υπόθεση μας πως η θεωρία T είναι αναδρομική συνεπάγεται πως το κατηγόρημα D είναι αναδρομικό.
Πράγματι , δοθέντος n ανατρέχουμε στην παραπάνω λίστα με τους τύπους μέχρι να φτάσουμε στον n-οστό. Αντικαθιστούμε το αριθμητικό $\bar{n}$ στη θέση του x και προσθέτουμε το πρόθημα $\neg$.

Εφαρμόζοντας τον υποτιθέμενο αλγόριθμο απόφανσης για το T, αποφασίζουμε αν ο τύπος $\neg\phi_n(n)$ είναι θεώρημα ή όχι. Άρα αποφαινόμαστε για το αν αληθεύει το κατηγόρημα D για το δοθέν n. Άρα είναι υπολογίσιμο και από τη θέση Church-Turing αναδρομικό.
Εξ υποθέσεως , η θεωρία T είναι επαρκώς ισχυρή και άρα αναπαριστά το D μέσω ενός τύπου , έστω $\phi(x)$, που σαφώς βρίσκεται στην λίστα που παραθέσαμε παραπάνω. Άρα $\phi(x) = \phi_d(x)$ για κάποιο d. Τώρα είναι θέμα ρουτίνας να πάρουμε τη ζητούμενη αντίφαση. Το να πούμε ότι ο τύπος $\phi_d(x)$ αναπαριστά το D σημαίνει ότι :

Αν το n έχει την ιδιότητα D , τότε $T \vdash \phi_d(\bar{n})$ (**)

Αν το n δεν έχει την ιδιότητα D , τότε $T \vdash \neg\phi_d(\bar{n})$ (***)

Το d δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα D , λόγω των (*),(**) και της συνέπειας της θεωρίας. Αν πάλι δεν έχει την ιδιότητα καταλήγουμε λόγω των (*) και (***) σε αντίφαση.

Σαν απλό πόρισμα των παραπάνω παίρνουμε το παρακάτω :

Θεώρημα

Κάθε συνεπής , επαρκώς ισχυρή, αξιωματικοποιήσιμη θεωρία είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Κάθε συνεπής και πλήρης θεωρία είναι αναδρομική όπως αποδείξαμε. Αν είναι συνεπής και επαρκώς ισχυρή τότε είναι μη αναδρομική. Άρα αν είναι συνεπής και επαρκώς ισχυρή είναι μη πλήρης.

4.0 Εισαγωγή

Το ακόλουθο κεφάλαιο ίσως είναι αυτό που εμφανίζει τις μεγαλύτερες τεχνικές δυσκολίες. Παρακάτω θα αποδείξουμε δύο βασικά θεωρήματα :
1)Πως η L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις.
2)Πως η PA (Robinson Αριθμητική) έχει τη δυνατότητα να αναπαραστήσει όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις.

Λέμε ότι η L_A εκφράζει τη συνάρτηση f μέσω του τύπου φ της L_A αν για κάθε m, n :
(i) Αν $f(m) = n$, τότε ο τύπος $\varphi(\bar{m},\bar{n})$ είναι αληθής.
(ii) Αν $f(m) \neq n$, τότε ο τύπος $\varphi(\bar{m},\bar{n})$ είναι ψευδής.
Όμοια δουλεύουμε και για σχέσεις εν γένει.

Επιπλέον, λέμε ότι η θεωρία T αναπαριστά τη συνάρτηση f μέσω του τύπου φ αν για κάθε m, n :
(i) Για κάθε m , $T \vdash (\exists! y)\varphi(\bar{m},\bar{y})$
(ii) Αν $f(m) = n$, τότε $T \vdash \varphi(\bar{m},\bar{n})$.
(iii)Αν $f(m) \neq n$, τότε $T \vdash \varphi(\bar{m},\bar{n})$.
Όμοια ορίζουμε την αναπαραστασιμότητα μιας σχέσης.Απλά φυσικά δεν επιβάλουμε την πρώτη συνθήκη.

Αυτά τα δύο είναι μείζονος σημασίας για την απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας. Για το σκοπό αυτό η β-συνάρτηση του Godel παίζει ,όπως θα δούμε, καθοριστικό ρόλο.

4.1 Η L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα για να μη χαθούμε στις τεχνικές λεπτομέρειες. Ας πούμε ότι θέλουμε να εκφράσουμε στη γλώσσα L_A την παραγοντική συνάρτηση. Με άλλα λόγια θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο $F(x,y)$ τέτοιον ώστε :

$$F(\bar{m},\bar{n}) \iff n = m!$$

Ας θεωρήσουμε τον αναδρομικό ορισμό του παραγοντικού :

$$0! = 1$$
$$(Sx)! = x! \times Sx$$

Ο πολλαπλασιασμός και η συνάρτηση διαδόχου είναι σαφώς δυνατό να εκφραστούν στην L_A. Πώς όμως μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση παραγοντικού στην L_A ;
Σκεφτόμαστε ως εξής : Η αναδρομική σχέση της συνάρτησης παραγοντικού μας λέει πως να κατασκευάσουμε μια ακολουθία αριθμών $0!, 1!, \ldots, x!$,όπου από το u –οστό στοιχείο της ακολουθίας μεταβαίνουμε στο επόμενο πολλαπλασιάζοντας με Su.

Αυτό που χρειάζεται και αρκεί να κάνουμε επομένως είναι να συμπτύξουμε την πληροφορία μιας πεπερασμένης ακολουθίας σε έναν αριθμό-κώδικα c και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης τέτοια ώστε όταν της δίνουμε σαν όρισμα το c και έναν δείχτη

i, αυτή να εξάγει το i –οστό στοιχείο της ακολουθίας που κωδικοποιεί ο c. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ζεύγους έχουμε σαφώς την ελευθερία να χρησιμοποιήσουμε δύο αριθμούς c, d σαν κώδικες. Το πρόβλημα μας επιλύεται από το ακόλουθο :

Λήμμα (Η β-συνάρτηση του Godel)

Υπάρχει συνάρτηση τριών μεταβλητών $\beta(c,d,i)$ ώστε για κάθε πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών $k_0, k_1, \ldots, k_n$ να υπάρχουν c και d τέτοιοι ώστε $\beta(c,d,i) = k_i$.

Απόδειξη

Ορίζουμε τη συνάρτηση β ως εξής : $\beta(x,y,z) = x \bmod (y(z+1)+1)$. Έστω τώρα ακολουθία $k_0, k_1, \ldots, k_n$ και έστω $s = \max\{k_0, k_1, \ldots, k_n, n\}$. Θέτουμε $d = s!$. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $d_i = d(i+1)+1, i = 1,2,\ldots,n$ είναι μεταξύ τους πρώτοι. Πράγματι αν $p \mid d(i+1)+1, d(j+1)+1$ τότε $p \mid d(i-j)$ και αφού ο p δεν γίνεται να διαιρεί τον d (τότε δεν θα διαιρούσε τον $d(i+1)+1$) έπεται ότι $p \mid i-j \Rightarrow p < n$ (άτοπο γιατί τότε $p \mid d(i+1)$). Από το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων υπάρχει c τέτοιο ώστε $c \equiv k_i \bmod (d_i)$ για κάθε i. Εν κατακλείδι, υπάρχουν c και d τέτοιοι ώστε $\beta(c,d,i) = k_i$.

Χρησιμοποιώντας την ιδέα της παραπάνω απόδειξης βρίσκουμε έναν τύπο που εκφράζει τη συνάρτηση β στην L_A :

$$B(c,d,i,y) = (\exists u \leq c)[c = \{S(d \times \mathrm{S}i) \times u\} + y \wedge y \leq (d \times \mathrm{S}i)]$$

Ας δούμε τώρα στην πράξη πως με τη χρήση της συνάρτησης β μπορούμε να εκφράσουμε την συνάρτηση παραγοντικού
εντός της L_A. Όπως αποδείξαμε υπάρχουν c, d τέτοιοι ώστε $\beta(c,d,0) = 1$ και αν $u < x$ τότε $\beta(c,d,Su) = \beta(c,d,u) \times Su$
. Ο ακόλουθος τύπος είναι λοιπόν ο ζητούμενος :

$$\exists c \exists d \{B(c,d,0,1) \wedge (\forall u \leq x)[u \neq x \rightarrow \exists v \exists w \{(B(c,d,u,v) \wedge B(c,d,Su,v)) \wedge w = v \times Su\}] \wedge$$

Εν συνεχεία γενικεύουμε το επιχείρημα και δείχνουμε ότι κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί εντός της L_A. Δουλεύουμε με τον επαγωγικό ορισμό των αναδρομικών συναρτήσεων.

Θεώρημα

Η L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις.

Απόδειξη

Βήμα 1 : Κατ' αρχάς η L_A μπορεί να εκφράσει τη συνάρτηση διαδόχου από τον τύπο $Sx = y$. Η μηδενική συνάρτηση εκφράζεται από τον τύπο $Z(x,y) = (x = x \wedge y = 0)$. Τέλος η συνάρτηση προβολής $I_2^3(x,y,z) = y$, λόγου χάρη, εκφράζεται από τον τύπο $I_2^3(x,y,z,u) =_{def} y = u$.

Βήμα 2 : Αν η L_A μπορεί να εκφράσει τις συναρτήσεις g και h, μέσω των τύπων $G(x,y), H(x,y)$ αντίστοιχα τότε η σύνθεση τους $f(x) = h(g(x))$ εκφράζεται προφανώς μέσω του τύπου $\exists z(G(x,z) \wedge H(z,y))$.

Βήμα 3 : Το δύσκολο βήμα. Δείχνουμε ότι αν η L_A μπορεί να εκφράσει τις συναρτήσεις g και h, τότε μπορεί να εκφράσει επίσης τη συνάρτηση f που ορίζεται αναδρομικά από τις g, h. Θα χρειαστούμε τη συνάρτηση β του Godel. Υποθέτουμε ότι η f
ορίζεται από την αναδρομική σχέση :

$$f(\vec{x},0) = g(\vec{x})$$
$$f(\vec{x},Sy) = h(\vec{x},y,f(\vec{x},y))$$

Τότε υπάρχουν c,d τέτοια ώστε $\beta(c,d,0) = g(\vec{x})$ και αν $u < y$ να ισχύει $\beta(c,d,Su) = h(\vec{x},y,\beta(c,d,u))$ και $\beta(c,d,y) = z$.

Έτσι ο κάτωθι τύπος εκφράζει τη συνάρτηση f :
$\exists c \exists d\{\exists k[B(c,d,0,k) \wedge G(\vec{x},k)] \wedge (\forall u \leq y)[u \neq y \to \exists v \exists w\{(B(c,d,u,v) \wedge B(c,d,Su,w)) \wedge H$

4.2 Η PA αναπαριστά όλες τις βασικές αναδρομικές συναρτήσεις

Θυμίζουμε ότι η PA αποτελείται από τα παρακάτω 7 αξιώματα :

1.$\forall x(Sx \neq 0)$
2.$\forall x \forall y(Sx = Sy \to x = y)$
3.$\forall x(x + \bar{0} = x)$
4.$\forall x \forall y(x + Sy = S(x+y))$
5.$\forall x(x \times \bar{0} = \bar{0})$
6.$\forall x \forall y(x \times Sy = x \times y + x)$
7. Σχήμα της επαγωγής : Για κάθε τύπο φ και κάθε μεταβλητή x ο ακόλουθος τύπος είναι αξίωμα
$(\varphi(\bar{0}) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(Sx)) \to \forall x \varphi(x)$

Θα ξεκινήσουμε με μερικά απλά αποτελέσματα για την αποδεικτική ισχύ της PA. Τα παρακάτω αποτελέσματα στην πραγματικότητα ισχύουν για μια ασθενέστερη θεωρία , όπως η *Robinson Αριθμητική* Q που είναι η PA χωρίς το αξίωμα-σχήμα της επαγωγής. Αυτό θα μας χρειαστεί στο κεφάλαιο 7. Ο αναγνώστης επομένως μπορεί να παρατηρήσει ότι όσα αποδεικνύουμε παρακάτω για την αποδεικτική ισχύ της PA δεν έχουν να κάνουν με το 7ο αξίωμα και άρα ισχύουν και για την αποδεικτική ισχύ της Q. Μια θεωρία T καλείται επέκταση μιας άλλης T' αν είναι υπερσύνολο της. Όλα τα παρακάτω θεωρήματα επομένως γενικεύονται για κάθε επέκταση της Q.

Θεώρημα

$PA \vdash \bar{m}=\bar{n}$ αν $m = n$ και $PA \vdash \bar{m} \neq \bar{n}$ αν $m \neq n$

Απόδειξη

Το πρώτο μέρος είναι τετριμμένο από το αξίωμα της ισότητας.

