5.2 Διαγωνιοποίηση

Στο Παράδειγμα 5.1.17, α) είδαμε ότι ο πίνακας του ενδομορφισμού $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως προς μία βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f είναι διαγώνιος. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε περαιτέρω αυτό το φαινόμενο.

Ορισμός 5.2.1. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V. Ο ϕ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος** (diagonalizable) αν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση B του V, ώστε ο πίνακας A του ϕ ως προς την B να είναι διαγώνιος.*

Από τη σχέση (3.9) που συνδέει τους πίνακες ενός ενδομορφισμού ως προς διαφορετικές βάσεις, είναι αναμενόμενος ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 5.2.2. *Ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(K)$ έτσι ώστε ο πίνακας $S^{-1}A\,S$ να είναι διαγώνιος.*

Αν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του K-διανυσματικού χώρου V ώστε ο πίνακας A της ϕ ως προς την B να είναι διαγώνιος, τότε υπάρχουν $\lambda_i \in K$, $1 \le i \le n$, έτσι ώστε

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Επομένως $\phi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \phi(v_n) = \lambda_n v_n$, δηλ. τα λ_i είναι ιδιοτιμές του ϕ και το v_i είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ_i, $1 \le i \le n$.

Ας επανέλθουμε στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_\phi(x)$ του ενδομορφισμού $\phi : V \to V$ του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V. Γνωρίζουμε ότι $P_\phi(\lambda) = 0$, για κάποιο $\lambda \in K$, αν και μόνο αν $(x-\lambda)/P_\phi(x)$. Έστω ότι

$$P_\phi(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_r)^{s_r} Q(x)$$

η ανάλυση του $P_\phi(x)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα K, όπου το $Q(x)$ δεν έχει ρίζες στο K. Μάλιστα αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $P_\phi(x)$ είναι ίσος με $(-1)^n$ έπεται ότι και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $Q(x)$ είναι ίσος με $(-1)^n$. Οι ρίζες $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ είναι οι ιδιοτιμές του ϕ με πολλαπλότητα $s_1, \ldots, s_r$ αντίστοιχα. Αν το σώμα K είναι το $\mathbb{C}$, τότε γνωρίζουμε από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας ότι το $P_\phi(x)$ είναι γινόμενο γραμμικών παραγόντων, δηλ $s_1 + \cdots + s_r = n$ και $Q(x)(-1)^n$. Αν όμως το K είναι το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{R}$ είναι δυνατόν το $P_\phi(x)$ να μην αναλύεται σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων με συντελεστές από το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{R}$ αντίστοιχα και το $Q(x)$ να είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2.

Παραδείγματα 5.2.3.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού

$$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \,, \quad (x, y, z, w) \mapsto (z, -x + y - w, -2x + y - w, x - z + w)$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ είναι το

$$P_\phi(x) = (x-1)^2(x^2+1).$$

Η μόνη ιδιοτιμή του ϕ είναι το 1 με πολλαπλότητα 2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο όμως του ενδομορφισμού

$$\psi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 \,, \quad (x, y, z, w) \mapsto (z, -x + y - w, -2x + y - w, x - z + w)$$

του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^4$ είναι το

$$P_\psi(x) = (x-1)^2(x-i)(x+i)$$

και οι ιδιοτιμές του είναι το 1 με πολλαπλότητα 2 και τα i και $-i$ με πολλαπλότητα 1. $\square$

Ορισμός 5.2.4. *Η πολλαπλότητα s της ιδιοτιμής λ του ενδομορφισμού $\phi : V \to V$ του K-διανυσματικού χώρου V στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_\phi(x)$ λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) της λ. Η διάσταση του υποχώρου $V_\lambda(\phi)$ λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** (geometric multiplicity) της λ.*

Πρόταση 5.2.5. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V και λ μία ιδιοτιμή του. Τότε*

$$\dim_K(V_\lambda(\phi)) \leq s,$$

όπου s είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ.

