Κεφάλαιο 5

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Η σημαντικότητα των γραμμικών συναρτήσεων K-διανυσματικών χώρων εμφανίστηκε στο θεώρημα ταξινόμησης των χώρων πεπερασμένης διάστασης και στην αντιστοιχία γραμμικών συναρτήσεων και πινάκων που αντιμετωπίστηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου ως προς ένα δοσμένο ενδομορφισμό του χώρου. Γνωρίζοντας αυτήν τη συμπεριφορά θα μπορούν, προβλήματα που αναφέρονται σε έναν διανυσματικό χώρο και έναν ενδομορφισμό του να αντιμετωπίζονται σε κατάλληλους υποχώρους του αρχικού χώρου. Όσο μικρότερος είναι ο χώρος τόσο ευκολότερη είναι η μελέτη του. Συνέπεια αυτής της μελέτης είναι η ύπαρξη συνθηκών ώστε ένας τετραγωνικός πίνακας να είναι διαγωνιοποιήσιμος δηλ. να υπάρχει ισοδύναμός του διαγώνιος πίνακας. Θα ασχολούμαστε μόνο με διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

5.1 Ιδιοτιμές - Ιδιοχώροι

Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V. Στη μελέτη μας θα παίξουν σημαντικό ρόλο οι υποχώροι U του V που παραμένουν **αναλλοίωτοι** (invariant) μέσω του ϕ, δηλ. $\phi(U) \subseteq U$. Μας ενδιαφέρει να αναλύσουμε τον V, όποτε είναι αυτό δυνατό, σε ευθύ άθροισμα αναλλοίωτων υποχώρων του, δηλ.

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

όπου $\phi(V_i) \subseteq V_i$, $1 \leq i \leq n$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $V_i = Kv_i$, για κάποιο στοιχείο $v_i \in V$. Αν λοιπόν ο υποχώρος Kv_i είναι αναλλοίωτος μέσω της ϕ, τότε $\phi(Kv_i) \subseteq Kv_i$. Επομένως $\phi(v_i) \in Kv_i$, άρα υπάρχει $\kappa \in K$ έτσι ώστε $\phi(v_i) = \kappa v_i$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης V. Ένα στοιχείο $\lambda \in K$ λέγεται **ιδιοτιμή** ή **χαρακτηριστική τιμή** (eigenvalue) του ϕ, αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $v \in V$ έτσι ώστε*

$$\phi(v) = \lambda v. \tag{5.1}$$

*Το στοιχείο v της σχέσης (5.1) λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** (eigenvector) του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*

Παραδείγματα 5.1.2.

α) Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (x, y) \mapsto (2x + y, 4x + 2y).$$

Παρατηρούμε ότι $\phi(1, -2) = (0, 0) = 0(1,\text{-}2)$, δηλ. το 0 είναι ιδιοτιμή και το $(1, -2)$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0, όπως και κάθε άλλο μη μηδενικό στοιχείο του $\operatorname{Ker}\phi$. Επίσης $\phi(1, 2) = (4, 8) = 4(1, 2)$, δηλ. το 4 είναι ιδιοτιμή του ϕ και το $(1, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4. Θέτουμε $V_1 = S(\{(1, -2)\})$ και $V_2 = S(\{(1, 2)\})$. Τα $(1, -2), (1, 2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα παράγουν τον $\mathbb{R}^2$, που έχει διάσταση 2. Άρα $V_1 + V_2 = S(\{(1, -2), (1, 2)\}) = \mathbb{R}^2$. Επίσης $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0)\}$, δηλ. το άθροισμα είναι ευθύ, επομένως

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}(1, -2) \oplus \mathbb{R}(1, 2).$$

β) Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (x, y) \mapsto (2x, 2y).$$

Αφού $\phi(x, y) = 2(x, y)$, έπεται ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2. Συγκεκριμένα και τα $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα και $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.

γ) Έστω $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, με $\phi(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2) = 3\alpha_0+3\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_2[x]$. Παρατηρούμε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}_2[x]$ της μορφής $\alpha_0+\alpha_1 x$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3, ενώ κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}_2[x]$ της μορφής $\alpha_2 x^2$, $\alpha_2 \neq 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

δ) Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V. Θα εξετάσουμε πότε το μηδέν είναι ιδιοτιμή του ϕ. Για να είναι το μηδέν ιδιοτιμή θα πρέπει να υπάρχει $0 \neq v \in V$ έτσι ώστε $\phi(v) = 0$, δηλ. $v \in \operatorname{Ker}\phi$. Και αντίστροφα, αν $v \in \operatorname{Ker}\phi$ και $v \neq 0$, τότε $\phi(v) = 0$. Άρα το v είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μηδέν. Καταλήγουμε έτσι στο ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν $\operatorname{Ker}\phi \neq \{0\}$, δηλ αν και μόνο αν η ϕ δεν είναι μονομορφισμός (βλ. Πρόταση 3.1.3, ii). Ας παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι αν ο $\phi : V \to V$ είναι μονομορφισμός, τότε αναγκαστικά είναι ισομορφισμός (βλ. Πόρισμα 3.1.9, iii). Έτσι το προηγούμενο συμπέρασμα γίνεται:

Το μηδέν είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν ο ϕ δεν είναι αυτομορφισμός. □

Ας επεξεργαστούμε περισσότερο τη σχέση (5.1). Αρχικά θυμίζουμε ότι για τον ταυτοτικό αυτομορφισμό $1_V : V \to V$ ισχύει $1_V(v) = v$, $v \in V$. Έτσι

$$\phi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \phi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow \phi(v) - \lambda 1_V(v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\phi - \lambda 1_V)(v) = 0.$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι το λ είναι ιδιοτιμή του ϕ και το $v \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν ο πυρήνας, $\operatorname{Ker}(\phi-\lambda 1_V)$, του ενδομορφισμού $\phi - \lambda 1_V$ του V περιέχει μη μηδενικά στοιχεία, δηλ. αν και μόνο αν ο $\phi - \lambda 1_V$ δεν είναι μονομορφισμός. Ακόμη είναι φανερό ότι αν ο ενδομορφισμός $\phi - \lambda 1_V$ του V δεν είναι μονομορφισμός, τότε κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda 1_V)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και αντίστροφα

Οδηγούμαστε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα.