Το δεύτερο μέρος αποδεικνύεται με επαγωγή στο n. Έστω $m > n$. Η πρόταση είναι αληθής για $n = 0$ από το αξίωμα 1.Ας

υποθέσουμε τώρα ότι είναι αληθής για δοσμένο n (και για όλα τα $m > n$). Τότε από το αξίωμα 2

$PA \vdash \overline{m+1}=\overline{n+1} \rightarrow \bar{m}=\bar{n}$. Όμως από την επαγωγική υπόθεση $PA \vdash \bar{m} \neq \bar{n}$. Άρα $PA \vdash \overline{m+1} \neq \overline{n+1}$, άρα η πρόταση είναι

αληθής για $n+1$.

Εκτός αυτού η PA έχει τις εξής δύο ιδιότητες που επεκτείνουν το παραπάνω θεώρημα :

Αν τ, ρ είναι κλειστοί όροι τότε :

1.Αν η $\tau = \rho$ αληθεύει , τότε $PA \vdash \tau = \rho$

2.Αν η $\tau = \rho$ είναι ψευδής , τότε $PA \vdash \tau \neq \rho$

Δεν θα επεκταθούμε στις λεπτομέρειες της απόδειξης του παραπάνω αποτελέσματος. Απλά επισημαίνουμε ότι είναι δυνατόν να ανάγουμε τους , εν γένει, πολύπλοκους κλειστούς όρους τ και ρ σε απλά αριθμητικά $\bar{t}$ και $\bar{r}$ αντίστοιχα εντός της PA. Έπειτα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα για τα $\bar{t}$ και $\bar{r}$ σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της ισότητας και να πάρουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα.

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση "$\leq$" μεταξύ των φυσικών αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί εντός της PA μέσω του τύπου $\varphi(x,y) = \exists z(x+z=y)$. Ισχύουν τα ακόλουθα χρήσιμα αποτελέσματα σχετικά με την αποδεικτική ισχύ της PA όσον αφορά τη διάταξη :

O1)$PA \vdash \forall x(0 \leq x)$

O2)Για κάθε n, $PA \vdash \forall x(\{x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots \vee x = \bar{n}\} \rightarrow x \leq \bar{n})$

O3)Για κάθε n,$PA \vdash \forall x(x \leq \bar{n} \rightarrow \{x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots \vee x = \bar{n}\})$

O4)Για κάθε n,αν $PA \vdash \varphi(0), PA \vdash \varphi(1), \ldots, PA \vdash \varphi(\bar{n})$,τότε $PA \vdash (\forall x \leq \bar{n})\varphi(x)$

O5)Για κάθε n,αν $PA \vdash \varphi(0)$ ή $PA \vdash \varphi(1) \ldots$ ή $PA \vdash \varphi(\bar{n})$, τότε $PA \vdash (\exists x \leq \bar{n})\varphi(x)$

O6)Για κάθε n,$PA \vdash \forall x(x \leq \bar{n} \rightarrow x \leq S\,\bar{n})$

O7)Για κάθε n,$PA \vdash \forall x(\bar{n} \leq x \rightarrow (\bar{n} = x \vee S\,\bar{n} \leq x))$

O8)Για κάθε n,$PA \vdash \forall x(\bar{n} \leq x \vee x \leq \bar{n})$

O9)Για κάθε n,$PA \vdash (\forall x \leq \overline{n-1})\varphi(x) \rightarrow (\forall x \leq \bar{n})(x \neq \bar{n} \rightarrow \varphi(x))$

Ορίζουμε τώρα τους Δ_0, Σ_1 και Π_1 τύπους. Η χρησιμότητα τους θα φανεί στη συνέχεια.

Ορισμός

(i) Ένας ατομικός Δ_0 τύπος είναι ένας τύπος της μορφής $\sigma = \tau, \sigma \leq \tau$ όπου οι σ, τ είναι όροι.

(ii)Η πλήρης κλάση των Δ_0 τύπων ορίζεται ως εξής :

1)Κάθε ατομικός Δ_0 τύπος είναι Δ_0 τύπος.

2)Αν φ και ψ είναι ατομικοί τύποι τότε κάθε λογικός συνδυασμός αυτών είναι Δ_0 τύπος. (

$\varphi \rightarrow \psi$ κ.λ.π.)

3)Αν φ είναι Δ_0 τύπος , τότε και οι τύποι $(\forall \xi \leq k)\varphi, (\exists \xi \leq k)\varphi$,όπου ξ μια μεταβλητή ελεύθερη στον φ και k ένα

αριθμητικό ή μια μεταβλητή διάφορη του ξ.

4)Η κλάση Δ_0 είναι η ελάχιστη κλάση που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες.

(iii)Ένας τύπος είναι αυστηρά Σ_1 ανν είναι της μορφής $(\exists\xi)(\exists\zeta)\ldots(\exists\eta)\varphi$, όπου φ ένας Δ_0 τύπος και οι μεταβλητές

$\xi,\zeta,\ldots,\eta$ είναι ελεύθερες στον φ. Ένας τύπος είναι Σ_1ανν είναι λογικά ισοδύναμος με έναν αυστηρά Σ_1τύπο.

(iv)Ένας τύπος είναι αυστηρά Π_1 ανν είναι της μορφής $(\forall\xi)(\forall\zeta)\ldots(\forall\eta)\varphi$, όπου φ ένας Δ_0 τύπος και οι μεταβλητές

$\xi,\zeta,\ldots,\eta$ είναι ελεύθερες στον φ.Ένας τύπος είναι Π_1ανν είναι λογικά ισοδύναμος με έναν αυστηρά Π_1τύπο.

Εύκολα βλέπουμε ότι σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς :

1.Η άρνηση ενός Δ_0 τύπου είναι Δ_0 τύπος.

2.Η άρνηση ενός Σ_1 τύπου είναι Π_1 τύπος (και αντίστροφα).

3.Ένας Δ_0 τύπος είναι επίσης Σ_1και Π_1

4.Μπορούμε αλγοριθμικά να ελέγξουμε την εγκυρότητα ενός Δ_0 τύπου.

Οι ισχυρισμοί 1 και 2 είναι τετριμμένοι , μόνο οι 3 και 4 χρειάζονται κάποια αιτιολόγηση. Για τον τρίτο ισχυρισμό

παρατηρούμε ότι ο Δ_0 τύπος φ είναι λογικά ισοδύναμος με τους $\exists\zeta(\varphi \wedge \zeta = \zeta)$ και $\forall\zeta(\varphi \wedge \zeta = \zeta)$,όπου η μεταβλητή ζ δεν

εμφανίζεται ελεύθερη στον φ. Για τον τέταρτο ισχυρισμό δουλεύουμε επαγωγικά στον βαθμό του τύπου φ.

(α)Για τους ατομικούς Δ_0 τύπους ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος.

(β)Δεδομένου τώρα ότι για κάθε Δ_0 τύπο τάξης μικρότερης του n είναι δυνατόν να ελέγξουμε αλγοριθμικά την εγκυρότητα

του, μένει να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για έναν Δ_0 τύπο τάξης $n+1$. Όμως ο τελευταίος θα είναι εξ ορισμού της

μορφής $\neg\varphi$ ή $(\varphi \wedge \psi)$ ή $\ldots\kappa.\lambda.\pi$ ή $(\forall\xi \leq \bar{k})\varphi(\xi)$ ή $(\exists\xi \leq \bar{k})\varphi(\xi)$ όπου οι φ,ψ είναι Δ_0 τύποι τάξης το πολύ k. Σημειωτέον ότι

ο τύπος $(\forall\xi \leq \bar{k})\varphi(\xi)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $\varphi(\bar{0}) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \ldots\wedge\varphi(\bar{k})$. Ανάλογα ο $(\exists\xi \leq \bar{k})\varphi(\xi)$ είναι ισοδύναμος με

τον $\varphi(\bar{0}) \vee \varphi(\bar{1}) \vee\ldots\vee\varphi(\bar{k})$. Από την επαγωγική υπόθεση το ζητούμενο έπεται.

Θεώρημα

Η PA είναι $\Sigma_1 - \pi\lambda\acute{\eta}\rho\eta\varsigma$ (δηλαδή αποδεικνύει κάθε αληθή Σ_1 πρόταση).

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε την παραπάνω πρόταση κατά βήματα :

1.Η PA αποκρίνεται σωστά για κάθε ατομική Δ_0 πρόταση.

2.Η PA αποκρίνεται σωστά για κάθε Δ_0 πρόταση.
3.Η PA αποδεικνύει κάθε αληθή Σ_1 πρόταση.

1) Ας πάρουμε μια ατομική Δ_0 πρόταση. Αν είναι της μορφής $\sigma = \tau$ όπου οι σ, τ είναι όροι τότε γνωρίζουμε ήδη ότι η PA αποκρίνεται σωστά σε αυτήν την περίπτωση. Αν είναι της μορφής $\sigma \leq \tau$ τότε εντός της PA

αποδεικνύουμε τύπους της μορφής $\sigma = \bar{n}$ και $\tau = \bar{m}$ όπου τα $\bar{n}, \bar{m}$ είναι αριθμητικά. Όμως η PA αποκρίνεται σωστά για τον τύπο $\bar{n} \leq \bar{m}$ και άρα (χρησιμοποιώντας τα αξιώματα της ισότητας) αποκρίνεται σωστά και για τον τύπο $\sigma \leq \tau$.

2) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο βαθμό k της Δ_0 πρότασης. Μια Δ_0 πρόταση έχει βαθμό k αν προκύπτει από ατομικούς Δ_0 τύπους με k εφαρμογές των προτασιακών συνδέσμων και των φραγμένων ποσοδεικτών. Οι Δ_0 προτάσεις βαθμού 0 είναι οι ατομικές Δ_0 προτάσεις , άρα το βασικό βήμα αποδείχθηκε παραπάνω. Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει μέχρι και τις προτάσεις k βαθμού. Τώρα αν θεωρήσουμε μια πρόταση $k+1$ βαθμού αυτή εμπίπτει σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

2.1) Είτε είναι αποτέλεσμα χρήσης προτασιακού συνδέσμου σε προτάσεις μικρότερης τάξης (π.χ. $\varphi \to \psi$ όπου φ και ψ προτάσεις μικρότερης τάξης) , οπότε από στοιχειώδη λογική η PA αποφαίνεται σωστά για τη σύνθετη πρόταση.

2.2)Είτε είναι αποτέλεσμα χρήσης φραγμένου ποσοδείκτη σε πρόταση μικρότερης τάξης, φερ' ειπείν $(\forall x \leq \bar{n})\varphi(x)$. Αν τώρα η προηγούμενη πρόταση είναι αληθής τότε είναι και οι προτάσεις $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(\bar{n})$ οι οποίες λόγω επαγωγικής υπόθεσης αποδεικνύονται από την PA και επομένως, σύμφωνα με το O4 αποδεικνύεται και η $(\forall x \leq \bar{n})\varphi(x)$. Αν είναι ψευδής τότε χρησιμοποιώντας το O5 και ένα παρόμοιο επιχείρημα καταλήγουμε πως η PA αποδεικνύει την άρνηση αυτής της πρότασης. Σε κάθε περίπτωση αποκρίνεται σωστά. Όμοια για τον υπαρκτικό ποσοδείκτη.

3) Ας θεωρήσουμε μια αληθή αυστηρά Σ_1 πρόταση που εκφράζεται από τον τύπο $\exists x \exists y \varphi(x,y)$ όπου ο φ είναι Δ_0. Επειδή είναι αληθής υπάρχουν φυσικοί m, n τέτοιοι ώστε η πρόταση $\varphi(\bar{m}, \bar{n})$ να είναι αληθής. Λόγω του 2 η PA αποδεικνύει ότι $\varphi(\bar{m}, \bar{n})$ και άρα αποδεικνύει $\exists x \exists y \varphi(x,y)$. Προφανώς το επιχείρημα γενικεύεται για περισσότερες μεταβλητές και για Σ_1 προτάσεις εν γένει (εφόσον κάθε αληθής Σ_1 πρόταση είναι ισοδύναμη με μία αληθή αυστηρά Σ_1 πρόταση και αυτή η τελευταία είναι αποδείξιμη).

Δείχνουμε τώρα ότι οι συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού της αναπαραστασιμότητας στην πραγματικότητα συνεπάγονται την (iii).Έστω $k = f(m) \neq n$. Από τη συνθήκη (ii) $T \vdash \varphi(\bar{m}, \bar{k})$. Άρα από την (i) $T \vdash \bar{n} \neq \bar{k} \to \neg\varphi(\bar{m}, \bar{n})$. Όμως όπως είδαμε πριν $T \vdash \bar{n} \neq \bar{k}$ και άρα με χρήση του Modus Ponens παίρνουμε $T \vdash \neg\varphi(\bar{m}, \bar{n})$. Επομένως για να επαληθεύσουμε ότι ένας τύπος αναπαριστά μια συνάρτηση αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις συνθήκες (i) και (ii).