Απόδειξη. Αν s είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ, τότε

$$P_\phi(x) = (x-\lambda)^s g(x),$$

όπου το $(x-\lambda)$ δεν διαιρεί το $g(x)$. Έστω $\{v_1, \ldots, v_m\}$ μία βάση του $V_\lambda(\phi)$. Επεκτείνουμε τη βάση αυτή του $V_\lambda(\phi)$ σε μία βάση $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ του V και έστω

$$B = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$$

η διατεταγμένη βάση του V. Έστω A ο πίνακας της ϕ ως προς τη B. Τότε, αφού $\phi(v_i) = \lambda v_i$, $1 \le i \le m$, ο A έχει τη μορφή

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & \Gamma \\ & & \lambda & \\ \hline & \mathbf{O} & & \Delta \end{array}\right],$$

όπου $\Gamma \in M_{m\times(n-m)}(K)$, $\Delta \in M_{n-m}(K)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι ίσο με

$$P_A(x) = (x-\lambda)^m P_\Delta(x),$$

όπου $P_\Delta(x)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Δ (βλ. Παράδειγμα 5.1.10, δ). Έστω ότι $P_\Delta(x) = (x-\lambda)^t q(x)$, $t \ge 0$, όπου το $(x-\lambda)$ δεν διαιρεί το $q(x)$. Τότε

$$P_\phi(x) = P_A(x) = (x-\lambda)^{m+t} q(x) = (x-\lambda)^s g(x).$$

Άρα $m \le s$. ■

Θεώρημα 5.2.6. (**Θεώρημα Διαγωνιοποίησης**) *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V διάστασης n και A ο πίνακας του ϕ ως προς μία βάση του V. Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:*

i) *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_\phi(x)$ του ϕ έχει όλες τις ρίζες του στο K και*

ii) *η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του ϕ ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα, δηλ. αν*

$$P_\phi(x) = (x-\lambda_1)^{t_1}\cdots(x-\lambda_r)^{t_r}$$

τότε

$$\dim_K(V_{\lambda_1}(\phi)) = t_1, \ldots, \dim_K(V_{\lambda_r}(\phi)) = t_r.$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε υπάρχει μία διατεταγμένη βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του V ώστε ο πίνακας A της ϕ ως προς τη B να είναι

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{O} & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & \mathbf{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix},$$

όπου η ιδιοτιμή λ_i εμφανίζεται s_i φορές, $1 \leq i \leq r$. Επομένως

$$P_\phi(x) = (x-\lambda_1)^{s_1}\cdots(x-\lambda_r)^{s_r},$$

δηλ. όλες οι ιδιοτιμές του ϕ ανήκουν στο σώμα K. Άρα ισχύει το i).

Ακόμη παρατηρούμε ότι $\phi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \phi(v_{s_1}) = \lambda_1 v_{s_1}$, επομένως τα $v_1, \ldots, v_{s_1}$ ανήκουν στο $V_{\lambda_1}(\phi)$. Αφού αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα ως στοιχεία της βάσης B, έπεται ότι $\dim_K(V_{\lambda_1}(\phi)) \geq s_1$ (βλ. Πρόταση 2.3.26, i). Όμως από την Πρόταση 5.2.5 ισχύει $\dim_K(V_{\lambda_1}(\phi)) \leq s_1$. Συνεπώς $\dim_K(V_{\lambda_1}(\phi)) = s_1$. Όμοια $\dim_K(V_{\lambda_i}(\phi)) = s_i$, $i = 2, \ldots, r$. Αποδείχθηκε έτσι το ii).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν τα i) και ii). Τότε τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του ϕ. Άρα από την Πρόταση 5.1.16 το άθροισμα $V_{\lambda_1}(\phi) + \cdots + V_{\lambda_r}(\phi)$ είναι ευθύ και από το ii) έπεται ότι

$$\dim_K(V_{\lambda_1}(\phi)) + \cdots + \dim_K(V_{\lambda_r}(\phi)) = t_1 + \cdots + t_r = n = \dim_K(V).$$