Πρόταση 5.1.3. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V. Το $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν ο ενδομορφισμός $\phi - \lambda 1_V$ του V δεν είναι μονομορφισμός. Αν το $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του ϕ, τότε τα ιδιοδιανύσματα του ϕ, που αντιστοιχούν στο λ, είναι ακριβώς τα στοιχεία του* $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda 1_V)$.

Είναι δικαιολογημένος τώρα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 5.1.4. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V. Έστω*

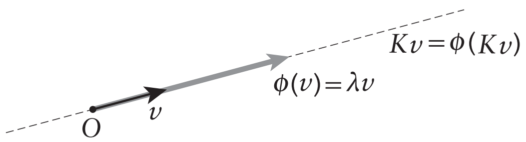
$$V_\lambda(\phi) = \{\, v \in V \;/\; \phi(v) = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(\phi - \lambda 1_V).$$

Αν $V_\lambda(\phi) \neq \{0\}$, δηλ. το λ είναι ιδιοτιμή του ϕ, τότε ο $V_\lambda(\phi)$ λέγεται ***ιδιοχώρος*** *(eigenspace) του ϕ για την ιδιοτιμή λ.*

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V. Οι ιδιοχώροι του ϕ είναι αναλλοίωτοι υποχώροι του V.*

Απόδειξη. Αν $V_\lambda(\phi)$ είναι ένας ιδιοχώρος του ϕ για την ιδιοτιμή λ, θα αποδείξουμε ότι $\phi(V_\lambda(\phi)) \subset V_\lambda(\phi)$. Πράγματι, έστω $v \in V_\lambda(\phi)$, τότε $\phi(v) = \lambda v$. Για το στοιχείο $w = \phi(v) \in \phi(V_\lambda(\phi))$, έχουμε

$$\phi(w) = \phi(\phi(v)) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = \lambda w \Rightarrow w \in V_\lambda(\phi). \qquad \blacksquare$$



Στο παραπάνω σχήμα το v είναι ιδιοδιάνυσμα του ενδομορφισμού ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και ο υποχώρος Kv που παράγει ταυτίζεται με την εικόνα του $\phi(Kv)$, αφού $\phi(Kv) \subseteq Kv$ και $\dim_K(\phi(Kv)) = \dim_K(Kv) = 1$.

Από την Πρόταση 5.1.3 και το Θεώρημα 3.1.7 συμπεραίνουμε το επόμενο.

Πόρισμα 5.1.6. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης n. Το μηδέν είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν ο ϕ δεν είναι αυτομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή ο ιδιοχώρος $V_0(\phi)$ έχει διάσταση*

$$\dim_K(V_0(\phi)) = n - \mathrm{r}(\phi).$$

Στα Κεφάλαια 3 και 4 είδαμε τεχνικές για να υπολογίσουμε τον πυρήνα μίας γραμμικής συνάρτησης. Επομένως για να υπολογίσουμε τους ιδιοχώρους του ενδομορφισμού $\phi : V \to V$ του K-διανυσματικού χώρου V, αρκεί να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του ϕ, όπως θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιούμε την ορίζουσα του πίνακα που αντιστοιχεί στον ενδομορφισμό $\phi - \lambda 1_V$.

Ας θεωρήσουμε μία διατεταγμένη βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του V και έστω $A = (\alpha_{ij})$ ο πίνακας του ϕ ως προς τη βάση B, δηλ. $A = A_\phi = A_B$. Τότε ο πίνακας του ενδομορφισμού $\phi - \lambda 1_V$ του V ως προς τη B είναι ο $A - \lambda I_n$ (βλ. Παράδειγμα 3.2.1, δ). Από την Πρόταση 5.1.3 και την Πρόταση 3.2.7 έπεται ότι το λ είναι ιδιοτιμή του ϕ αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Επομένως οι ιδιοτιμές του ϕ είναι ακριβώς οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Βέβαια αφού ο βαθμός του πολυωνύμου $\det(A - xI_n)$ είναι n, όση η διάσταση του V, έπεται ότι το πολυώνυμο $\det(A - xI_n)$ έχει το πολύ n ρίζες στο σώμα K. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν το πολύ n πλήθους ιδιοτιμές του ενδομορφισμού ϕ. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός των ριζών ενός πολυωνύμου δεν είναι γενικά καθόλου εύκολα επιλύσιμο πρόβλημα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που οι απλές ιδιότητες των πολυωνύμων μας οδηγούν εύκολα στον υπολογισμό των ριζών και τέτοιες περιπτώσεις αντιμετωπίζουμε στις ασκήσεις, αφού σκοπός μας είναι η εμπέδωση της θεωρίας που αναπτύσσουμε.

Ορισμός 5.1.7. *Το πολυώνυμο $|A - xI_n|$ λέγεται* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *(characteristic polynomial)* ***του ενδομορφισμού*** *$\phi : V \to V$, όπου A είναι ο πίνακας της ϕ ως προς μία διατεταγμένη βάση B του V και συμβολίζεται $P_\phi(x)$. Το $|A - xI_n|$ λέγεται επίσης* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα*** *A και συμβολίζεται $P_A(x)$.*

Αν έχουμε έναν πίνακα $A \in M_n(K)$, υπάρχει ένας ενδομορφισμός $\phi : K^n \to K^n$ έτσι ώστε $A = A_\phi = A_B$, όπου B είναι η συνήθης βάση του K^n (βλ. Θεώρημα 3.2.16). Έτσι μπορούμε να μιλάμε για **ιδιοτιμές**, **ιδιοδιανύσματα**, **ιδιοχώρους** και **χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα**, εννοώντας τις αντίστοιχες έννοιες του ϕ, όπου $A = A_\phi$. Σ' αυτήν την περίπτωση οι ιδιοτιμές ανήκουν στον K, οι ιδιοχώροι είναι υποχώροι του K^n και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ανήκει στον $K[x]$. Μάλιστα το στοιχείο $(x_1 \ \cdots \ x_n) \in K^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, αν