Μια χρήσιμη ισοδύναμη συνθήκη για την αναπαραστασιμότητα που θα χρειαστούμε είναι η εξής : (η απόδειξη είναι άμεση από στοιχειώδη λογική).

Η συνάρτηση f αναπαρίσταται από τον τύπο $\varphi(x,y)$ στη θεωρία T ανν ισχύει η συνεπαγωγή :
$f(m) = n \Rightarrow T \vdash \forall y(\varphi(\bar{m}, y) \leftrightarrow y = \bar{n})$

Ορισμός

Μια συνάρτηση ονομάζεται Δ_0 αν μπορεί να εκφραστεί από έναν Δ_0 τύπο. Αντίστοιχα ορίζουμε τις Σ_1 και Π_1 συναρτήσεις.

$g(x) \;=\;$ *ο ελάχιστος* y *τέτοιος ώστε* $(\exists u \leq y)(\exists v \leq y)Rxuv$

$h(x,y) \;=\;$ *ο ελάχιστος* $z \leq y$ *τέτοιος ώστε* $(\exists v \leq y)Rxzv$ *αν υπάρχει τέτοιο* z, *ειδάλλως* 0.

Από τον τρόπο που ορίστηκαν οι g,h προκύπτει ότι είναι Δ_0 συναρτήσεις και ότι $f(x) = h(x,g(x))$.

2.Ας πάρουμε την απλή περίπτωση όπου $f(x) = h(x,g(x))$, με h και g δύο Δ_0 συναρτήσεις (ούτε εδώ παρουσιάζει δυσκολίες η γενίκευση). Θεωρούμε Δ_0 τύπους που αναπαριστούν τις παραπάνω συναρτήσεις, έστω H και G αντίστοιχα. Τότε η συνάρτηση f αναπαρίσταται από τον Σ_1 τύπο $F(x,y) = \exists u(G(x,u) \wedge H(x,u,y))$.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $f(m) = n$. Τότε για κάποιο o, $g(m) = o$ και $h(m,o) = n$. Από την υπόθεση της αναπαραστασιμότητας έπεται ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι αποδείξιμοι στην PA :

$\forall u(G(\bar{m},u) \leftrightarrow u = \bar{o})$ και $\forall y(H(\bar{m},\bar{o},y) \leftrightarrow y = \bar{n})$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδη λογική έπεται ότι η PA αποδεικνύει :

$\forall y(\exists u(G(\bar{m},u) \wedge H(\bar{m},u,y)) \leftrightarrow y = \bar{n})$

Όμως ανακαλώντας τον ορισμό του F και λαμβάνοντας υπόψιν μας την ισοδύναμη συνθήκη για την αναπαραστασιμότητα (που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω για τις g,h) συμπεραίνουμε πως ο F αναπαριστά την f.

Δεύτερο Μέρος : Δείχνουμε τώρα ότι κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση είναι Σ_1. Χρησιμοποιώντας τον επαγωγικό ορισμό των βασικών αναδρομικών συναρτήσεων αρκεί να δείξουμε τα ακόλουθα :

1.Οι αρχικές συναρτήσεις είναι Σ_1.

2.Αν οι g,h είναι Σ_1, τότε είναι και η σύνθεση τους.

3.Αν οι g,h είναι Σ_1, τότε είναι και η συνάρτηση που ορίζεται αναδρομικά από τις g και h.

Μόνο ο τρίτος ισχυρισμό απαιτεί κάπως λεπτό χειρισμό. Ξεκινάμε :

1.Οι αρχικές συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν με Δ_0 τύπους. Κάθε Δ_0 τύπος είναι Σ_1. Άρα οι αρχικές συναρτήσεις είναι Σ_1.

2.Για άλλη μια φορά επιλύουμε την απλή περίπτωση όπου $f(m) = g(h(m))$ και οι g,h είναι Σ_1 συναρτήσεις που εκφράζονται από τους τύπους

$G(x,y) = \exists uG'(x,y,u)$ και $H(x,y) = \exists vH'(x,y,v)$ αντίστοιχα, όπου φυσικά οι G' και H' είναι Δ_0. Η f αναπαρίσταται από τον τύπο $\exists z(G(x,z) \wedge H(z,y))$, που είναι ισοδύναμος με τον $\exists z\exists u\exists v(G'(x,z,u) \wedge H'(z,y,v))$. Η σύζευξη δύο Δ_0 τύπων είναι Δ_0 τύπος και άρα η f είναι Σ_1 συνάρτηση.

3.Θα χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα εναλλαγής ποσοδεικτών. Ας πάρουμε τον απλό τύπο :

i.$(\forall u \leq \bar{n})\exists vK(u,v,\bar{m})$

Αν ο τύπος i είναι αληθής τότε για κάθε $u \leq n$ υπάρχει ένας "μάρτυρας" w_u που καθιστά τον K αληθή. Παίρνοντας τον μέγιστο των "μαρτύρων" w , βλέπουμε ότι :

$(\forall u \leq \bar{n})(\exists x \leq \bar{w})K(u,x,\bar{m})$, απ' όπου μπορούμε να συνάγουμε ότι :

ii.$\exists v(\forall u \leq \bar{n})(\exists x \leq v)K(u,v,\bar{m})$

Αντίστροφα αν ο ii αληθεύει τότε ο i αληθεύει τετριμμένα. Επομένως αναγάγαμε τον τύπο i στον ισοδύναμο Σ_1 τύπο ii.

Έστω ότι η f ορίζεται αναδρομικά από τις Σ_1 συναρτήσεις g και h. Παίρνουμε τώρα τον τύπο που εκφράζει την f :

$\exists c\exists d\{\exists k[B(c,d,0,k) \wedge G(\vec{x},k)] \wedge (\forall u \leq y)[u \neq y \rightarrow \exists v\exists w\{(B(c,d,u,v) \wedge B(c,d,Su,w)) \wedge H$

Σε πρώτη φάση μεταφέρουμε τον υπαρκτικό ποσοδείκτη $\exists k$ μπροστά καθώς και τους

υπαρκτικούς ποσοδείκτες που υπάρχουν μέσα στον τύπος G. Έπειτα γενικεύοντας την παραπάνω ιδέα μεταφέρουμε τους υπαρκτικούς ποσοδείκτες που βρίσκονται εντός του H μπροστά και καταλήγουμε σε έναν τύπο με υπαρκτικούς δείκτες μπροστά και έναν Δ_0 πυρήνα, επομένως καταλήγουμε σε Σ_1 τύπο.

Λήμμα

Η PA αναπαριστά κάθε Δ_0 συνάρτηση.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f εκφράζεται από τον Δ_0 τύπο $\varphi(x,y)$. Αν $f(m) = n$ τότε η Δ_0 πρόταση $\varphi(\bar{m},\bar{n})$ είναι αληθής και άρα αποδείξιμη από την PA σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Αντίστοιχα αν $f(m) \neq n$ τότε η Δ_0 πρόταση $\neg\varphi(\bar{m},\bar{n})$ είναι αληθής και άρα αποδείξιμη από την PA. Η μόνη δυσκολία βρίσκεται στην πρώτη συνθήκη της αναπαραστασιμότητας. Ενδέχεται ο παραπάνω τύπος φ να μην αναπαριστά την f διότι δεν "συμπεριφέρεται" σαν συνάρτηση. Υπάρχει όμως ένα απλό τρικ που μπορούμε να εφαρμόσουμε αντικαθιστώντας τον φ με έναν που "συμπεριφέρεται" σαν συνάρτηση και ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη. Ορίζουμε τον τύπο : $\varphi'(x,y) = \varphi(x,y) \wedge (\forall z \leq y)(\varphi(x,z) \rightarrow z = y)$. Θα αποδείξουμε ότι ο φ' αναπαριστά την f. Ας ξεκινήσουμε με τη δεύτερη συνθήκη. Έστω $f(m) = n$. Αυτό σημαίνει πως η Δ_0πρόταση $\varphi(\bar{m},\bar{n})$ είναι αληθής και άρα αποδείξιμη στην PA και ότι για $k \neq n$ έχουμε $f(m) \neq k$ και άρα η $\neg\varphi(\bar{m},\bar{k})$ είναι αληθής και αποδείξιμη στην PA. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι για $k \leq n$ $PA \vdash \varphi(\bar{m},\bar{k}) \rightarrow \bar{k}=\bar{n}$. Λόγω του O4 $PA \vdash (\forall x \leq \bar{n})(\varphi(\bar{m},x) \rightarrow x = \bar{n})(\circledast)$. Έπεται ότι $PA \vdash \varphi'(\bar{m},\bar{n})$. Επαληθεύουμε τώρα την πρώτη συνθήκη. Αρκεί να δείξουμε ότι $PA \vdash \varphi'(\bar{m},a) \rightarrow a = \bar{n}$. Δουλεύουμε εντός της PA και υποθέτουμε $\varphi'(\bar{m},a)$, δηλαδή $\varphi(\bar{m},a) \wedge (\forall z \leq a)(\varphi(\bar{m},z) \rightarrow z = a)(\boxplus)$. Λόγω του O8 θα έχουμε $a \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq a$. Αν ισχύει το πρώτο μέλος της διάζευξης τότε χρησιμοποιώντας την $(\circledast)$ παίρνουμε $a = \bar{n}$. Αν πάλι ισχύει το δεύτερο μέλος της διάζευξης τότε λόγω της $(\boxplus)$ παίρνουμε $\bar{n} = a$. Σε κάθε περίπτωση $a = \bar{n}$.

Θεώρημα

Η PA αναπαριστά κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση.

Απόδειξη

Χωρίζουμε την απόδειξη σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα δείξουμε ότι η PA αναπαριστά κάθε Σ_1 συνάρτηση. Στο δεύτερο μέρος θα δείξουμε ότι κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση είναι Σ_1. Το θεώρημα έπεται.

Πρώτο Μέρος:
Θα δείξουμε τις παρακάτω δύο προτάσεις από τις οποίες προφανώς αποδεικνύεται το πρώτο μέρος :

1. Κάθε Σ_1 συνάρτηση είναι σύνθεση δύο Δ_0 συναρτήσεων.
2. Η PA αναπαριστά τη σύνθεση δύο Δ_0 συναρτήσεων.

Ξεκινάμε λοιπόν :
1. Χάριν απλότητας θεωρούμε Σ_1 συνάρτηση f που εκφράζεται από τον Σ_1 τύπο $\exists z R(x,y,z)$ (η γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές και σε περισσότερους υπαρκτικούς ποσοδείκτες δεν παρουσιάζει δυσκολίες). Θεωρούμε τώρα τις βοηθητικές συναρτήσεις g, h με :

5.0 Εισαγωγή

Τα κομμάτια του παζλ είναι στη θέση τους. Είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας στην αυθεντική μορφή που το απέδειξε ο Godel (απλά εμείς το αποδεικνύουμε για την PA ενώ η αυθεντική απόδειξη ήταν για το σύστημα των Principia Mathematica). Πρώτα όμως ας κάνουμε μια ανασκόπηση των βασικών βημάτων που μας οδήγησαν μέχρι εδώ :

i. Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τους τύπους και τις αποδείξεις της γλώσσας της αριθμητικής L_A χρησιμοποιώντας τους αριθμούς Godel.

ii. Αν φ είναι μια έκφραση συμβολίζουμε τον αριθμό Godel της με $\ulcorner\varphi\urcorner$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\ulcorner\overline{\varphi}\urcorner$ σαν συντομογραφία για το αριθμητικό του $\ulcorner\varphi\urcorner$ εντός της L_A.

iii.Η $prf(m,n)$ είναι η σχέση που ισχύει όποτε το m κωδικοποιεί μια απόδειξη στην PA της πρότασης με αριθμό Godel n.

iv.Κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση εκφράζεται από έναν τύπο της L_A.

v.Κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί στην PA.

Χωρίζουμε το κεφάλαιο αυτό σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα θα ακολουθήσουμε τη σημασιολογική οδό του θεωρήματος , με την έννοια ότι κάνουμε την σημασιολογική υπόθεση ότι η PA είναι ορθή. Στην δεύτερη ενότητα θα ακολουθήσουμε τη συντακτική οδό, θα υποθέσουμε ότι η PA είναι ω – *συνεπής* , κάτι που θα ορίσουμε παρακάτω. Η υπόθεση της συνέπειας αρκεί αλλά η απόδειξη είναι δυσκολότερη. Θα την παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι η γνωστή βελτίωση του Rosser.