Επομένως $V_{\lambda_1}(\phi) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}(\phi) = V$ (βλ. Πρόταση 2.3.37). Έτσι αν $v_{i1}, \ldots, v_{it_i}$, $1 \leq i \leq r$ είναι μία βάση του $V_{\lambda_i}(\phi)$, τότε η

$$B = (v_{11}, \ldots, v_{1t_1}, \ldots, v_{r1}, \ldots, v_{rt_r})$$

είναι μία διατεταγμένη βάση του V και ως προς αυτή τη βάση ο πίνακας της ϕ είναι διαγώνιος. ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το επόμενο:

Πόρισμα 5.2.7. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V διάστασης n και A ο πίνακας του ϕ ως προς μία βάση του V. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ (κατά συνέπεια και του A) έχει n διακεκριμένες ρίζες, τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Παραδείγματα 5.2.8.

α) Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ με πίνακα ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ τον

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι το

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -2 & 1-x & 0 \\ -2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)[(4-x)(1-x)+2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (1-x)(x-2)(x-3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Αφού ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος. Πράγματι, οι ιδιοχώροι του A είναι οι

$$\begin{aligned} V_1 = \{\ (0,\kappa,0)\ /\ \kappa \in \mathbb{R}\} &= S(\{(0,1,0)\}), \\ V_2 = \{\ (-\tfrac{1}{2}\kappa,\kappa,\kappa)\ /\ \kappa \in \mathbb{R}\} &= S(\{(-\tfrac{1}{2},1,1)\}), \\ V_3 = \{\ (-\kappa,\kappa,\kappa)\ /\ \kappa \in \mathbb{R}\} &= S(\{(-1,1,1)\}), \end{aligned}$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.16

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

Τα ιδιοδιανύσματα

$$\varepsilon_1 = (0,1,0), \quad \varepsilon_2 = (-\frac{1}{2},1,1), \quad \varepsilon_3 = (-1,1,1)$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον ϕ ως προς τη βάση $D = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.6. Άρα

$$S^{-1}A\,S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

όπου

$$S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας που εκφράζει τα στοιχεία $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της συνήθους βάσης $B = (e_1, e_2, e_3)$ του $\mathbb{R}^3$.

β) Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 5.1.12, στ) έχει ιδιοτιμές το 2 με πολλαπλότητα 2 και το 3 με πολλαπλότητα 1 και ιδιοχώρους τους

$$V_2 = S(\{(-2,1,0),(-2,0,1)\})$$

με $\dim(V_2) = 2$ και

$$V_3 = S(\{(-1,-1,1)\})$$

με $\dim(V_3) = 1$. Άρα πληρούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 5.2.6,

$$\mathbb{R}^3 = V_2 \oplus V_3$$

και ο πίνακας A διαγωνιοποιείται:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} .$$

γ) Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

του Παραδείγματος 5.1.12, γ) έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = x^2+1$ και δε διαγωνιοποιείται στο $M_2(\mathbb{R})$. Αν όμως θεωρηθεί ως πίνακας του $M_2(\mathbb{C})$, τότε έχει ιδιοτιμές i και $-i$ με αντίστοιχους ιδιοχώρους $V_i(A) = S(\{(i,1)\})$ και $V_{-i}(A) = S(\{(-i,1)\})$, επομένως

$$A = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} .$$

δ) Έστω ότι για τον πίνακα $A \in M_n(K)$ υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(K)$ έτσι ώστε ο πίνακας $S^{-1}A\,S$ να είναι διαγώνιος, δηλ.

$$S^{-1}A\,S = D,$$

όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας και $d_1, d_2, \ldots, d_n$ τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του (τα οποία είναι και οι ιδιοτιμές του πίνακα A). Θα υπολογίσουμε τον πίνακα A^m, όπου $m \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$A = S\,D\,S^{-1}.$$

Αν $m > 0$, τότε

$$A^m = (S\,D\,S^{-1})^m = S\,D\,S^{-1}S\,D\,S^{-1} \cdots S\,D\,S^{-1} = S\,D^m S^{-1}.$$