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $(x_1 \ \cdots \ x_n)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν είναι λύση του συστήματος

$$(A - \lambda I_n)X = \mathbf{O}.$$

Έτσι καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.8. *Αν $V_\lambda(A)$ είναι ο ιδιοχώρος του πίνακα $A \in M_n(K)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε*

$$V_\lambda(A) = \mathrm{null}(A - \lambda I_n)$$

και

$$\dim_K(V_\lambda(A)) = \dim_K(\mathrm{null}(A - \lambda I_n)) = n - \mathrm{r}(A - \lambda I_n).$$

Πριν δούμε κάποια παραδείγματα παραθέτουμε την επόμενη πρόταση, η οποία αποδεικνύει τη μοναδικότητα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός ενδομορφισμού K-διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 5.1.9. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V διάστασης n. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της βάσης του V, δηλ. όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Έστω $A_B \in M_n(K)$ ο πίνακας του ενδομορφισμού $\phi : V \to V$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του V. Αν $D = (w_1, \ldots, w_n)$

είναι μία άλλη διατεταγμένη βάση του V και A_D ο πίνακας του ϕ ως προς την D, τότε

$$A_D = S^{-1} A_B \, S,$$

όπου $S = S_{B \leftarrow D}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση D στη βάση B (βλ. Πρόταση 3.2.9). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_D είναι

$$|A_D - xI_n| = |S^{-1} A_B \, S - xI_n| = |S^{-1} A_B \, S - S^{-1} x I_n S| =$$

$$= |S^{-1}(A_B - xI_n)S| = |S^{-1}||A_B - xI_n||S| = |A_B - xI_n|$$

(βλ. Θεώρημα 1.3.12 και Πόρισμα 1.3.13). ■

Παραδείγματα 5.1.10.

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση

$$(e_1 = (1, 0), \ e_2 = (0, 1))$$

είναι

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 4 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x = x(x-4).$$

β) Έστω $A \in M_n(K)$ και έστω ότι $A = A_\phi$, για κατάλληλο ενδομορφισμό ϕ. Τότε ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή το μηδέν αν και μόνο αν ο ϕ δεν είναι αυτομορφισμός (βλ. Παράδειγμα 5.1.6), επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.7 αν και μόνο αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ το γράψουμε ως εξής:

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

τότε παρατηρούμε ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του A, δηλ. $P_A(0) = 0$, αν και μόνο αν $\alpha_0 = 0$. Επομένως:

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι διάφορος του μηδενός.

γ) Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

ένας διαγώνιος πίνακας του $M_n(K)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι το $(\alpha_1 - x)\cdots(\alpha_n - x)$. Άρα τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Ακόμη παρατηρούμε για το στοιχείο $e_i = [0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0]^T$ του K^n, όπου το i βρίσκεται στην i-γραμμή, ότι

$$Ae_i = \alpha_i e_i\ , \quad 1 \le i \le n,$$

δηλ. το e_i είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή α_i, $1 \le i \le n$.

δ) Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_\kappa \end{bmatrix},$$

όπου A_i είναι ένας $s_i \times s_i$-πίνακας και $s_1 + \cdots + s_\kappa = n = \dim_K(V)$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(x)$ του ϕ είναι

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} A_1 - xI_{s_1} & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_\kappa - xI_{s_\kappa} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{\kappa} |A_i - xI_{s_i}| = \prod_{i=1}^{\kappa} P_i(x),$$

όπου $P_i(x)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_i, $1 \le i \le \kappa$ (βλ. Παράδειγμα 1.3.23, στ).

ε) Έστω $A \in M_n(K)$. Από την Πρόταση 1.3.16 έπεται ότι

$$\det(A - xI_n) = \det(A - xI_n)^T = \det(A^T - xI_n).$$

Άρα οι πίνακες A και A^T έχουν ίσα χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

στ) Κάθε πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού n με συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμης του x ίσο με $(-1)^n$ είναι χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(K)$. Πράγματι, έστω $f(x) = (-1)^n g(x)$, όπου $g(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & & & \mathbf{O} \\ 0 & -x & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -g(x) & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-g(x)) = (-1)^n g(x) = f(x).$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει προσθέτοντας το x-πολλαπλάσιο της n-στήλης στην $(n-1)$-στήλη, το x-πολλαπλάσιο της $(n-1)$-στήλης στην $(n-2)$-στήλη κ.ο.κ. το x-πολλαπλάσιο της 2-στήλης στην 1-στήλη. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον υπολογισμό της ορίζουσας με ανάπτυξη των στοιχείων της τελευταίας γραμμής.

ζ) Το $P(x) = x^2 + 5$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -5 & -x \end{vmatrix} =^{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + x\Sigma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5-x^2 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 5.$$

Μάλιστα σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.9, κάθε πίνακας της μορφής $S^{-1}A\,S$, όπου S είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P(x)$. □

Παραθέτουμε παρακάτω τον αλγόριθμο υπολογισμού των ιδιοδιανυσμάτων για την ιδιοτιμή λ του ενδομορφισμού $\phi : V \to V$, δηλ. του $V_\lambda(\phi)$.

Αλγόριθμος υπολογισμού ιδιοχώρων.

Αλγόριθμος 5.1.11. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του K-διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης n.*

- **Βήμα 1** *Υπολογίζουμε τον πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ του ενδομορφισμού ως προς μία διατεταγμένη βάση $B = (v_1, \ldots, v_n)$ του V.*

- **Βήμα 2** *Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ*

$$|A - xI_n|.$$

- **Βήμα 3** *Υπολογίζουμε τις ρίζες του $|A - xI_n|$ που ανήκουν στο σώμα K, αυτές είναι οι ιδιοτιμές του ϕ.*

- **Βήμα 4** *Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του ϕ, επιλύουμε το ομογενές σύστημα*

$$(A - \lambda I_n)X = \boldsymbol{O}.$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος αυτού προσδιορίζει τον ιδιοχώρο $V_\lambda(\phi)$:

$$V_\lambda(\phi) = \{\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n / \ \Xi = [\xi_1 \cdots \xi_n]^T \text{ λύση του } (A - \lambda I_n)X = \boldsymbol{O}\}.$$

Παραδείγματα 5.1.12.