5.1 Σημασιολογική μορφή

Ο Godel θα μας πει πως να κατασκευάσουμε μια πρόταση G στην PA που είναι αληθής αν και μόνο αν είναι μη αποδείξιμη. Με τα δεδομένα που έχουμε μέχρι στιγμής κάτι τέτοιο δεν μοιάζει αδύνατο. Οι τύποι μπορούν να "μιλάνε" για τύπους μέσω των κωδικών Godel τους. Θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο που μέσω αυτού του τρικ θα μιλάει για τον εαυτό του.

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τις λεπτομέρειες για το πως μπορεί να γίνει αυτό :

Ορισμός

Η διαγωνιοποίηση ενός τύπου φ είναι ο τύπος $\exists y(y = \ulcorner\overline{\varphi}\urcorner \wedge \varphi)$.

Σχόλιο :

Αν ο τύπος έχει ως ελεύθερη μεταβλητή την y τότε φυσικά η διαγωνιοποίηση του φ είναι ισοδύναμη με τον τύπο $\varphi(\ulcorner\overline{\varphi}\urcorner)$. Ο πρώτος τύπος , αν και φαινομενικά λιγότερο εύχρηστος και λιγότερο φυσικός σαν ορισμός της διαγωνιοποίησης , έχει διάφορα πρακτικά και τεχνικά πλεονεκτήματα. Το βασικότερο είναι ότι καθιστά θέμα ρουτίνας τον υπολογισμό του αριθμού Godel της διαγωνιοποίησης ενός τύπου φ , συναρτήσει του φ. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση $diag(n)$, που παίρνει σαν όρισμα έναν αριθμό Godel και επιστρέφει τον αριθμό Godel της διαγωνιοποίησης του , είναι βασική αναδρομική συνάρτηση.

Ορισμός

Η σχέση $Gdl(m,n)$ ορίζεται να ισχύει όποτε το m κωδικοποιεί μια απόδειξη της διαγωνιοποίησης του τύπου με αριθμό Godel n.

Θεώρημα

Η παραπάνω σχέση είναι βασική αναδρομική

Απόδειξη

Η σχέση $Gdl(m,n)$ ισχύει εξ ορισμού όταν $prf(m, diag(n))$. Τότε $c_{Gdl}(x,y) = c_{prf}(x, diag(y))$ και άρα η χαρακτηριστική συνάρτηση της σχέσης $Gdl(m,n)$ είναι βασική αναδρομική ως σύνθεση βασικών αναδρομικών συναρτήσεων.

Επομένως η Gdl μπορεί να εκφραστεί και να αναπαρασταθεί στην L_A. (Χάριν απλότητας δεν κάνουμε διάκριση στο συμβολισμό ανάμεσα στην έκφραση που χρησιμοποιούμε για την σχέση Gdl στη μεταγλώσσα και τον τύπο Gdl που εκφράζει τη σχέση εντός της PA). Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό : $Gdl(x,y) =_{def} \exists z(prf(x,z) \wedge Diag(y,z))$

Ορισμός

1.$U(y) = \forall x \neg Gdl(x,y)$
2.$G = \exists y(y = \ulcorner \bar{U} \urcorner \wedge U(y))$, δηλαδή ο τύπος G είναι η διαγωνιοποίηση του U (που είναι φυσικά ισοδύναμη με τον τύπο $U(\ulcorner \bar{U} \urcorner) = \forall x \neg Gdl(x, \ulcorner \bar{U} \urcorner)$, όπως επισημάναμε στο σχόλιο παραπάνω)

Θεώρημα

Η G είναι αληθής αν και μόνο αν είναι μη αποδείξιμη στην PA.

Απόδειξη

Ας σκεφτούμε τι σημαίνει για τη G να είναι αληθής. Η G είναι αληθής αν για όλους τους αριθμούς m **δεν** ισχύει πως το m κωδικοποιεί την απόδειξη της διαγωνιοποίησης της πρότασης με αριθμό Godel $\ulcorner U \urcorner$, δηλαδή της G. Άρα η G είναι αληθής αν και μόνο αν δεν υπάρχει m , ώστε το m να κωδικοποιεί μια απόδειξη της G. Αλλά αν η G είναι αποδείξιμη , θα πρέπει να υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός. Άρα η G είναι αληθής αν και μόνο αν είναι μη αποδείξιμη στην PA.

Θεώρημα (**Πρώτο θεώρημα μη πληρότητας I**)

Αν η PA είναι ορθή τότε είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Έστω ότι η PA είναι ορθή θεωρία , δηλαδή δεν αποδεικνύει ψευδείς προτάσεις. Αν η G αποδεικνυόταν στην PA, τότε θα ήταν ένα ψευδές θεώρημα, αφού η G είναι αληθής αν και μόνο αν είναι μη αποδείξιμη. Άρα η δεν αποδεικνύεται στην PA και άρα είναι αληθής. Η $\neg G$ είναι επίσης μη αποδείξιμη ως ψευδής. Άρα η PA είναι μη πλήρης.

Είναι πολύ εύκολο να απομονώσουμε τα στοιχεία εκείνα της PA που μας επέτρεψαν να αποδείξουμε την μη πληρότητα της και να γενικεύσουμε σε άλλες θεωρίες της αριθμητικής. Η δομή της απόδειξης συνοψίζεται ως εξής :

1) Κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση και σχέση μπορεί να εκφραστεί μέσα στη γλώσσα της PA, την L_A.

2) Η σχέση $prf(m,n)$ είναι βασική αναδρομική, οπότε και η $Gdl(m,n)$ είναι.

3) Άρα η σχέση $Gdl(m,n)$ μπορεί να εκφραστεί εντός της PA και μέσω αυτής κατασκευάζουμε μια πρόταση G που είναι αληθής αν-ν είναι μη αποδείξιμη.

4) Αν η PA είναι ορθή τότε φυσικά η πρόταση G καθώς και η άρνηση αυτής είναι μη αποδείξιμες.

5) Άρα η PA είναι μη πλήρης.

Έτσι αν έχουμε μια ορθή θεωρία T με επαρκώς ισχυρή γλώσσα και για την οποία ισχύει ότι η σχέση $prf_T(m,n)$ είναι βασική αναδρομική το επιχείρημα του Godel μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσιο. Το τελευταίο εξασφαλίζεται αν το σύνολο των αξιωμάτων της θεωρίας είναι β.α. Πράγματι αν η ιδιότητα $Axiom_T(n)$ είναι βασική αναδρομική τότε ακολουθώντας βήμα-βήμα την απόδειξη της βασικής αναδρομικότητας της $prf(m,n)$ στο κεφάλαιο 2 για την PA, βλέπουμε ότι η σχέση $prf_T(m,n)$ θα είναι επίσης β.α. Δεν αλλάζει τίποτα πέραν από το σημείο που αφορά τα αξιώματα της θεωρίας. Μια τέτοια θεωρία , με βασικό αναδρομικό σύνολο αξιωμάτων , θα την λέμε β.α. αξιωματικοποιήσιμη. Συμπερασματικά έχουμε :

Θεώρημα

Κάθε ορθή, β.α. αξιωματικοποιήσιμη, με επαρκώς ισχυρή γλώσσα είναι μη πλήρης.

5.2 Συντακτική μορφή

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε την μη πληρότητα της PA με την ισχυρή υπόθεση της ορθότητας σε συνδυασμό με το ασθενές αποτέλεσμα ότι η σχέση Gdl εκφράζεται στην L_A. Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε ασθενέστερες συντακτικές υποθέσεις σχετικά με την PA και το ισχυρότερο αποτέλεσμα ότι η σχέση Gdl αναπαρίσταται στην PA.

Θεώρημα

Αν η PA είναι συνεπής , τότε $PA \nvdash G$.

Απόδειξη

Έστω ότι $PA \vdash G$, δηλαδή $PA \vdash \forall x \neg Gdl(x, \ulcorner \bar{U} \urcorner)$. Υπάρχει αριθμός Godel , έστω m , που κωδικοποιεί την απόδειξη της G από την PA. Εφόσον η G είναι η διαγωνιοποίηση της U, έχουμε εξ ορισμού ότι $Gdl(m, \ulcorner U \urcorner)$. Εφόσον η σχέση Gdl αναπαρίσταται στην PA έχουμε ότι $PA \vdash Gdl(\bar{m}, \ulcorner U \urcorner)$. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση της συνέπειας αφού η πρόταση $\forall x \neg Gdl(x, \ulcorner \bar{U} \urcorner)$ συνεπάγεται λογικά την $\neg Gdl(m, \ulcorner \bar{U} \urcorner)$.

Ορισμός

Μια αριθμητική θεωρία T είναι *ω − ασυνεπής* αν, για κάθε τύπο $\varphi(x)$, $T \vdash \exists x \varphi(x)$, αλλά για κάθε φυσικό αριθμό m έχουμε ότι $T \vdash \neg\varphi(\bar{m})$. Ονομάζεται *ω − συνεπής* αν δεν είναι *ω − ασυνεπής*.

Εφόσον κάθε ασυνεπής θεωρία αποδεικνύει τα πάντα , μια ασυνεπής θεωρία είναι *ω − ασυνεπής*. Άρα μια *ω − συνεπής* θεωρία είναι συνεπής. Δεν χρειάζεται πολύ σκέψη για να συμπεράνει κανείς ότι η *ω − συνέπεια* είναι μια απόλυτα φυσιολογική απαίτηση από οποιαδήποτε αριθμητική θεωρία που αξίζει την προσοχή μας. Αυτό γίνεται απόλυτα σαφές όταν επαναφέρουμε στο παιχνίδι τις σημασιολογικές ιδέες. Αν η θεωρία είναι ορθή τότε δεν μπορεί να είναι *ω − ασυνεπής*. Πράγματι ,τότε η πρόταση $\exists x \varphi(x)$ θα ήταν θεώρημα της T (όπου φ κάποιος τύπος που μας εξασφαλίζει ο ορισμός) και άρα αληθής λόγω ορθότητας. Άρα υπάρχει φυσικός m ώστε η $\varphi(\bar{m})$ να είναι αληθής. Όμως $T \vdash \neg\varphi(\bar{m})$ και άρα η $\varphi(\bar{m})$ είναι ψευδής (άτοπο). Πάντως ,όπως προανέφερα και στην εισαγωγή, η υπόθεση της *ω − συνέπειας* είναι περιττή υπόθεση. Η συνέπεια από μόνη της μας εξασφαλίζει την μη πληρότητα. Όπως και να 'χει , αξίζει να δούμε πως μπορούμε σε πρώτη φάση χρησιμοποιώντας την *ω − συνέπεια* να δείξουμε ότι η PA δεν αποδεικνύει ούτε την άρνηση της G και επομένως είναι μη πλήρης.

Θεώρημα

Αν η PA είναι *ω − συνεπής* , τότε $PA \nvdash \neg G$.

Απόδειξη

Έστω ότι η PA είναι *ω − συνεπής* και $PA \vdash \neg G$ ή ισοδύναμα (i)$PA \vdash \exists x Gdl(x, \ulcorner U \urcorner)$. Αν η PA είναι *ω − συνεπής* τότε είναι συνεπής και άρα δεν αποδεικνύει την G. Η G όμως είναι η διαγωνιοποίηση της U και άρα για κάθε φυσικό αριθμό m έχουμε ότι η $Gdl(m, \ulcorner U \urcorner)$ είναι ψευδής. Έτσι λόγω αναπαραστασιμότητας (ii)$PA \vdash \neg Gdl(\bar{m}, \ulcorner U \urcorner)$ για κάθε m. Οι (i) και (ii) συνεπάγονται ότι η PA είναι *ω − ασυνεπής*.

Θεώρημα (Πρώτο θεώρημα μη πληρότητας ΙΙ)

Αν η PA είναι *ω − συνεπής* τότε είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Συνδυάζουμε τα δύο παραπάνω θεωρήματα.

Η γενίκευση και πάλι είναι άμεση. Η δομή της απόδειξης της συντακτικής μορφής του θεωρήματος συνοψίζεται ως εξής :

1) Κάθε β.α. συνάρτηση αναπαρίσταται στην PA.
2) Όπως πριν οι σχέσεις $prf(m,n)$ και $Gdl(m,n)$ είναι βασικές αναδρομικές.
3) Κατασκευάζουμε την πρόταση Godel G μέσω του τύπου που αναπαριστά την $Gdl(m,n)$.
4) Δείχνουμε τότε ότι αν η PA είναι συνεπής , τότε $PA \nvdash G$ και αν η PA είναι ω-συνεπής , τότε $PA \nvdash \neg G$.
5) Άρα αν είναι ω-συνεπής είναι μη πλήρης.