Ακόμη

$$A^{-m} = (A^m)^{-1} = (S\,D^m S^{-1})^{-1} = S\,D^{-m} S^{-1}.$$

Προφανώς $A^0 = I_n$. Άρα

$$A^m = S\,D^m S^{-1}, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z},$$

και ως γνωστόν

$$D^m = \begin{bmatrix} d_1^m & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & d_n^m \end{bmatrix}, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

□

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι για να διαγωνιοποιήσουμε ένα πίνακα $A \in M_n(K)$, πρώτα βρίσκουμε τους ιδιοχώρους του σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 5.1.11. Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 5.2.6, τότε $D = S^{-1} A\, S$, όπου ο D είναι ο διαγώνιος πίνακας που οι τιμές της κύριας διαγωνίου του είναι οι ιδιοτιμές του A και S είναι ο πίνακας που οι στήλες του είναι ιδιοδιανύσματα του A και αποτελούν βάση για το χώρο K^n. Έτσι παρατηρούμε ότι ο S δεν είναι μοναδικός πίνακας, για διαφορετικά ιδιοδιανύσματα κάθε ιδιοχώρου έχουμε διαφορετικό πίνακα στη θέση του S με τις ίδιες ιδιότητες που έχει ο S.

Η διαγωνιοποίηση ενός πίνακα αποδεικνύεται πολλές φορές ιδιαίτερα χρήσιμη. Για παράδειγμα απλοποιεί τον υπολογισμό δυνάμεων ενός πίνακα, όπως φαίνεται στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 5.2.9. Το πρόβλημα του κυνηγού και της λείας του

Στο απλοποιημένο μοντέλο που ακολουθεί, τα γεράκια μίας περιοχής τρέφονται αποκλειστικά με ποντικούς του αγρού, ενώ οι ποντικοί του αγρού δεν έχουν άλλους εχθρούς και έχουν απεριόριστες ποσότητες τροφής. Το μοντέλο αυτό περιγράφει ένα απλό δυναμικό σύστημα και λέγεται μοντέλο κυνηγού και λείας (predator-prey model).

Έστω ότι x_k είναι ο πληθυσμός των ποντικών (της λείας) και y_k είναι ο πληθυσμός των γερακιών (του κυνηγού) k χρόνια μετά την αρχική μέτρηση. Έστω ότι ο πληθυσμός $k+1$ χρόνια μετά την αρχική μέτρηση περιγράφεται από το γραμμικό μοντέλο:

$$\begin{array}{rcrcr} y_{k+1} & = & 1/2\, y_k & + & 1/100\, x_k \\ x_{k+1} & = & -50/4\, y_k & + & 5/4\, x_k \end{array}$$

και ότι ξεκινάμε με αρχικό πληθυσμό 50 γερακιών και 1600 ποντικών. Έτσι τον πρώτο χρόνο μετά την αρχική μέτρηση ο πληθυσμός των ποντικών έχει μειωθεί κατά 225 και των γερακιών έχει μειωθεί κατά 9.

Δε θα εξετάσουμε εδώ αν το μοντέλο αυτό ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα ή ποιά είναι η σημασία των συντελεστών, αλλά θα το δεχθούμε ως ικανοποιητικό.

Θέτουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/100 \\ -50/4 & 5/4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_k = \begin{bmatrix} y_k \\ x_k \end{bmatrix},$$

τότε

$$V_k = AV_{k-1} = A(AV_{k-2}) = A^2 V_{k-2} = \cdots = A^k V_0,$$

όπου $V_0 = \begin{bmatrix} 50 & 1600 \end{bmatrix}^T$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $V_1 = \begin{bmatrix} 41 & 1375 \end{bmatrix}^T$, δηλ. μετά από ένα χρόνο έχουμε 41 γεράκια και 1375 ποντικούς. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $V_2 = \begin{bmatrix} 29.18 & 1079.69 \end{bmatrix}^T$, $V_3 = \begin{bmatrix} 20.4 & 860.18 \end{bmatrix}^T$ κ.ο.κ. Το ερώτημα που τίθεται είναι, τι θα γίνει μετά την πάροδο πολλών χρόνων. Θα συνεχιστεί αυτή η πτωτική τάση μέχρι να εξαφανισθούν τα γεράκια και οι ποντικοί;