α) Θα προσδιορίσουμε τους ιδιοχώρους του ενδομορφισμού

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y).$$

Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ είναι το

$$\begin{vmatrix} 2 - x & 1 \\ 1 & 2 - x \end{vmatrix} = (2 - x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του ϕ είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$. Για να βρούμε τον $V_1(\phi)$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - 1I_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Φέρνουμε τον πίνακα $A - 1I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος, άρα και ο ιδιοχώρος του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0, είναι ο χώρος

$$V_1(\phi) = \{ \ (-x_2, x_2) \ / \ x_2 \in K\} = S(\{(-1,1)\}) = S(\{v\}),$$

όπου θέσαμε $v = (-1, 1)$.

Για το χώρο $V_3(\phi)$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - 3I_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

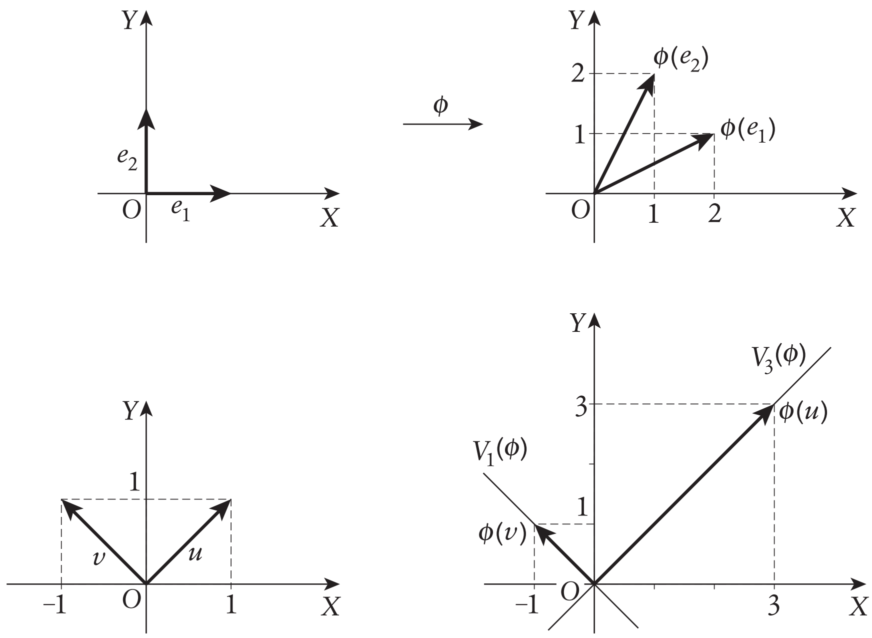
Φέρνουμε τον πίνακα $A - 3I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

άρα

$$V_3(\phi) = \{ \ (x_2, x_2) \ / \ x_2 \in K\} = S(\{(1,1)\}) = S(\{u\}),$$

όπου θέσαμε $u = (1, 1)$.



Παρατηρήστε ότι οι ιδιοχώροι $V_1(\phi)$ και $V_3(\phi)$ παραμένουν αναλλοίωτοι μέσω της ϕ, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

β) Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(K).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x + x^2 - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Έτσι αν $K = \mathbb{Q}$, τότε ο A δεν έχει ιδιοτιμή. Αν $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, τότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Για να βρούμε τον ιδιοχώρο V_{λ_1} λύνουμε το σύστημα $(A - \lambda_1 I_2)X = \mathbf{O}$, δηλ. φέρνουμε τον πίνακα $A - \lambda_1 I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$V_{\lambda_1}(A) = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2, x_2)/x_2 \in K\} = S(\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)\}) = S(\{(1+\sqrt{5}, 2)\}).$$

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$V_{\lambda_2}(A) = S(\{(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)\}) = S(\{(1-\sqrt{5}, 2)\}).$$

γ) Ο πίνακας του ενδομορφισμού

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ , \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ ως προς τη συνήθη βάση του R^2 είναι ο

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ϕ είναι το

$$P(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1,$$

το οποίο δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από αυτό το παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι κάθε ενδομορφισμός K-διανυσματικού χώρου V δεν έχει απαραίτητα ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

δ) Βλέπουμε όμως ότι ο ενδομορφισμός

$$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\ , \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$ με αντίστοιχους ιδιοχώρους

$$V_i(\psi) = \{\ (ix_2, x_2)\ /\ x_2 \in \mathbb{C}\} = S(\{(i, 1)\}),\ \ V_{-i}(\psi) = S(\{(-i, 1)\}).$$

ε) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ , \quad (x, y, z) \mapsto 4(x, y, z)$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ,$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $P(x) = (4-x)^3$. Έτσι η μόνη ιδιοτιμή είναι το 4 και, αφού $A - 4I_3 = \mathbf{O}$ και $(A-4I_3)X = \mathbf{O}$ ισχύει για κάθε $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο $\mathbb{R}^3$.

στ) Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του ενδομορφισμού

$$\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \ , \quad a+bx+cx^2 \mapsto 3a+2b+2c+(a+4b+2c)x-(a+2b)x^2$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_2[x]$. Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση $(1, x, x^2)$ του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} ,$$

το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 2 \\ -1 & -2 & -x \end{vmatrix} = 12 - 16x + 7x^2 - x^3 = (2-x)^2(3-x),$$

και οι ιδιοτιμές του είναι το 2 και το 3. Φέρνουμε τον πίνακα $A - 2I_3$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος $(A - 2I_3)X = \mathbf{O}$ είναι το

$$\{ \ (-2x_2 - 2x_3, x_2, x_3) \ / \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{ \ t(-2, 1, 0) + s(-2, 0, 1) \ / \ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 και περιέχει τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι ο

$$V_2(\phi) = \{ \ t(-2+1x+0x^2)+s(-2+0x+1x^2) \ / \ t, s \in \mathbb{R}\} = S(\{-2+x, -2+x^2\})$$