Για να εξασφαλίσουμε ότι η θεωρία μας αναπαριστά κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση αρκεί να υποθέσουμε ότι επεκτείνει την Robinson Αριθμητική Q, που γνωρίζουμε ήδη ότι αναπαριστά κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση από το κεφάλαιο 2. Το ότι η σχέση $prf_{\mathrm{T}}(m,n)$ είναι βασική αναδρομική εξασφαλίζεται, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, από τη βασική αναδρομικότητα των αξιωμάτων της θεωρίας. Πριν διατυπώσουμε τη γενίκευση της συντακτικής μορφής του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας για τη γενική μορφή της θεωρίας, καλό είναι να την κατονομάσουμε , διότι με αυτού του είδους τις θεωρίες θα ασχοληθούμε και στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός

Μια συνεπής, β.α. αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την Q θα ονομάζεται καλή θεωρία.

Επομένως έχουμε το εξής γενικό θεώρημα μη πληρότητας για τη συντακτική μορφή :

Θεώρημα

Για κάθε καλή θεωρία T ισχύει ότι $T \nvdash G_{\mathrm{T}}$ και υποθέτοντας ότι η T είναι $\omega - συνεπής$ $T \nvdash \neg G_{\mathrm{T}}$, δηλαδή είναι μη πλήρης.

6.0 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε τη βελτιωμένη εκδοχή του Rosser για τη συντακτική μορφή του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι η υπόθεση της συνέπειας αρκεί για να μας εξασφαλίσει την μη πληρότητα. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια κάπως πιο περίπλοκη και περίτεχνη πρόταση από αυτήν του Godel. Σε άτυπο επίπεδο η πρόταση του Godel λέει : "είμαι μη αποδείξιμη". Η πρόταση του Rosser θα λέει : " Αν είμαι αποδείξιμη , τότε υπάρχει πρωτύτερη απόδειξη της άρνησης μου", όπου η λέξη "πρωτύτερη" θα μεταφράζεται τυπικά ως : υπάρχει απόδειξη με μικρότερο αριθμό Godel που αποδεικνύει την άρνηση μου. Αν η PA είναι συνεπής τότε η πρόταση του Rosser και η άρνηση της είναι μη αποδείξιμες στην PA. Για να βρούμε μια τέτοια πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ ισχυρό λήμμα , το λήμμα της διαγωνιοποίησης. Αυτό το λήμμα , μέσω των διάφορων εφαρμογών του , θα μας δώσει μια πολύ πιο καθαρή εικόνα για το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας.

6.1 Αποδεικτικό κατηγόρημα

Θυμίζουμε ότι η σχέση $prf(m,n)$ ισχύει όταν ο m κωδικοποιεί μια απόδειξη του τύπου με αριθμό Godel n. Ορίζουμε τώρα το κατηγόρημα $prov(n)$, που αληθεύει όταν υπάρχει v που κωδικοποιεί απόδειξη του τύπου με αριθμό Godel n. Με άλλα λόγια αληθεύει όταν ο εν λόγω τύπος είναι αποδείξιμος. Φυσικά το κατηγόρημα αυτό εκφράζεται από τον τύπο : $prov(x) = (\exists v)prf(v,x)$ (για άλλη μια φορά δεν κάνουμε διάκριση στο συμβολισμό ανάμεσα στο κατηγόρημα της μεταγλώσσας και τον τύπο που εκφράζει το κατηγόρημα εντός της θεωρίας).

Θεώρημα

Έστω T μια καλή θεωρία και φ μια πρόταση.

C1.Αν $T \vdash \varphi$, τότε $T \vdash prov(\ulcorner\varphi\urcorner)$
Cω.Αν η T είναι $\omega - συνεπής$ και αν $T \vdash prov(\ulcorner\varphi\urcorner)$, τότε $T \vdash \varphi$.

Απόδειξη

C1.Έστω $T \vdash \varphi$. Τότε $prf(m,\ulcorner\varphi\urcorner)$ για κάποιον m. Άρα λόγω αναπαραστασιμότητας της σχέσης prf , $T \vdash prf(\bar{m},\ulcorner\varphi\urcorner)$ και έτσι $T \vdash (\exists v)prf(\bar{m},\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow T \vdash prov(\ulcorner\varphi\urcorner)$
Cω.Έστω ότι η T είναι $\omega - συνεπής$ και $T \vdash prov(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow$ T $\vdash (\exists v)prf(v,\ulcorner\varphi\urcorner)$. Αν $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow$ για κάθε m ισχύει $\neg prf(m,\ulcorner\varphi\urcorner)$, τότε για κάθε m (πάλι λόγω αναπαραστασιμότητας) , $T \vdash \neg prf(m,\ulcorner\varphi\urcorner)$. Έπεται ότι η θεωρία είναι $\omega - ασυνεπής$, πράγμα που αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση.

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι η πρόταση Godel είναι αληθής αν-ν είναι μη αποδείξιμη μέσω της πρότασης $G \leftrightarrow \neg prov(\ulcorner G\urcorner)$. Στην πραγματικότητα μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση εντός της PA.

Με απλούς λογικούς χειρισμούς δείχνουμε την παρακάτω ισοδυναμία :

$$U = \forall x \neg Gdl(x,y) = \forall x \neg \exists z(prf(x,z) \wedge Diag(y,z)) \leftrightarrow \forall x \forall z \neg((prf(x,z) \wedge Diag(y,z)) \leftrightarrow \forall z \forall z(Diag(y,z) \rightarrow \neg \exists x prf(x,z)) \leftrightarrow \forall z(Diag(y,z) \rightarrow \neg \exists v prf(v,z)) = \forall z(Diag(y,z) \rightarrow \neg prov(z))$$

Εφόσον η PA διαθέτει τα απαραίτητα εργαλεία της πρωτοβάθμιας λογικής η παραπάνω ισοδυναμία είναι θεώρημα της. Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την πρόταση $G \leftrightarrow U(\ulcorner U \urcorner)$, που είναι επίσης θεώρημα της PA, παίρνουμε ότι $PA \vdash G \leftrightarrow U'(\ulcorner U \urcorner)$. Έτσι : $PA \vdash G \leftrightarrow \forall z(Diag(\ulcorner U \urcorner,z) \rightarrow \neg prov(z))$. Η συνάρτηση $Diag$ αναπαρίσταται εντός της PA και άρα $PA \vdash \forall z(Diag(\ulcorner U \urcorner,z) \leftrightarrow z = \ulcorner G \urcorner)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω : $PA \vdash G \leftrightarrow \forall z(z = \ulcorner G \urcorner \rightarrow \neg prov(z)) \Leftrightarrow PA \vdash G \leftrightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$. Επομένως το ότι "η G είναι αληθής αν-ν είναι αποδείξιμη" αποδεικνύεται τυπικά εντός της PA. Το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να γενικευθεί και να μας δώσει ένα ιδιαίτερα χρήσιμο λήμμα , το λεγόμενο λήμμα της διαγωνιοποίησης ή λήμμα σταθερού σημείου.

Λήμμα

Αν T είναι μια καλή θεωρία και $\varphi(x)$ είναι ένας τύπος με μια ελεύθερη μεταβλητή , τότε υπάρχει πρόταση γ τέτοια ώστε $T \vdash \gamma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \gamma \urcorner)$.

Φυσικά , παραπάνω αποδείξαμε το λήμμα για τον τύπο $\neg prov(x)$. Το επιχείρημα στη γενική περίπτωση δεν διαφέρει ουσιωδώς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον τύπο $\psi(y) = \forall z(Diag(y,z) \rightarrow \varphi(z))$. Έπειτα θεωρούμε τη διαγωνιοποίηση του ψ , έστω γ , η οποία είναι λογικά ισοδύναμη με τον τύπο $\psi(\ulcorner \psi \urcorner)$ και άρα αποδεικνύεται στην T : $T \vdash \gamma \leftrightarrow \forall z(Diag(\ulcorner \psi \urcorner,z) \rightarrow \varphi(z))$. Επειδή η $Diag$ αναπαρίσταται στην T παίρνουμε ότι $T \vdash \forall z(Diag(\ulcorner \psi \urcorner,z) \leftrightarrow z = \ulcorner \gamma \urcorner)$. Έπεται ότι $T \vdash \forall z(Diag(\ulcorner \psi \urcorner,z) \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow \forall z(z = \ulcorner \gamma \urcorner \rightarrow \varphi(z))$ (αφού $\forall z(Diag(\ulcorner \psi \urcorner,z) \leftrightarrow z = \ulcorner \gamma \urcorner)$). Όμως το αριστερό μέλος της ισοδυναμίας αποδεικνύεται ισοδύναμο με την γ , ενώ το δεξί μέλος είναι τετριμμένα λογικά ισοδύναμο με την $\varphi(\ulcorner \gamma \urcorner)$. Το ζητούμενο έπεται.

6.2 Αποδεικτικό κατηγόρημα του Rosser

Υπενθυμίζουμε από την εισαγωγή ότι η πρόταση του Rosser θα λέει : " Αν είμαι αποδείξιμη , τότε υπάρχει πρωτύτερη απόδειξη της άρνησης μου". Αν θέλουμε να μεταφράσουμε αυτήν την ιδέα σε τυπικό επίπεδο ορίζουμε κατ' αρχάς τη σχέση $\overline{prf}\ (m,n)$ που αληθεύει όταν το m κωδικοποιεί μια απόδειξη της άρνησης του τύπου με αριθμό Godel n. Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση αυτή είναι βασική αναδρομική και άρα αναπαρίσταται μέσω ενός τύπου $\overline{prf}\ (x,y)$ στην PA. Ορίζουμε τώρα το αποδεικτικό κατηγόρημα του Rosser που εκφράζει την παραπάνω ιδέα :

$Rprov(x) = \exists v(prf(v,x) \wedge (\forall w \leq v)\neg \overline{prf}\ (w,x))$

Από το λήμμα της διαγωνιοποίησης (για $\varphi = \neg Rprov(x)$) ξέρουμε ότι υπάρχει πρόταση R_T, τέτοια ώστε :

$\mathrm{T} \vdash R_T \leftrightarrow \neg Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)$

Πριν περάσουμε στην απόδειξη της βελτιωμένης εκδοχής του συντακτικού θεωρήματος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η σημασιολογική εκδοχή του πρώτου θεωρήματος είναι σχεδόν άμεση , χρησιμοποιώντας την R_T. Πράγματι, αν η T είναι ορθή τότε η R_T είναι αληθής αν-ν δεν είναι Rosser-αποδείξιμη , δηλαδή αν είναι αποδείξιμη τότε υπάρχει απόδειξη της άρνησης της με μικρότερο αριθμό Godel από την απόδειξη της ίδιας της R_T. Η τελευταία πρόταση (λόγω ορθότητας) είναι ισοδύναμη με το να είναι μη αποδείξιμη η R_T. Προχωράμε όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο και παίρνουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα

Αν η T είναι μια καλή θεωρία τότε $\mathrm{T} \nvdash R_T$ και $\mathrm{T} \nvdash \neg R_T$.

Απόδειξη

1)$\mathrm{T} \nvdash R_T$: Έστω $\mathrm{T} \vdash R_T$, άρα για κάποιο m : $prf(m,\ulcorner R_T \urcorner)$ και λόγω αναπαραστασιμότητας $\mathrm{T} \vdash prf(\bar{m},\ulcorner R_T \urcorner)$. Επειδή η T είναι συνεπής θα έχουμε πως για κάθε $n \leq m$ δεν ισχύει $\overline{prf}\ (n,\ulcorner R_T \urcorner)$ (φυσικά η προηγούμενη πρόταση αληθεύει για όλα τα n , αλλά στο κατηγόρημα του Rosser μας ενδιαφέρουν μόνο τα $n \leq m$). Πάλι λόγω αναπαραστασιμότητας θα έχουμε $\mathrm{T} \vdash \neg\ \overline{prf}\ (n,\ulcorner R_T \urcorner)$, για κάθε $n \leq m$. Λόγω της ιδιότητας O4 T $\vdash (\forall w \leq \bar{m})\neg\ \overline{prf}\ (w,\ulcorner R_T \urcorner)$. Έτσι $\mathrm{T} \vdash prf(\bar{m},\ulcorner R_T \urcorner)\ \wedge (\forall w \leq \bar{m})\neg\ \overline{prf}\ (w,\ulcorner R_T \urcorner)$, δηλαδή T $\vdash Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)$. Αφού όμως $\mathrm{T} \vdash R_T$ και $\mathrm{T} \vdash R_T \leftrightarrow \neg Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)$, θα έχουμε T $\vdash \neg Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)$, που αντιβαίνει στη συνέπεια της T.

2)$\mathrm{T} \nvdash \neg R_T$: Έστω $\mathrm{T} \vdash \neg R_T$, δηλαδή για κάποιο m , $\overline{prf}\ (m,\ulcorner R_T \urcorner)$. Λόγω αναπαραστασιμότητας $\mathrm{T} \vdash \overline{prf}\ (\bar{m},\ulcorner R_T \urcorner)$. Επειδή $\mathrm{T} \vdash R_T \leftrightarrow \neg Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)$ και $\mathrm{T} \vdash \neg R_T$, παίρνουμε $\mathrm{T} \vdash Rprov(\ulcorner R_T \urcorner)\ \Leftrightarrow \mathrm{T} \vdash \exists v(prf(v,\ulcorner R_T \urcorner)\ \wedge (\forall w \leq v)\neg\ \overline{prf}\ (w,\ulcorner R_T \urcorner))$.