Είναι αναγκαίο λοιπόν να υπολογίσουμε το A^k. Γι' αυτό το λόγο θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1 και 3/4 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 & 50 \end{bmatrix}^T$ και $\begin{bmatrix} 1 & 25 \end{bmatrix}^T$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 50 & 25 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

και ότι $D = P^{-1}AP$. Επομένως

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}.$$

Έτσι ο πληθυσμός V_k ισούται με το γινόμενο των πινάκων $A^kV_0 = PD^kP^{-1}V_0$. Η τιμή του $\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ τείνει στο 0, όταν το k τείνει στο άπειρο. Συνεπώς ο πίνακας D^k τείνει στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όταν το k τείνει στο άπειρο. Επομένως όταν το k τείνει στο άπειρο το V_k τείνει στον

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}V_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 700 \end{bmatrix}.$$

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι ο πληθυσμός σταθεροποιείται στην οριακή τιμή των 14 γερακιών και 700 ποντικών!

Εφαρμογή 5.2.10. Διαφορικές εξισώσεις και ιδιοτιμές

Μία χρήσιμη εφαρμογή της διαγωνιοποίησης είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση. Το πιο απλό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι η εξίσωση $f'(x) = af(x)$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι $h(x) = Ce^{ax}$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης, αφού $h'(x) = Cae^{ax}$. Όμως ισχύει κάτι ισχυρότερο:

Όλες οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = af(x)$ είναι της μορφής $h(x) = Ce^{ax}$.

Πράγματι έστω ότι $f(x)$ είναι μία άλλη λύση. Τότε θέτουμε $g(x) = f(x)e^{-ax}$. Παραγωγίζοντας τα δύο σκέλη της εξίσωσης έχουμε ότι

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0,$$

επομένως η συνάρτηση $g(x)$ είναι η σταθερή συνάρτηση και $g(x) = C$, για κάποιο $C \in \mathbb{R}$. Αφού $C = f(x)e^{-ax}$, έπεται ότι $f(x) = Ce^{ax}$. Αν γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης, για κάποιο x, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη σταθερά C.

Παραδείγματα 5.2.11.

α) Αν $f'(x) = 2f(x)$, τότε $f(x) = Ce^{2x}$. Αν $f(0) = 3$, τότε $3 = Ce^0 = C$ και $f(x) = 3e^{2x}$.

β) Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{array}{rl} f_1'(x) = & 2f_1(x) \\ f_2'(x) = & 3f_2(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} f_1(x) = & C_1e^{2x} \\ f_2(x) = & C_2e^{3x}\,. \end{array}$$

Αν $f_1(0) = 3$, $f_2(0) = 5$, έπεται ότι $f_1(x) = 3e^{2x}$ και $f_2(x) = 5e^{3x}$.

Μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω σύστημα με μορφή πινάκων

$$F' = AF, \quad \text{όπου} \quad F' = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Γενικότερα είναι χρήσιμο όταν έχουμε κάποιο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= a_{11}f_1(x) + \cdots + a_{1n}f_n(x) \\ &\vdots \\ f_n'(x) &= a_{n1}f_1(x) + \cdots + a_{nn}f_n(x), \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, να το γράφουμε στη μορφή

$$F' = AF,$$

όπου

$$A = (a_{ij}) \,, \quad F' = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \,.$$

Η επόμενη πρόταση απλοποιεί τη λύση του συστήματος $F' = AF$.

Πρόταση 5.2.12. *Έστω ότι $F' = AF$ είναι ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, όπου ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και $D = P^{-1}AP$ με D τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A και P τον πίνακα με στήλες τις συντεταγμένες των ιδιοδιανυσμάτων του A. Τότε η F είναι λύση του συστήματος $F' = AF$ αν και μόνο αν η $G = P^{-1}F$ είναι λύση του συστήματος $G' = DG$.*

Απόδειξη. Έστω ότι F είναι μία λύση του συστήματος $F' = AF$. Θέτουμε $G = P^{-1}F$. Τότε $F = PG$, ενώ $G' = P^{-1}F' = P^{-1}AF = P^{-1}APG = DG$. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. ■

Συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε τη λύση του συστήματος $F' = AF$ βρίσκουμε πρώτα τη λύση G του απλούστερου συστήματος $G' = DG$ και θέτουμε $F = PG$.