και έχει διάσταση ίση με 2. Όμοια φέρνουμε τον πίνακα $A-3I_3$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A-3I_3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 είναι ο

$$V_3(\phi)=S(\{-1-x+x^2\}).$$

ζ) Έστω ο ενδομορφισμός

$$\psi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2a & -2b+c \\ -5b+2c & 2d \end{bmatrix}$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$. Ο πίνακας του ψ ως προς τη συνήθη βάση

$$\left(E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι ο

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το

$$\left|\begin{array}{c|cc|c} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2-x & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2-x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2-x \end{array}\right| =$$

$$=(2-x)\begin{vmatrix} -2-x & 1 \\ -5 & 2-x \end{vmatrix}(2-x)=(2-x)^2(x^2+1).$$

Παρατηρούμε ότι η μοναδική ιδιοτιμή του ψ είναι το 2. Φέρνουμε τον πίνακα $A-2I_4$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $(A - 2I_4)X = \mathbf{O}$ είναι το

$$\{\ (x_1, 0, 0, x_4)\ /\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

και ο ιδιοχώρος του ψ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι ο

$$V_2(\psi) = \{x_1 E_{11} + x_4 E_{22}\ /\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} = S(\{E_{11}, E_{22}\}),$$

δηλ. είναι το σύνολο των διαγωνίων πινάκων του $M_2(\mathbb{R})$. □

Θα εξετάσουμε τώρα μερικές βασικές ιδιότητες των χαρακτηριστικών πολυωνύμων.

Πρόταση 5.1.13. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V. Αν A είναι ο πίνακας της ϕ, τότε*

$$P_\phi(x) = |A - xI_n| = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$ *και* $\alpha_0 = \det A = |A|$.

Απόδειξη. Έστω $P_\phi(x) = |A - xI_n|$, τότε

$$P_\phi(0) = \alpha_0 = |A - 0I_n| = |A|.$$

Από τον υπολογισμό της ορίζουσας $|A - xI_n|$ προκύπτει ότι υπάρχουν ακριβώς n πλήθους όροι που περιέχουν το x^{n-1}, είναι οι

$$\alpha_{11}(-x)^{n-1}, \ldots, \alpha_{nn}(-x)^{n-1}.$$

Άρα

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A). \qquad \blacksquare$$

Από την Πρόταση 5.1.9 και την Πρόταση 5.1.13 προκύπτει εύκολα το επόμενο συμπέρασμα, το οποίο αποδείξαμε και στο Κεφάλαιο 1 (βλ. Πρόταση 1.1.17, viii).

Πρόταση 5.1.14. *Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.*

Οι επόμενες προτάσεις μας δίνουν μερικές ακόμα ιδιότητες των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοχώρων.

Πρόταση 5.1.15. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V. Αν $w_1, w_2, \ldots, w_\kappa$ είναι ιδιοδιανύσματα του V που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$, τότε τα $w_1, w_2, \ldots, w_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά ως προς κ. Είναι φανερό ότι η πρόταση ισχύει για $\kappa = 1$, αφού το ιδιοδιάνυσμα w_1 είναι διάφορο του μηδενός. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\kappa - 1$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει για κ. Έστω

$$\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\kappa w_\kappa = 0 \tag{5.2}$$

μία γραμμική σχέση των $w_1, \ldots, w_\kappa$, όπου $\mu_1, \ldots, \mu_\kappa \in K$, τότε

$$\phi(\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\kappa w_\kappa) = 0 \Rightarrow \mu_1 \phi(w_1) + \cdots + \mu_\kappa \phi(w_\kappa) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 \lambda_1 w_1 + \cdots + \mu_\kappa \lambda_\kappa w_\kappa = 0. \tag{5.3}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (5.2) επί λ_κ και την αφαιρούμε από τη σχέση (5.3), έτσι

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_\kappa) w_1 + \cdots + \mu_{\kappa-1}(\lambda_{\kappa-1} - \lambda_\kappa) w_{\kappa-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1(\lambda_1 - \lambda_\kappa) = 0, \ldots, \mu_{\kappa-1}(\lambda_{\kappa-1} - \lambda_\kappa) = 0, \tag{5.4}$$

αφού, απο την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής, τα $w_1, w_2, \ldots, w_{\kappa-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όμως τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ είναι διακεκριμένα από την υπόθεση της πρότασης, άρα $\lambda_i - \lambda_\kappa \neq 0$, $i = 1, \ldots, \kappa - 1$, και από τη σχέση (5.4) έπεται ότι $\mu_1 = \cdots = \mu_{\kappa-1} = 0$. Τότε, από τη σχέση (5.2), προκύπτει ότι $\mu_\kappa = 0$. Άρα τα $w_1, w_2, \ldots, w_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. ∎

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται το επόμενο συμπέρασμα, το οποίο αποτελεί το πρώτο βήμα στην ανάλυση ενός K-διανυσματικού χώρου V σε ευθύ άθροισμα αναλλοίωτων υποχώρων του.

Πρόταση 5.1.16. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του ϕ και $V_{\lambda_1}(\phi), \ldots, V_{\lambda_\kappa}(\phi)$ οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι. Τότε*

$$V_{\lambda_1}(\phi) + \cdots + V_{\lambda_r}(\phi) = V_{\lambda_1}(\phi) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}(\phi),$$

δηλ. το άθροισμα $V_{\lambda_1}(\phi) + \cdots + V_{\lambda_r}(\phi)$ είναι ευθύ.

Απόδειξη. Έστω $v_i \in V_{\lambda_i}(\phi)$, $i = 1, \ldots, \kappa$. Από την Πρόταση 5.1.15 έπεται ότι τα $v_1, \ldots, v_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε αν $v_1 + \cdots + v_r = 0$, τότε $v_1 = \cdots = v_r = 0$. Τώρα από το Πόρισμα 2.4.3 έπεται ότι το άθροισμα $V_{\lambda_1}(\phi) + \cdots + V_{\lambda_r}(\phi)$ είναι ευθύ. ■

Παράδειγμα 5.1.17.

Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 + x_3, x_2).$$

Ο πίνακας A_f που αντιστοιχεί στην f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f (ή του A_f) είναι το

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x(x^2 - 2)$$

και οι ιδιοτιμές της f είναι οι $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Υπολογίζουμε τους ιδιοχώρους $V_0(f)$, $V_{\sqrt{2}}(f)$, $V_{-\sqrt{2}}(f)$:

$$V_0(f) = S(\{(-1, 0, 1)\}), \quad V_{\sqrt{2}}(f) = S(\{(1, \sqrt{2}, 1)\}),$$

$$V_{-\sqrt{2}}(f) = S(\{(1, -\sqrt{2}, 1)\}).$$

Επειδή τα $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, \sqrt{2}, 1)$ και $v_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, έπεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και συνεπώς αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ αφού $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$. Επομένως

$$\mathbb{R}^3 = V_0(f) \oplus V_{\sqrt{2}}(f) \oplus V_{-\sqrt{2}}(f).$$

Θα δούμε ότι ο πίνακας της f ως προς τη βάση (v_1, v_2, v_3) είναι διαγώνιος. Από τον ορισμό των ιδιοτιμών προκύπτει ότι

$$f(v_1) = 0v_1 , \quad f(v_2) = \sqrt{2}v_2 \ \text{ και } \ f(v_3) = -\sqrt{2}v_3 .$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ στη συνήθη βάση είναι ο

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Άρα $A' = S^{-1} A_f S$. □

Πρόταση 5.1.18. *Έστω $\phi : V \to V$ ένας αυτομορφισμός του n-διάστατου K-διανυσματικού χώρου V και $\lambda_1, \ldots, \lambda_\kappa$ οι ιδιοτιμές του ϕ. Τότε οι $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_\kappa^{-1}$ είναι οι ιδιοτιμές του ϕ^{-1}.*

Απόδειξη. Έστω B μία διατεταγμένη βάση του V και A ο πίνακας του αυτομορφισμού ϕ ως προς τη B. Τότε ο A^{-1} είναι ο πίνακας της ϕ^{-1} ως προς τη B (βλ. Θεώρημα 3.2.16, ii). Όμως

$$|A - \lambda_i I_n| = 0 \Rightarrow \lambda_i^{-1} |A^{-1}| |A - \lambda_i I_n| = 0 \Rightarrow |\lambda_i^{-1} A^{-1} (A - \lambda_i I_n)| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda_i^{-1} I_n - A^{-1}| = 0 \Rightarrow |A^{-1} - \lambda_i^{-1} I_n| = 0, \quad 1 \leq i \leq \kappa,$$

δηλ. οι $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_\kappa^{-1}$ είναι οι ιδιοτιμές του ϕ^{-1}. Παρατηρούμε, βέβαια, ότι το μηδέν δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του ϕ, αφού ο ϕ είναι αυτομορφισμός, επομένως $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ (βλ. Πόρισμα 5.1.6).

Αναφέρουμε ένα δεύτερο τρόπο απόδειξης. Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$. Τότε $\phi(v) = \lambda v$ και

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\lambda^{-1} \lambda v) = \lambda^{-1} \phi^{-1}(\phi(v)) = \lambda^{-1} v,$$

δηλ. το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του αυτομορφισμού ϕ^{-1} με ιδιοδιάνυσμα το v. ■

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι αν ο λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A του $M_n(K)$, τότε ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}. Επίσης από τον δεύτερο τρόπο απόδειξης της παραπάνω πρότασης συμπεραίνουμε ότι οι αυτομορφισμοί ϕ και ϕ^{-1} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα 5.1.19.

Δίνεται ο αυτομορφισμός $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(x, y) = (y, -2x + 3y)$. Οι ιδιοτιμές του ϕ είναι το 2 και το 3, ενώ ο $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{2}(3x - y, 2x)$, έχει ιδιοτιμές $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$. □

Ασκήσεις εδαφίου 5.1

1. **(*)** Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω γραμμικών συνάρτησεων

   i) $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 4y, 2x + 3y)$.

   ii) $\psi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad a + bx + cx^2 \mapsto b + cx + ax^2$.

   iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

   iv) $g : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b & 2a + b \\ d & 5c + 4d \end{bmatrix}$.

2. **(*)** Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων:

   i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ του $M_2(\mathbb{R})$.

   ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   του $M_3(\mathbb{R})$.

   iii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ του $M_2(\mathbb{C})$.

3. **(*)** Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος και $\phi : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V με την ιδιότητα $\phi^2 = \phi$. Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές ιδιοτιμές του ϕ είναι το 0 ή το 1.

4. **(*)** Έστω f, ϕ ενδομορφισμοί του K-διανυσματικού χώρου V. Αν η f είναι ισομορφισμός, τότε οι ενδομορφισμοί ϕ και $f\phi f^{-1}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

5. **(*)** Έστω $A, B \in M_n(K)$ και ο A είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

6. Δίνονται οι όμοιοι πίνακες A, D του $M_n(K)$, όπου $D = P^{-1}A\ P$, για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι αν το $v = [\ x_1 \ \cdots \ x_n\ ]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε το $P^{-1}v$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα D που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

7. **(*)** Δίνεται ένας πίνακας $A \in M_n(K)$. Σχηματίζουμε τον πίνακα $A + kI_n$, για κάποιο $k \in K$. Να αποδείξετε ότι αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε το $\lambda + k$ είναι μία ιδιοτιμή του $A + kI_n$. Ακόμη, αν το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε το v είναι ιδιοδιάνυσμα του $A + kI_n$.

8. **(*)** Έστω $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε το λ^μ είναι μία ιδιοτιμή του A^μ, $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Ακόμη αν το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο λ, τότε το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A^μ που αντιστοιχεί στο λ^μ.

9. Έστω $A \in M_n(K)$ και λ είναι μία ιδιοτιμή του A. Να αποδείξετε ότι το $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $3A^2 - A + 2I_n$.