Δουλεύοντας εντός της T θεωρούμε "μάρτυρα" a της παραπάνω υπαρκτικής πρότασης. Λόγω του O8 $\mathrm{T} \vdash a \leq m \vee m \leq a$.

Αν $a \leq m$ τότε εφόσον $prf(a,\ulcorner R_T \urcorner)$ παίρνουμε $prf(0,\ulcorner R_T \urcorner)\ \vee prf(1,\ulcorner R_T \urcorner)\ \vee \ldots \vee prf(m,\ulcorner R_T \urcorner)$ λόγω της O3. Από την άλλη λόγω συνέπειας T $\nvdash R_T$ και άρα για κάθε n, δεν ισχύει $prf(n,\ulcorner R_T \urcorner)$. Λόγω αναπαραστασιμότητας T $\vdash \neg prf(n,\ulcorner R_T \urcorner)$, για κάθε n (αντίφαση).

Αν $m \leq a$ τότε καθώς $(\forall w \leq a)\neg\ \overline{prf}\ (w,\ulcorner R_T \urcorner)$ έπεται ότι $\neg\ \overline{prf}\ (m,\ulcorner R_T \urcorner)$ (πάλι αντίφαση). Επομένως η αρχική υπόθεση πως $\mathrm{T} \vdash \neg R_T$ οδηγεί σε αντίφαση. Έτσι $\mathrm{T} \nvdash \neg R_T$.

Σχόλιο : Στο δεύτερο σκέλος κάναμε ένα φαινομενικά μεγάλο λογικό άλμα όταν επικαλεστήκαμε τον μάρτυρα a. Όταν μια θεωρία είναι εφοδιασμένη με το συνηθισμένο αποδεικτικό σύστημα του Hilbert , αυτό το βήμα δεν είναι επιτρεπτό. Το σύστημα του Hilbert έχει το πλεονέκτημα ότι καθιστά τις μεταμαθηματικές αναλύσεις ευκολότερες αλλά έχει το μειονέκτημα ότι οι αποδείξεις εντός των συστημάτων μπορεί να είναι πολύ κοπιαστικές. Καθιστά τις μεταμαθηματικές αναλύσεις ευκολότερες διότι σε αυτό το σύστημα η απόδειξη είναι απλά μια ακολουθία τύπων , που φυσικά οι όροι της υπόκεινται στους συνηθισμένους συναγωγικούς κανόνες (κάθε πρόταση είναι ή αξίωμα ή προκύπτει από τον Modus Ponens από δύο προηγούμενους τύπους κ.λ.π.). Από την άλλη οι αποδείξεις σε αυτή τη μορφή μπορεί να είναι ιδιαίτερα κουραστικές και δύσκολες. Άλλωστε , αυτό το αποδεικτικό σύστημα δεν αντικατοπτρίζει τον τρόπο που αποδεικνύουμε προτάσεις στην καθημερινή πρακτική. Υπάρχουν ισοδύναμα αποδεικτικά συστήματα , όπως αυτό του Fitch, που είναι περισσότερο φυσικά και συγγενή με την καθημερινή μαθηματική πρακτική. Το σύστημα του Fitch επιτρέπει προσωρινές υποθέσεις εντός της απόδειξης "μοντελοποιώντας" την εις άτοπον απαγωγή. Παράδειγμα χρήσης της προηγούμενης ιδέας είναι ο μάρτυρας a. Αυστηρά, είναι προσωρινή υπόθεση εντός του συστήματος σε μια απόδειξη τύπου Fitch. Δεν θα επεκταθούμε στις λεπτομέρειες του παραπάνω αποδεικτικού συστήματος, απλά επισημαίνουμε ότι η έννοια της απόδειξης γίνεται κάπως πιο περίπλοκη από την κατα Hilbert απόδειξη. Έτσι υιοθετούμε την εξής σύμβαση : Στις μεταμαθηματικές μας αναλύσεις θα θεωρούμε ότι οι θεωρίες μας είναι εφοδιασμένες με το αποδεικτικό σύστημα του Hilbert. Όταν όμως καλούμαστε να ασχοληθούμε με μια τέτοια απόδειξη θα δουλεύουμε με το κατά Fitch αποδεικτικό σύστημα , γνωρίζοντας ότι μια τέτοια απόδειξη θα μπορούσε να μετατραπεί σε απόδειξη κατά Hilbert.

6.3 Θεώρημα Tarski

Το θεώρημα αυτής της ενότητας ,σύμφωνα με τον Godel, δείχνει τον πραγματικό λόγο για τον οποίο ισχύει το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας. Πολλοί συγγραφείς τονίζουν τη σημασία αυτού του θεωρήματος για την κατανόηση του πρώτου θεωρήματος , μεταξύ αυτών ο Smullyan. Ξεκινάμε με κάποια γλώσσα της αριθμητικής L. Ορίζουμε την αριθμητική ιδιότητα $True(n)$ να ισχύει όταν ο n κωδικοποιεί κάποιον αληθή τύπο της γλώσσας L.Έστω ο τύπος-κατηγόρημα $\mathrm{T}(x)$,που ανήκει σε μια γλώσσα L' που περιέχει την L, εκφράζει αυτήν την ιδιότητα. Τότε ο L' –τύπος : $T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ είναι αληθής. Μια θεωρία T (με γλώσσα L') θα λέμε ότι είναι θεωρία αλήθειας για την L αν για κάποιον L' –τύπο $\mathrm{T}(x)$: $T \vdash T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$. Θα λέμε επίσης ότι η θεωρία αυτή ορίζει την αλήθεια για την L. Μια προφανής ερώτηση αναδύεται. Μπορεί μια θεωρία να ορίσει την αλήθεια της ίδιας της γλώσσας της ; Η απάντηση δίνεται από το επόμενο κομβικό θεώρημα του Tarski.

Θεώρημα

Καμία καλή θεωρία δεν μπορεί να ορίσει την αλήθεια της γλώσσας της.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι απρόσμενα απλή. Υποθέτουμε ότι η T διαθέτει κατηγόρημα $\mathrm{T}(x)$ τέτοιο ώστε $T \vdash \mathrm{T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$ για κάθε πρόταση φ. Χρησιμοποιούμε το λήμμα της διαγωνιοποίησης για τον τύπο $\neg\mathrm{T}$ και παίρνουμε μια πρόταση που θυμίζει το παράδοξο του ψεύτη. Συγκεκριμένα υπάρχει L , τέτοια ώστε $T \vdash L \leftrightarrow \neg\mathrm{T}(\ulcorner L\urcorner)$. Όμως $T \vdash \mathrm{T}(\ulcorner L\urcorner) \leftrightarrow L$. Έπεται ότι η θεωρία είναι ασυνεπής και άρα όχι καλή. Έτσι, τέτοιο κατηγόρημα δεν μπορεί να υπάρχει.

Το παραπάνω θεώρημα θέτει περιορισμούς για το τι μπορεί να αποδείξει μια θεωρία σχετικά με την αλήθεια. Στην πραγματικότητα μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω. Θεωρούμε την L_A και υποθέτουμε ότι υπάρχει L_A –κατηγόρημα T που εκφράζει την αλήθεια (την ιδιότητα *True*). Ξέρουμε τότε ότι για κάποια πρόταση L : $PA \vdash L \leftrightarrow \neg \mathrm{T}(\ulcorner L \urcorner)$. Αν η PA είναι ορθή τότε η $L \leftrightarrow \neg \mathrm{T}(\ulcorner L \urcorner)$ είναι αληθής. Όμως επειδή το T είναι κατηγόρημα αλήθειας : η $\mathrm{T}(\ulcorner L \urcorner) \leftrightarrow L$ είναι αληθής. Οδηγούμαστε σε αντίφαση. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει κατηγόρημα που εκφράζει την αλήθεια. Από την άλλη υπάρχει κατηγόρημα που εκφράζει την αποδειξιμότητα. Από τα παραπάνω έπεται άμεσα μια ακόμα εκδοχή του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας :

Θεώρημα

Αν η PA είναι ορθή τότε είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Κάθε αποδείξιμη πρόταση είναι αληθής λόγω ορθότητας. Έφόσον υπάρχει κατηγόρημα που εκφράζει την αποδειξιμότητα αλλά δεν υπάρχει κατηγόρημα που εκφράζει την αλήθεια, έπεται ότι η ιδιότητα μιας πρότασης να είναι αληθής είναι διαφορετική από την ιδιότητα να είναι θεώρημα της PA. Άρα υπάρχουν αληθείς προτάσεις που είναι μη αποδείξιμες. Αν φ μια τέτοια πρόταση, τότε λόγω ορθότητας η $\neg\varphi$ είναι επίσης μη αποδείξιμη , ως ψευδής. Έπεται ότι η PA είναι μη πλήρης.

7.0 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ένα θαυμάσιο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Turing και θα δούμε πως συνδέεται με τα θεωρήματα μη πληρότητας, το θεώρημα τερματισμού. Διαισθητικά το θέωρημα τερματισμού λέει πως δεν υπάρχει αλγόριθμος που να εξετάζει μια μηχανή Turing για ένα δοθέν όρισμα και να αποφαίνεται αν η εν λόγω μηχανή σταματά για το όρισμα αυτό. Η παραπάνω διατύπωση φυσικά χρησιμοποιεί τη θέση Turing. Στην πραγματικότητα αυτό που θα αποδείξουμε είναι πως με κατάλληλη κωδικοποίηση των μηχανών δεν υπάρχει μηχανή Turing που να δέχεται δύο ορίσματα w και x και να επιστρέφει 1 , αν η μηχανή Turing με κωδικό w σταματά με όρισμα x , και 2 αν τρέχει επ' άπειρον. Παρουσιάζουμε αρχικά το πλάνο μας : Είδαμε ότι τα θεωρήματα μιας αξιωματικοποιήσιμης θεωρίας είναι αναδρομικά απαριθμήσιμα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι οι αλήθειες μιας επαρκώς ισχυρής γλώσσας (θα επεξηγηθεί παρακάτω ο όρος) δεν μπορούν να αριθμηθούν αναδρομικά. Ας υποθέσουμε τότε πως έχουμε μια ορθή θεωρία T με επαρκώς ισχυρή γλώσσα. Τα θεωρήματα της T δεν μπορεί να είναι όλες οι αλήθειες, επειδή το μεν σύνολο είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο ενώ το άλλο όχι. Επομένως κάποια θεωρήματα δεν είναι αληθή ή κάποιες αλήθειες δεν αποτελούν θεωρήματα. Αλλά το πρώτο αποκλείεται αν η θεωρία μας είναι ορθή. Έπεται ότι κάποιες αλήθειες δεν αποτελούν θεωρήματα. Έστω φ μια τέτοια μη αποδείξιμη αλήθεια. Φυσικά η άρνηση της φ είναι οπωσδήποτε μη αποδείξιμη λόγω ορθότητας και άρα η θεωρία μας είναι μη πλήρης. Το υπόλοιπο του κεφαλαίου συμπληρώνει τις λεπτομέρειες.