Παράδειγμα 5.2.13.

Έστω το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2f_1(x) - f_2(x) \\ f_2'(x) &= 6f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές $1, -4$ και έχουμε ότι $A = PDP^{-1}$, με

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα $G = DG$ έχει λύση $G = \begin{bmatrix} C_1e^x & C_2e^{-4x} \end{bmatrix}^T$ και επομένως η λύση του συστήματος $F' = AF$ είναι $F = PG$, όπου

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^x + C_2e^{-4x} \\ C_1e^x + 6C_2e^{-4x} \end{bmatrix}.$$

Αν γνωρίζουμε κάποιες αρχικές τιμές για τις συναρτήσεις, τότε επιλύοντας το κατάλληλο σύστημα μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1, C_2. Πράγματι, έστω στο τελευταίο παράδειγμα ότι $f_1(0) = 2$, $f_2(0) = -3$. Έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -3 &= C_1 + 6C_2 \end{aligned}$$

με λύση $C_1 = 3$, $C_2 = -1$, οπότε

$$f_1(x) = 3e^x - e^{-4x} \quad \text{και} \quad f_2(x) = 3e^x - 6e^{-4x}.$$ □

Ασκήσεις εδαφίου 5.2

1. Είναι διαγωνιοποιήσιμος ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2. **(*)** Να υπολογίσετε για ποιές τιμές των a, b διαγωνιοποιείται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

3. **(*)** Να εξετάσετε αν ο πίνακας που αντιστοιχεί στον ενδομορφισμό

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z)$$

ως προς κάποια βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

4. (*) Έστω ότι ο πίνακας A διαγωνιοποιείται και έχει ιδιοτιμές $i, -i, 1$. Να υπολογίσετε τους πίνακες A^4 και A^5.

5. (*) Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. (*) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{100}, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (*) Να εξετάσετε αν είναι διαγωνιοποιήσιμοι οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. (*) Αν οι συντεταγμένες των γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων v_1 και v_2 του $\mathbb{R}^2$ είναι στήλες του πίνακα $S \in M_2(\mathbb{R})$, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = SBS^{-1}, \qquad \text{όπου} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. (*) Δίνεται το μοντέλο

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 0.55\, y_k + 0.005\, x_k \\ x_{k+1} &= -18\, y_k + 1.2\, x_k, \end{aligned}$$

όπου x_k είναι ο πληθυσμός των ποντικών μίας περιοχής μετά από k χρόνια, ενώ y_k είναι ο πληθυσμός των γερακιών την ίδια χρονική στιγμή. Δίνεται επίσης ότι $x_0 = 700$ και $y_0 = 14$.

(α′) Θα επιτευχθεί κάποτε μία ισορροπία, δηλ. ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί;

(β′) Σε 5 χρόνια οι βιολόγοι προσπαθούν να αυξήσουν τον πληθυσμό των γερακιών και προσθέτουν 1000 ποντικούς. Να βρείτε τον πληθυσμό των γερακιών σε 10 χρόνια από τώρα.

(γ′) Μετά από 10 χρόνια ο συντελεστής επιβίωσης των γερακιών ελαττώνεται ξαφνικά από το 0.55 στο 0.50. Οι βιολόγοι έχουν σημάνει συναγερμό και προσπαθούν να βρούν αν αυτό σημαίνει ότι θα εξαφανισθεί ο πληθυσμός των γερακιών. Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι ανησυχίες των βιολόγων.

Συνιστάται η χρήση του Mathematica για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων στα παραπάνω ερωτήματα.