10. **(*)** Έστω ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός ενδομορφισμού ϕ του K-διανυσματικού χώρου V είναι ίσες με μηδέν. Είναι ο ενδομορφισμός ϕ ο μηδενικός ενδομορφισμός; Να δικαιολογίσετε την απάντηση σας.

11. **(*)** Έστω $A \in M_n(K)$ με την ιδιότητα $A^2 = -I_n$. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα A και να αποδείξετε ότι ο n δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός.

12. **(*)** Έστω $A \in M_2(K)$ τέτοιος ώστε $A^3 = \mathbf{O}$. Να αποδείξετε ότι $A^2 = \mathbf{O}$.

13. **(*)** Να αποδείξετε ότι κάθε πίνακας του $M_n(K)$ γράφεται ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων.

14. **(*)** Να βρείτε έναν ενδομορφισμό $\phi : K^2 \to K^2$ τέτοιον ώστε να έχει ιδιοτιμές το 1 και το 4 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $v = (3, 1)$ και $u = (2, 1)$.

15. **(*)** Να βρείτε πίνακες A, B , C, ώστε $P_A(x) = -x^3 + 2x - 1$, $P_B(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $P_C(x) = -x^5 - x^4$.

16. **(*)** Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Αν $\det A = 8$ και μία ιδιοτιμή του A είναι το 2 να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές.

17. **(*)** Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

Εξάσκηση με Mathematica εδαφίου 5.1

Σ' αυτήν την ενότητα ορίζουμε τον πίνακα a και υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x)$ του a με την εντολή CharacteristicPolynomial$[a, x]$. Βρίσκουμε τους παράγοντες του $p(x)$ στο $\mathbb{Q}[x]$ με την εντολή Factor$[p[x]]$ και τις ρίζες του $p(x)$ με την εντολή Roots$[p[x] == 0, x]$. Επιβεβαιώνουμε ότι οι ρίζες του $p(x)$ είναι ιδιοτιμές του a με την εντολή Eigenvalues$[a]$. Βρίσκουμε τον πίνακα $evec$, που οι γραμμές του είναι τα ιδιοδιανύσματα του a, με την εντολή Eigenvectors$[a]$. Θέτουμε $p = (evec)^T$ και επιβεβαιώνουμε ότι $p^{-1}a\ p$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με τιμές στη κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του a. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για έναν πίνακα με μιγαδικές ιδιοτιμές.

In[*]:= **<< LinearAlgebra\`MatrixManipulation\`**

In[*]:= ***a* = {{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {3, 6, 5}};**
MatrixForm[*a*]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

In[*]:= **MatrixRank[*a*]**

Out[*]:= 2

In[*]:= ***p*[*x*] = CharacteristicPolynomial[*a*, *x*]**

20. i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$. ii) $g(x) = x^3 - x^2 + 2$.

21. i) Έστω $X_1, \ldots, X_n$ οι στήλες του ζητούμενου πίνακα B και $I_{(1)}, \ldots, I_{(n)}$ οι στήλες του I_n. Τότε

$$AB = I_n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} AX_1 & \cdots & AX_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} I_{(1)} & \cdots & I_{(n)} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AX_i = I_{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Όμως $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|I_{(i)}]) = n$, $i = 1, \ldots, n$, και τα συστήματα έχουν πάντα μοναδική λύση, άρα υπάρχει μοναδικός πίνακας B με την ιδιότητα $AB = I_n$. Για το ii) παρατηρήστε ότι

$$CA = I_m \Leftrightarrow (CA)^T = (I_m)^T \Leftrightarrow A^T C^T = I_m,$$

οπότε η ύπαρξη και μοναδικότητα του πίνακα C προκύπτει από το i).

22. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\mathrm{r}(A) = n$. Τότε $m \geq n$ και ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές ενώ οι υπόλοιπες $m-n$ γραμμές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών. Θεώρουμε το ισοδύναμο σύστημα $A'X = B'$, $A' \in M_n(\mathbb{Q})$, $B' \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$, το οποίο περιέχει μόνο τις εξισώσεις του $AX = B$ που αντιστοιχούν στις n γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Τότε $\det A' \neq 0$ και το $A'X = B'$ έχει μοναδική λύση, την $(x_1, \ldots, x_n)$, όπου $x_i = \dfrac{\det A'(i, B')}{\det A'} \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq n$, το οποίο είναι αδύνατο.

Κεφάλαιο 5. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

5.1. Ιδιοτιμές - Ιδιοχώροι

1. i) $V_{-1}(\phi) = S(\{(-2, 1)\})$, $\quad V_5(\phi) = S(\{(1, 1)\})$.

ii) $P_\psi(x) = 1 - x^3$, $\quad V_1(f) = S(\{1 + x + x^2)\})$.

iii) $P_f(x) = -(x-3)(x-2)^2$, $\quad V_3 = S(\{(-1/2, 1/2), 1\}) = S(\{(1, 1, -2)\})$, $V_2(f) = S(\{(1, 0, 0)\})$. Παρατηρήστε ότι ενώ η ιδιοτιμή 2 είναι διπλή, $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1$.

iv)
$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P_g(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 5 & 4-x \end{vmatrix} = (x-2)(x-5)(x+1)^2,$$

$$V_2(g) = S\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right), \quad V_5(g) = S\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$V_{-1}(g) = S\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

2. i) $V_{-1}(A) = S(\{(-1,1)\}), \quad V_4(A) = S(\{(2,3)\})$.
$P_B(x) = x^2 - 6x + 13$, και ο B δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.
ii) $V_1(A) = S(\{(0,1,0),(0,0,1)\}), \quad V_4(A) = S(\{(-3,2,2)\})$.
$V_1(B) = S(\{(1,0,0)\})$. $P_C(x) = -x(x^2+5), \quad V_0(C) = S(\{(-1,1,0)\})$.
iii) $V_{-1}(A) = S(\{(2,1)\}), \quad V_2(A) = S(\{(1,2)\})$.
$V_0(B) = S(\{(-i,1)\}), \quad V_2(B) = S(\{(i,1)\})$.