7.1 Πρόβλημα τερματισμού

Μετά από την αριθμητικοποίηση όλων των συντακτικών αντικειμένων και τη δουλειά που προηγήθηκε , δεν θα έπρεπε να μας προξενεί έκπληξη πως οι μηχανές Turing και κατ' επέκταση οι αναδρομικές κατά Turing συναρτήσεις μπορούν να απαριθμηθούν αποτελεσματικά. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να το πετύχουμε αυτό. Δουλεύουμε με την απλούστερη αναπαράσταση μιας μηχανής Turing ως σύνολο διατεταγμένων i –τετράδων $< p,S,A,q >$ όπου το p συμβολίζει την τωρινή κατάσταση, το S αναπαριστά το σύμβολο που διαβάζεται, το A αναπαριστά την επόμενη εντολή που πρέπει να εκτελεστεί και το q αναπαριστά την κατάσταση στην οποία μεταβαίνει η μηχανή Turing. Χάριν απλότητας , υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. Άλλωστε το οντολογικό status των καταστάσεων δεν έχει σημασία. Το μόνο που έχει σημασία είναι το πως αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της συνάρτησης μετάβασης. Ομοίως μπορούμε να υποθέσουμε ότι αντί για τα σύμβολα L και R χρησιμοποιούμε τους αριθμούς 2 και 3. Έτσι για παράδειγμα η διατεταγμένη τετράδα $< 3,1,2,4 >$ λέει ότι η μηχανή όταν βρεθεί στην κατάσταση 3 και διαβάζει το σύμβολο 1 θα μετακινήσει το δρομέα της μια θέση αριστερά και θα μεταβεί στην κατάσταση 4. Για κάθε μηχανή παραθέτουμε σε λεξικογραφική σειρά τις τετράδες που την αναπαριστούν. Μπορούμε να διαγράψουμε τα πρώτα δύο μέλη των τετράδων καθώς είναι τα αναμενόμενα (π.χ. η πρώτη τετράδα θα είναι $< 0,0,\_,\_ >$, η δεύτερη $< 0,1,\_,\_ >$ κ.ο.κ.). Έπειτα χρησιμοποιούμε τη συνηθισμένη κωδικοποίηση με τους πρώτους και καταλήγουμε να κωδικοποιήσουμε όλα τα σύνολα i –τετράδων. Φυσικά δεν αντιστοιχεί κάθε σύνολο i –τετράδων σε μηχανή Turing. Για παράδειγμα αν ένα σύνολο περιέχει τις τετράδες $< 3,1,2,4 >$ και $< 3,1,0,5 >$ δεν μπορεί να αναπαριστά μηχανή Turing επειδή δεν καθορίζεται μονοσήμαντα τι εντολή εκτελεί η μηχανή όταν βρίσκεται στην κατάσταση 3 και διαβάζει το σύμβολο 1. Όπως και να 'χει μπορούμε να απαριθμήσουμε αποτελεσματικά όλους τους κωδικούς των συνόλων i –τετράδων και έπειτα αλγοριθμικά να ελέγξουμε αν ένα συγκεκριμένο σύνολο της λίστας αναπαριστά μηχανή Turing. Αυτό θα μας δώσει μια αλγοριθμική απαρίθμηση των κωδικών των μηχανών Turing. Αν ένας αριθμός δεν αντιστοιχεί σε κάποια κωδικοποίηση μηχανής Turing τότε θεωρούμε αυθαίρετα ότι αναπαριστά την κενή συνάρτηση. Παίρνουμε έτσι

μια αρίθμηση των αναδρομικών συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$. Χρησιμοποιώντας τη θέση Church-Turing έχουμε σκιαγραφήσει το ακόλουθο :

Θεώρημα

Το σύνολο των αναδρομικών συναρτήσεων είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

Ιδανικά θα θέλαμε με αλγοριθμικό τρόπο να ελέγξουμε αν μια μηχανή Turing τερματίζει με συγκεκριμένο όρισμα. Αν η θέση Turing είναι αληθής , τότε το παραπάνω εγχείρημα είναι απλά ανέφικτο. Με άλλα λόγια η συνάρτηση τερματισμού $h(m,n)$ που ισούται με 1 όταν η μηχανή Turing με κωδικό m τερματίζει με είσοδο n , και 2 αλλιώς, δεν είναι αναδρομική.

Θεώρημα τερματισμού

Η συνάρτηση τερματισμού h είναι μη αναδρομική.

Απόδειξη

Θα χρειαστούμε δύο μηχανές, C και D. Η πρώτη μηχανή C απλά αντιγράφει το όρισμα της μια θέση δίπλα και μετά σταματά. Για παράδειγμα, αν δεχτεί σαν όρισμα το 2, δηλαδή ξεκινήσει με τη συμβολοσειρά ...000111000... , θα τερματίσει με τη συμβολοσειρά ...0001110111000... . Η άλλη μηχανή D σταματά αν δεχτεί μια συμβολοσειρά με περισσότερους από έναν άσσους και λειτουργεί επ' άπειρον αν δεχτεί μόνο έναν. Αυτή η μηχανή έχει δύο μόνο καταστάσεις. Ξεκινάει διαβάζοντας άσσο , πάει δεξιά και μεταβαίνει στην δεύτερη κατάσταση. Αν διαβάσει κι άλλον άσσο τότε πάει αριστερά και τερματίζει. Αν συναντήσει 0 τότε πάει αριστερά και επιστρέφει στην κατάσταση 1, ξεκινώντας έναν ατέρμονα βρόγχο. Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε μια μηχανή που υπολογίζει τη συνάρτηση τερματισμού h , έστω H. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις μηχανές C και H και να τις κάνουμε να λειτουργήσουν η μία μετά την άλλη με τον εξής τρόπο : Αριθμούμε αρχικά τις καταστάσεις της C , από το το 1 ως το q, και τις καταστάσεις της H , από το 1 εως το q. Επαναριθμούμε τις δεύτερες , ξεκινώντας από το $p+1$ και φτάνοντας στο $p+q$. Τώρα κάθε μετάβαση της C που μας πηγαίνει σε κατάσταση τερματισμού θα μετατραπεί σε μετάβαση που μας πηγαίνει στην κατάσταση $p+1$ στη σύνθετη μηχανή, δηλαδή στην πρώτη κατάσταση της δεύτερης μηχανής. Με αυτόν τον τρόπο καταφέραμε να ορίσουμε μηχανή G που υπολογίζει τη συνάρτηση $g(n) = h(n,n)$. Τώρα συνδυάζουμε αυτή τη μηχανή G με τη μηχανή D με ανάλογο τρόπο. Παίρνουμε μια μηχανή Μ που έχει την εξής ιδιότητα : Αν μια μηχανή με κωδικό n τερματίζει με είσοδο n , ή ισοδύναμα $h(n,n) = g(n) = 1$, τότε η μηχανή Μ με είσοδο n δεν τερματίζει. Αν πάλι μια μηχανή με κωδικό n τερματίζει με είσοδο n, ή ισοδύναμα $h(n,n) = g(n) = 2$ τότε η μηχανή Μ με είσοδο n τερματίζει. Τι γίνεται όταν η μηχανή Μ ξεκινήσει με είσοδο τον ίδιο της τον κωδικό ; Τερματίζει αν και μόνο αν δεν τερματίζει. Επομένως η υπόθεση μας πως υπάρχει μηχανή Turing που υπολογίζει τη συνάρτηση τερματισμού είναι εσφαλμένη.

Θεώρημα

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $\{(w,x) | \text{το } \varphi_w(x) \text{ ορίζεται}\}$ είναι μη αναδρομικό.

Απόδειξη με χρήση της θέσης Church-Turing

Έστω H το σύνολο αυτό και G η χαρακτηριστική του συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την G φτιάχνουμε μια νέα συνάρτηση f που ορίζεται ως εξής :

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ αν } G(x,x)=0 \\ \varphi_x(x)+1, \text{ αν } G(x,x)=1 \end{cases}$

Αν η G είναι αναδρομική συνάρτηση τότε η f είναι προφανώς υπολογίσιμη από τον τρόπο που ορίζεται, άρα από τη θέση Church-Turing είναι αναδρομική. Αλλά $f(w) \neq \varphi_w(w)$, και άρα $f \neq \varphi_w$. Έπεται ότι η G δεν είναι αναδρομική και άρα ούτε το H.

Απόδειξη

Αν το σύνολο H ήταν αναδρομικό τότε και το συμπλήρωμα του H^c θα ήταν αναδρομικό και άρα η συνάρτηση $c_H + 2c_{H^c}$ θα ήταν αναδρομική. Όμως αυτή ισούται με τη συνάρτηση τερματισμού η οποία σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι μη αναδρομική. Άρα το H είναι μη αναδρομικό.

Πόρισμα

Το σύνολο των αριθμών $K = \{x \mid \text{το } \varphi_x(x) \text{ ορίζεται}\}$ είναι μη αναδρομικό αλλά αναδρομικά απαριθμήσιμο.

Απόδειξη

Το πρώτο σκέλος προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη. Δείχνουμε επομένως ότι το K είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Το Κ προφανώς είναι μη κενό (γιατί τότε θα ήταν αναδρομικό). Σταθεροποιούμε $a \in K$.
Δοθέντος n υπολογίζουμε τα i και j ώστε $B_2(i,j) = n$. Τρέχουμε την υπ'αριθμόν i μηχανή Turing με όρισμα i για j βήματα. Αν σταματήσει , ο αλγόριθμος μας θα εξαγάγει i. Ειδάλλως ο αλγόριθμος μας εξαγάγει a. Είναι προφανές ότι καθώς το n αυξάνει ο αλγόριθμος διατρέχει όλα τα δυνατά ζεύγη (i,j) και άρα θα εξαγάγει όλα τα στοιχεία του K.

7.2 Μια άλλη εκδοχή του πρώτου θεωρήματος

Θεώρημα

Το σύνολο των αληθειών μιας επαρκώς ισχυρής γλώσσας δεν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

Απόδειξη

Το προηγούμενο πόρισμα μας λέει ότι το σύνολο K είναι αποτελεσματικά απαριθμήσιμο αλλά το συμπλήρωμα του δεν είναι. Επειδή το K είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο υπάρχει αναδρομική σχέση R τέτοια ώστε $K = \{y \mid \exists x[(x,y) \in R]\}$.
Εφόσον η R είναι υπολογίσιμη και η γλώσσα μας επαρκώς ισχυρή θα υπάρχει μια σχέση της γλώσσας που αναπαριστά την R, έστω P. Τότε θα έχουμε πως :

$n \in \bar{K} \Leftrightarrow \neg\exists x \mathrm{P}(x, \bar{n})$ αληθεύει

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι το σύνολο T των αληθειών είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο. Τότε μπορούμε να ανατρέξουμε στην υποτιθέμενη απαρίθμηση του T και κάθε φορά που βρίσκουμε αλήθειες της μορφής $\neg\exists x \mathrm{P}(x, \bar{n})$ να προσθέτουμε τον αριθμό n στη λίστα μας. Τότε θα παίρναμε μια απαρίθμηση του K, πράγμα άτοπο.

Πόρισμα

Το σύνολο των αληθών προτάσεων μιας επαρκώς ισχυρής γλώσσας είναι μη αξιωματικοποιήσιμο.

Απόδειξη

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή πως υπάρχει θεωρία T που αποδεικνύει όλες τις αλήθειες. Τότε θα είχαμε ότι οι αλήθειες ταυτίζονται με τα θεωρήματα της θεωρίας.Όμως οι μεν αλήθειες δεν απαριθμούνται ενώ τα δε θεωρήματα απαριθμούνται, άτοπο.

Από το παραπάνω θεώρημα έπεται άμεσα το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου :

Θεώρημα

Κάθε ορθή, αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που η γλώσσα της είναι επαρκώς ισχυρή είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Αν ήταν πλήρης και ορθή τότε θα ήταν το σύνολο των αληθών προτάσεων. Αλλά το σύνολο των αληθών προτάσεων είναι μη αξιωματικοποιήσιμο.

7.3 Θεώρημα Church και μια τελευταία εκδοχή

Ας υποθέσουμε ότι τρέχουμε μια συγκεκριμένη μηχανή Turing για κάποιο αριθμό βημάτων. Η λεγόμενη γενική κατάσταση της μηχανής Turing συνίσταται στα περιεχόμενα της ταινίας , στη θέση του δρομέα και την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Με άλλα λόγια μπορεί να περιγραφεί από μια τετράδα (q,u,a,v), όπου το q συμβολίζει την τωρινή κατάσταση, το u τη συμβολοσειρά αριστερά του δρομέα,το a το σύμβολο που διαβάζεται από τον δρομέα και το v τη συμβολοσειρά δεξιά του δρομέα. Μια γενική κατάσταση ονομάζεται τερματική αν το πρώτο μέλος της είναι κατάσταση τερματισμού.

Χρησιμοποιώντας την αρίθμηση των μηχανών Turing μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $c(e,n,j) = s$ η οποία τρέχει τη μηχανή με κωδικό e και όρισμα n για j βήματα και επιστρέφει τον κωδικό της γενικής κατάστασης s που προκύπτει , αν είναι μη τερματική. Αν είναι τερματική επιστρέφει 0. Ο υπολογισμός της παραπάνω συνάρτησης μπορεί να υλοποιηθεί με βρόγχους "for". Αυτό υποδεικνύει ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι βασική αναδρομική. Η αυστηρή απόδειξη είναι στο ίδιο μήκος κύματος με τις αποδείξεις του κεφαλαίου 2. Αυτό που είναι σημαντικό είναι πως εφόσον είναι βασική αναδρομική μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν τύπο $C(x,y,z,w)$ στην *Robinson Αριθμητική Q*.

Θεώρημα Church

Το πρόβλημα της απόφανσης στον κατηγορηματικό λογισμό είναι αναδρομικά μη επιλύσιμο.