10. **(*)** Να λυθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} f_1'(x) & = & 3f_1(x) & + & 2f_2(x) & + & 2f_3(x) \\ f_2'(x) & = & f_1(x) & + & 4f_2(x) & + & 2f_3(x) \\ f_3'(x) & = & -f_1(x) & - & 2f_2(x) & & , \end{array}$$

αν $f_1(0) = -1$, $f_2(0) = f_3(0) = 0$.

11. **(*)** Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός διαγωνιοποιήσιμος πίνακας A του $M_n(K)$ που έχει μία μόνο ιδιοτιμή $\lambda \in K$ είναι ο διαγώνιος πίνακας που όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με λ.

Εξάσκηση με Mathematica εδαφίου 5.2

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε ένα πολυώνυμο $p(x)$ και έναν πίνακα m με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x)$. Διαπιστώνουμε ότι ο m δεν διαγωνιοποιείται. Ορίζουμε ένα διαγώνιο πίνακα dm με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x)$. Με την εντολή Table[Random[ ], $\{i, 6\}, \{j, 6\}$] δημιουργούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα S του $M_6(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες S και dm κατασκευάζουμε έναν πίνακα ndm που διαγωνιοποιείται, έτσι ώστε οι στήλες του S να είναι ιδιοδιανύσματα του ndm. Τέλος λύνουμε το πρόβλημα του κυνηγού και της λείας του.

In[*]:= **<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`**

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix},$$

επομένως το $(1,\dots,1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή n. Επειδή $V_0(A)\oplus V_n(A)\subseteq K^n \Rightarrow \dim_k(V_0(A))+\dim_K(V_n(A))\le n$ συμπεραίνουμε ότι $\dim_K(V_n(A))=1$, άρα $V_n(A)=S(\{(1,\dots,1)\})$.

5.2 Διαγωνιοποίηση

1. Η διάσταση του ιδιοχώρου είναι 1 και η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι 2.

2. Για $a\neq b$, ο πίνακας διαγωνιοποιείται γιατί έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αν $a=b$, τότε η ιδιοτιμή a έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, ενώ η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 1.

3. Το 2 είναι ιδιοτιμή του ϕ με πολλαπλότητα 2, ενώ $V_2(\phi)=S(\{(1,0,0)\})$, δηλ. η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 1.

4. $A^4=I$, $A^5=A$.

5. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$P_A(x)=(2-x)(x-2)(x-7).$$

Οι ιδιοχώροι που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 2 και 7 είναι οι

$$V_2(A)=S(\{(1,0,1),(0,1,2)\})\quad \text{και}\quad V_7(A)=S(\{(1,2,0)\}).$$

Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, άρα υπάρχει πίνακας S έτσι ώστε

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&7\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας S ορίζεται από τη βάση του $V_2(A)$ και του $V_7(A)$, έτσι

$$S=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{bmatrix}\quad \text{και επομένως}\quad S^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-2&1\\-2&1&2\\1&2&-1\end{bmatrix}.$$

6. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1 και 5 και οι ιδιοχώροι

$$V_1(A)=S(\{(1,-1)\})\quad \text{και}\quad V_5(A)=S(\{(3,1)\}).$$

Άρα

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1},$$

όπου

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$A^{100} = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

7. Οι ιδιοτιμές 0 και -1 των πινάκων A και B αντίστοιχα, δεν ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.6, επομένως οι πίνακες δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Για τον πίνακα Γ έχουμε:

$$\Gamma = S \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{όπου} \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα B, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι 2 και 1. Ακόμη

$$AS = SB \Leftrightarrow A[\, v_1 \; v_2 \,] = [\, v_1 \; v_2 \,]B \Leftrightarrow Av_1 = 2v_1 \;\text{ και }\; Av_2 = 3v_1 + v_2.$$

Από τη σχέση $Av_1 = 2v_1$ έπεται ότι το v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 2, άρα $V_2(A) = S(\{v_1\})$. Επειδή το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, υποθέτουμε ότι $\lambda v_1 + \mu v_2$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Τότε

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = 1(\lambda v_1 + \mu v_2) \Rightarrow 2\lambda v_1 + 3\mu v_1 + \mu v_2 = \lambda v_1 + \mu v_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda + 3\mu)v_1 = 0 \Rightarrow \lambda + 3\mu = 0.$$

Άρα $\lambda = -3\mu$ και $V_1(A) = S(\{-3v_1 + v_2\})$.