3. Έστω λ μία ιδιοτιμή ϕ και $0 \neq v \in V$ τέτοιο ώστε $\phi(v) = \lambda v$. Από τη σχέση $\phi^2 = \phi \Rightarrow \phi^2(v) = \phi(v) \Rightarrow \phi(\lambda v) = \lambda v \Rightarrow \lambda\phi(v) = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow \lambda(\lambda-1)v = 0 \Rightarrow$ ή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Αυτές είναι οι μόνες ιδιοτιμές του ϕ. Πράγματι, αν $\operatorname{Im}\phi(V) \neq 0$ και $u \in \phi(V)$, $u \neq 0$, τότε $u = \phi(v)$ για κάποιο $v \in V$. Άρα $\phi(u) = \phi^2(v) = \phi(v) = u$, δηλαδή το u είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Αν $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, τότε το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του ϕ (βλ. Πόρισμα 5.1.6). Αν $\operatorname{Ker}\phi \neq \{0\}$, τότε το μηδέν είναι ιδιοτιμή του ϕ.

4. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.1.9.

5. Οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι.

7. Αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow |A + kI_n - (k+\lambda)I_n| = 0 \Leftrightarrow$$

το $k + \lambda$ είναι μία ιδιοτιμή του $A + kI_n$. Ακόμη αν

$$Av = \lambda \Leftrightarrow (A + kI_n)v = (\lambda + k)v.$$

8. Αν $Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v$. Επαγωγικά $A^\mu v = \lambda^\mu v$, $\mu \geq 1$.

10. Οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) = (y,0)$ είναι ίσες με μηδέν.

11. $|A^2 - xI_n| = |-I_n - xI_n| = |-(x+1)I_n| = (-1)^n(x+1)^n$. Άρα η ιδιοτιμή του A^2 είναι το -1 με πολλαπλότητα ίση με n. Όμως, αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε το λ^2 είναι ιδιοτιμή του A^2 (βλ. Άσκηση 6). Επομένως,

$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$. Επειδή ο πίνακας A έχει μη πραγματικές ιδιοτιμές, έπεται ότι ο βαθμός του $P_A(x)$ είναι άρτιος, δηλαδή ο n είναι άρτιος.

12. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(K).$$

Από τη σχέση $A^3 = \mathbf{O}$, έπεται ότι $P_{A^3}(x) = |\mathbf{O} - xI_2| = x^2$. Άρα η μόνη ιδιοτιμή του A^3 είναι το μηδέν. Έτσι αν το λ είναι μία ιδιοτιμή του A τότε $\lambda^3 = 0$, οπότε $\lambda = 0$. Συνεπώς $P_A(x) = x^2$, δηλ.

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \gamma & \delta - x \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow x^2 - (\alpha+\delta)x + \alpha\delta - \beta\gamma = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \delta &=& 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \delta = -\alpha \\ \alpha\delta = \beta\gamma = -\alpha^2. \end{array} \right.$$

Άρα

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \beta\alpha \\ \alpha\gamma - \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha^2 \end{bmatrix} = \mathbf{O} .$$

13. Έστω $k \in K$ τέτοιο ώστε να μην είναι ιδιοτιμή του A, για $A \in M_n(K)$. Τότε $A = A - kI_n + kI_n = (A - kI_n) + kI_n$. Παρατηρήστε ότι $|A - kI_n| \neq 0$.

14. Εφόσον $\phi(v) = 1v$ και $\phi(u) = 4u$, ο πίνακας της ϕ ως προς τη βάση $D = (v, u)$ είναι ο

$$A_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Έτσι αν

$$S_{B \leftarrow D} = S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

τότε $A_B = SA_DS^{-1}$, όπου B η συνήθης βάση του K^2, και

$$\phi(x, y) = (-5x + 18y, -3x + 10y).$$

15. Παράδειγμα 5.1.10, στ).

16. Βλ. Πρόταση 5.1.13. Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι το $2i$ και το $-2i$.

17. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{r}(A) = 1$. Επομένως το 0 είναι ιδιοτιμή του A, ενώ ο ιδιοχώρος $V_0(A)$ έχει διάσταση $n - 1$. Μάλιστα

$$V_0(A) = \{ \, (x_1, \ldots, x_n) \, / \, x_1 + \cdots + x_n = 0\} =$$

$$= S(\{(-1, 1, 0, \cdots, 0), (-1, 0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (-1, 0, \cdots, 0, 1)\}).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix},$$

επομένως το $(1,\ldots,1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή n. Επειδή $V_0(A)\oplus V_n(A)\subseteq K^n \Rightarrow \dim_k(V_0(A))+\dim_K(V_n(A))\leq n$ συμπεραίνουμε ότι $\dim_K(V_n(A))=1$, άρα $V_n(A)=S(\{(1,\ldots,1)\})$.

5.2 Διαγωνιοποίηση

1. Η διάσταση του ιδιοχώρου είναι 1 και η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι 2.

2. Για $a\neq b$, ο πίνακας διαγωνιοποιείται γιατί έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αν $a=b$, τότε η ιδιοτιμή a έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, ενώ η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 1.

3. Το 2 είναι ιδιοτιμή του ϕ με πολλαπλότητα 2, ενώ $V_2(\phi)=S(\{(1,0,0)\})$, δηλ. η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 1.

4. $A^4=I$, $A^5=A$.

5. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$P_A(x)=(2-x)(x-2)(x-7).$$

Οι ιδιοχώροι που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 2 και 7 είναι οι

$$V_2(A)=S(\{(1,0,1),(0,1,2)\})\quad \text{και}\quad V_7(A)=S(\{(1,2,0)\}).$$

Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, άρα υπάρχει πίνακας S έτσι ώστε

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&7\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας S ορίζεται από τη βάση του $V_2(A)$ και του $V_7(A)$, έτσι

$$S=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{bmatrix}\quad \text{και επομένως}\quad S^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-2&1\\-2&1&2\\1&2&-1\end{bmatrix}.$$

6. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1 και 5 και οι ιδιοχώροι

$$V_1(A)=S(\{(1,-1)\})\quad \text{και}\quad V_5(A)=S(\{(3,1)\}).$$

Άρα