Απόδειξη

Ορίζουμε $H(e) =_{def} \exists z C(e,e,z,0)$. Αν η μηχανή με κωδικό e τερματίζει με είσοδο e, τότε $c(e,e,j) = 0$ για κάποιο j. Λόγω αναπαραστασιμότητας $Q \vdash C(e,e,j,0)$ και άρα $Q \vdash H(e)$. Αν πάλι δεν τερματίζει, τότε $c(e,e,j) \neq 0$ για κάθε j, άρα $Q \vdash \neg C(e,e,j,0)$, για κάθε j και αν η Q είναι ω-συνεπής τότε $Q \nvdash H(e)$.

Έστω $\hat{Q}$ η σύζευξη όλων των αξιωμάτων της *Robinson Αριθμητικής.* Παραπάνω δείξαμε ότι η μηχανή με κωδικό e τερματίζει αν και μόνο αν η πρόταση $H(e)$ είναι θεώρημα της *Robinson Αριθμητικής*. Αυτό λόγω του θεωρήματος παραγωγής είναι ισοδύναμο με το να είναι η πρόταση $\hat{Q} \rightarrow H(e)$ θεώρημα του κατηγορηματικού λογισμού. Αν το πρόβλημα απόφανσης ήταν αναδρομικά επιλύσιμο τότε το ίδιο θα ίσχυε και για το πρόβλημα τερματισμού λόγω της παραπάνω αναγωγής. Το πρόβλημα τερματισμού όμως είναι μη επιλύσιμο. Το ζητούμενο έπεται.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο H, μπορούμε να δώσουμε μια ακόμα απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας με την αρχική υπόθεση της ω-συνέπειας.

Θεώρημα

Κάθε ω-συνεπής επέκταση T της Robinson Αριθμητικής είναι μη πλήρης.

Απόδειξη

Θεωρούμε μηχανή Turing που με όρισμα e, εξετάζει με τη σειρά όλους τους φυσικούς m και βλέπει αν κωδικοποιούν κάποια απόδειξη της πρότασης $\neg H(e)$, με άλλα λόγια υπολογίζει διαδοχικά τις τιμές της $prf(m, \ulcorner \neg H(e) \urcorner)$ και τερματίζει όταν βρει μια τέτοια απόδειξη. Διαισθητικά, αυτή η μηχανή προσπαθεί να αποδείξει ότι η μηχανή e δεν τερματίζει με όρισμα e. Έστω d ο κωδικός αυτής της μηχανής. Το ερώτημα φυσικά που είναι τι κάνει αυτή η μηχανή όταν δεχτεί σαν είσοδο το όρισμα της. Αν τερματίζει τότε $T \vdash H(d)$, λόγω αναπαραστασιμότητας. Αλλά από τον ορισμό της μηχανής, εφόσον τερματίζει, $prf(m, \ulcorner \neg H(d) \urcorner)$ για κάποιο m. Έτσι $T \vdash \neg H(d)$. Όμως η T υπετέθη ω-συνεπής και άρα συνεπής. Άρα η μηχανή d δεν τερματίζει με είσοδο d.

Τώρα θα δείξουμε ότι η πρόταση $H(d)$ και η άρνηση της είναι μη αποδείξιμες από την T.
(α) Έστω $T \vdash \neg H(d)$. Τότε $prf(m, \ulcorner \neg H(d) \urcorner)$ για κάποιο m και άρα η μηχανή d θα σταματήσει με είσοδο d. Αλλά είδαμε ότι το τελευταίο δεν ισχύει.

(β) Έστω $T \vdash H(d)$, δηλαδή $T \vdash \exists z C(d,d,z,0)$. Όμως η μηχανή d δεν τερματίζει και άρα $c'(d,d,j) \neq 0$ για κάθε j. Λόγω αναπαραστασιμότητας $T \vdash \neg C(d,d,j,0)$ για κάθε j. Άρα η T είναι ω-ασυνεπής (άτοπο).

8.0 Εισαγωγή

Έχουμε δει μέχρι στιγμής πως στην PA και σε κάθε επέκταση της (που πληροί ορισμένες φυσικές προϋπόθεσεις) υπάρχουν δύο προτάσεις , αυτή του Godel και αυτή του Rosser , τις οποίες η θεωρία δεν μπορεί ούτε να τις αποδείξει , ούτε να τις καταρρίψει. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε άλλη μια τέτοια πρόταση. Συγκεκριμένα, το δεύτερο θεώρημα του Godel μας εξασφαλίζει ότι η πρόταση που εκφράζει τη συνέπεια της PA , δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της PA. Το αποτέλεσμα γενικεύεται σε συνεπείς αξιωματικοποιήσιμες επεκτάσεις της PA. Ποιά είναι όμως η πρόταση που εκφράζει τη συνέπεια της θεωρίας μας ; Σίγουρα δεν είναι μόνο μια. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι κάθε ασυνεπής θεωρία αποδεικνύει οποιονδήποτε τύπο της γλώσσας. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία θα αποδεικνύει την πρόταση $0 = 1$. Από την άλλη κάθε θεωρία που επεκτείνει την PA αποδεικνύει την πρόταση $0 \neq 1$. Αυτό σημαίνει πως αν αποδεικνύει την πρόταση $0 = 1$ είναι ασυνεπής. Εν κατακλείδι, η θεωρία θα είναι συνεπής αν και μόνο αν δεν αποδεικνύει την πρόταση $0 = 1$. Με άλλα λόγια, η πρόταση $Con =_{def} \neg prov(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ εκφράζει τη συνέπεια της θεωρίας. Ο ισχυρισμός του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας είναι πως η προηγούμενη πρόταση είναι μη αποδείξιμη από τη θεωρία. Υπάρχουν δύο γνωστές προσεγγίσεις. Ο κλασικός τρόπος , τον οποίο σε αδρές γραμμές περιέγραψε ο Godel στην περίφημη δημοσίευση που απέδειξε το πρώτο θεώρημα, είναι να τυποποιήσει κανείς την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας εντός της θεωρίας. Με άλλα λόγια θα δείξουμε ότι $T \vdash Con \rightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$ όπου G μια Godel. Τώρα η αντίφαση είναι σχεδόν άμεση. Επειδή η G είναι πρόταση Godel $T \vdash G \leftrightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$. Έπεται ότι $T \vdash G$, που είναι άτοπο λόγω του πρώτου θεωρήματος. Ο δεύτερος τρόπος χρησιμοποιεί το θεώρημα του Lob , το οποίο έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από μόνο του.

8.1 Μια πρώτη απόδειξη

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή ο Godel δεν είχε δώσει πλήρη απόδειξη για το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. Η ιδέα ήταν πως η απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μπορούσε να τυποποιηθεί εντός της θεωρίας και άρα $T \vdash Con \rightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$. Το να συμπληρώσει κανείς όλες τις λεπτομέρειες είναι μια ιδιαίτερα κοπιώδης προσπάθεια. Θα επικεντρωθούμε στην ουσία , παραλείποντας την απόδειξη ενός τεχνικού λήμματος που απλοποιεί αρκετά τα πράγματα. Το λήμμα αυτό απομονώνει τρεις συνθήκες τις οποίες ικανοποιεί το αποδεικτικό κατηγόρημα , οι οποίες είναι αρκετές για την απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας.

Υιοθετούμε κατ' αρχάς τους συμβολισμούς $\Box\varphi =_{def} prov(\ulcorner \varphi \urcorner)$ και $\bot =_{def} 0 = 1$, χάριν

απλότητας.

Λήμμα (Συνθήκες Hilbert-Bernays-Lob)

Έστω T συνεπής , αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της PA και έστω $prov(x)$ το αποδεικτικό κατηγόρημα της T. Τότε ισχύουν οι κάτωθι τρεις συνθήκες :

(P1)Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \vdash \Box\varphi$

(P2)$T \vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

(P3)$T \vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

Θεώρημα

Αν η T είναι συνεπής αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της PA τότε $T \vdash Con \to \neg \Box G$

Απόδειξη

Για κάθε φ , ο τύπος $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ είναι ταυτολογία και άρα αποδείξιμος από την T. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (C1) και (C2) διαδοχικά παίρνουμε : (A): $T \vdash \Box\neg\varphi \to \Box(\varphi \to \bot)$. Έχουμε τώρα :

1.$T \vdash G \to \neg \Box G$, εφόσον η G είναι πρόταση του διαγώνιου λήμματος
2.$T \vdash \Box(G \to \neg \Box G)$, από την 1 και τη συνθήκη (C1)
3.$T \vdash \Box G \to \Box\neg \Box G$, από τη 2 και τη συνθήκη (C2)
4.$T \vdash \Box\neg\Box G \to \Box(\Box G \to \bot)$, ειδική περίπτωση του (A) για $\varphi = \Box G$
6.$T \vdash \Box G \to (\Box\Box G \to \Box \bot)$, από τις 3 και 4
7.$T \vdash \Box G \to \Box\Box G$, από τη συνθήκη (C3)
8.$T \vdash \Box G \to \Box \bot$, από τις 6 και 7
9.$T \vdash \neg\Box \bot \to \neg\Box G$, αντιθετοαντίστροφη της 8
10.$T \vdash Con \to \neg\Box G$, ορισμός της Con

Θεώρημα (δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας)

Έστω T συνεπής αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της PA. Τότε $T \nvdash Con$.

Απόδειξη

Αν $T \vdash Con$ τότε χρησιμοποιώντας Modus Ponens και το προηγούμενο θεώρημα παίρνουμε $T \vdash \neg\Box G$.Όμως αν η G είναι κάποια πρόταση του διαγώνιου λήμματος για $\varphi(x) = prov(x)$, τότε $T \vdash G \leftrightarrow \neg\Box G$. Άρα $T \vdash G$, άτοπο λόγω του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας.

7.2 Θεώρημα Lob και μια δεύτερη απόδειξη

Θεώρημα του Lob

Έστω T συνεπής αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της PA και έστω $B(x)$ τύπος που ικανοποιεί τις συνθήκες (P1)-(P3). Τότε για κάθε πρόταση φ, αν $T \vdash B(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, τότε $T \vdash \varphi$.

Απόδειξη
Έστω λοιπόν πως (1) : $T \vdash B(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$. Έστω $D(y) := (B(y) \to \varphi)$. Εφαρμόζωντας το διαγώνιο λήμμα παίρνουμε πρόταση ψ τέτοια ώστε (2) : $T \vdash \psi \leftrightarrow (B(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi)$.Έτσι (3) : $T \vdash \psi \to (B(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi)$. Λόγω της P1 έχουμε (4) : $T \vdash B(\ulcorner\psi \to (B(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi)\urcorner)$. Λόγω της P2 παίρνουμε (5) : $T \vdash B(\ulcorner\psi \to (B(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi)\urcorner) \to (B(\ulcorner\psi\urcorner) \to B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi\urcorner))$. Από

τις (4) και (5) παίρνουμε (6) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow \varphi\urcorner)$. Ξανά λόγω της P2 παίρνουμε (7) : $T \vdash B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow \varphi\urcorner) \rightarrow (B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner\varphi\urcorner))$. Από τις (6) και (7) έπεται ότι (8) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow (B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner\varphi\urcorner))$. Λόγω της P3 (9) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner B(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$. Έτσι από τις (8) και (9) θα έχουμε (10) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Από τις (1) και (10) προκύπτει πως (11) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow \varphi$. Η (2) τώρα δίνει την (12) : $T \vdash \psi$ που με τη σειρά της και με χρήση της P1 δίνει (13) : $T \vdash B(\ulcorner\psi\urcorner)$. Τέλος οι (13) και (11) δίνουν το ζητούμενο , δηλαδή πως $T \vdash \varphi$.

Η απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας είναι τώρα άμεση χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα για το αποδεικτικό κατηγόρημα θα έχουμε ότι αν $T \vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$, τότε $T \vdash \varphi$.

Θεώρημα (δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας)

Έστω T συνεπής, αξιωματικοποιήσιμη επέκταση της PA. Τότε $T \nvdash Con$.

Απόδειξη

Αν $T \vdash \neg\Box(0 = 1)$, τότε σαφώς $T \vdash \Box(0 = 1) \rightarrow \varphi$, όπου φ οποιοσδήποτε τύπος. Έτσι $T \vdash \Box(0 = 1) \rightarrow 0 = 1$. Από το θεώρημα του Lob παίρνουμε ότι $T \vdash 0 = 1$ και άρα η T είναι ασυνεπής, πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση :
[1]:Peter Smith : An introduction to Godel's Theorems
[2]:George Boolos : Computability and Logic
[3]:Raymond Smullyan : Godels Incompleteness Theorems
[4]:Enderton : An introduction to Logic
[5]:Leary : A friendly introduction to logic
[6]:Lewis, Harry R. and Christos H. Papadimitriou : Elements of the Theory of Computation
[7]:Robert S. Wolf : A Tour Through Mathematical Logic
Ελληνική :
[1]:Αθ.Τζουβάρας : Στοιχεία μαθηματικής λογικής
[2]:Κολέτσος : Μαθηματική Λογική