9. (α′) Ο πληθυσμός σταθεροποιείται σε 2.8 (δηλ. 3) γεράκια και 252 ποντικούς.

(β′) Μετά από 5 χρόνια, σύμφωνα με το μοντέλο, θα υπάρχουν 5,45781 γεράκια και 358,312 ποντικοί. Μετά την προσθήκη των 1000 ποντικών, σε 10 χρόνια θα υπάρχουν 18,6846 γεράκια και 1887,38 ποντικοί.

(γ′) Ο νέος πίνακας έχει ιδιοδιανύσματα τα $1,03028$ και $0,669722$, και $(1,03028)^k$ τείνει στο άπειρο, όταν το k τείνει στο άπειρο.

10. Αν A είναι ο πίνακας του συστήματος, τότε οι ιδιοχώροι του A είναι οι

$$V_2(A) = S(\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}), \quad V_3(A) = S(\{(-1,-1,1)\}).$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$f_1(x) = -e^{3x}, \;\; f_2(x) = -f_3(x) = e^{2x} - e^{3x}.$$

11. Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, το $P_A(x)$ έχει ρίζα το λ με αλγεβρική πολλαπλότητα n και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας D του $M_n(K)$, ώστε $A = P^{-1}D\,P$, όπου $D = \lambda I_n$. Τότε $A = \lambda P^{-1} I_n P = \lambda I_n$.

5.3 Θεώρημα των Cayley - Hamilton

2. $A^{-1} = A^2 + 2A - 7I_3, \;\; A^4 = 11A^2 - 2A - 24I_3.$

3. $A^{-1} = \dfrac{i}{5}\,A^2 + \dfrac{1-4i}{5}\,A - \dfrac{4+5i}{5}\,I_3.$

4. Παρατηρήστε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton ότι υπάρχει το πολυώνυμο $m_A(x)$, αφού υπάρχει το πολυώνυμο $P_A(x)$.

i) Προκύπτει αμέσως από τον ορισμό του $m_A(x)$ και το Θεώρημα των Cayley-Hamilton.

ii) Αν $h(x)$ είναι ένα άλλο κανονικό πολυώνυμο, για το οποίο $h(A) = \mathbf{O}$, και έχει τον ίδιο βαθμό με το $m_A(x)$, τότε $m_A(A) - h(A) = \mathbf{O}$ και το $m_A(x) - h(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του $m_A(x)$, που είναι αδύνατον από τον ορισμό του $m_A(x)$.

iii) Από τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ ώστε

$$g(x) = m_A(x)\pi(x) + \upsilon(x), \quad \deg(\upsilon(x)) < \deg(m_A(x)).$$

Αν $\upsilon(x) \neq 0$, τότε

$$g(A) = m_A(A)\pi(A) + \upsilon(A) = \mathbf{O} \Rightarrow \upsilon(A) = \mathbf{O},$$

που είναι αδύνατο από τον ορισμό του $m_A(x)$. Άρα $m_A(x)|g(x)$.

iv) Έστω ότι το $(x-\lambda)$ είναι παράγοντας του $P_A(x)$, τότε το $(x-\lambda)$ είναι παράγοντας του κανονικού πολυωνύμου $(-1)^n P_A(x)$ και βέβαια το λ είναι ιδιοτιμή του A. Υπάρχει πολυώνυμο $t(x)$ και $\upsilon \in K$, ώστε

$$m_A(x) = t(x)(x-\lambda) + \upsilon.$$

Αν $\upsilon \neq 0$, τότε

$$m_A(A) = t(A)(A - \lambda I_n) + \upsilon I_n \;\Rightarrow\; \left[-\frac{1}{\upsilon}\,t(A)\right](A - \lambda I_n) = I_n.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον, αφού $|A - \lambda I_n| = 0$.