Κεφάλαιο 4

Γραμμικά συστήματα

4.1 Γραμμικά συστήματα

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n = \beta_1 \\ &\ \vdots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου α_{ij}, β_i, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, είναι δοθέντα στοιχεία του σώματος K και $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι άγνωστοι, λέγεται **γραμμικό σύστημα** (linear system) m εξισώσεων με n αγνώστους με συντελεστές από το σώμα K.

Λύση (solution) του συστήματος (4.1) είναι μία διατεταγμένη n-άδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ στοιχείων του K που ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.1), δηλ.

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i\ , \quad 1 \le i \le m.$$

Λέμε ότι το σύστημα (4.1) είναι **συμβατό** ή **συμβιβαστό** (consistent) αν έχει λύση. Αν το σύστημα δεν έχει λύση λέγεται **ασύμβατο** ή **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο** (inconsistent ή impossible).

Στα προηγούμενα κεφάλαια αντιμετωπίσαμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος όταν εξετάσαμε γραμμική ανεξαρτησία στοιχείων ενός K-διανυσματικού χώρου, στον υπολογισμό των συντεταγμένων ενός στοιχείου διανυσματικού χώρου ως προς μία συγκεκριμένη βάση, στην εύρεση του πυρήνα και της εικόνας μίας γραμμικής συνάρτησης. Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε την θεωρία πινάκων και διανυσματικών χώρων, που αναπτύχθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, προκειμένου να αποδείξουμε συνθήκες για την επιλυσιμότητα γραμμικών συστημάτων και την εύρεση της λύσης, όταν αυτή υπάρχει.

Το σύστημα (4.1) μπορεί να γραφεί στη γλώσσα των πινάκων ως

$$AX = B, \tag{4.2}$$

όπου

$$A = (\alpha_{ij}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τα στοιχεία των K-διανυσματικών χώρων K^n και K^m ως στήλες (βλ. Παραδείγματα 2.1.8, στ) και τη γραμμική συνάρτηση

$$f : K^n \to K^m \,, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

(βλ. Παραδείγματα 2.1.8, ζ). Ο πίνακας A_f της f ως προς τις διατεταγμένες συνήθεις βάσεις $(e_1, \ldots, e_n)$ και $(e'_1, \ldots, e'_m)$ των K^n και K^m αντίστοιχα είναι ο A. Παρατηρούμε έτσι ότι, αν

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$, τότε $f(\Xi) = B$. Επομένως το σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν το B ανήκει στην εικόνα $\mathrm{Im}f$ της f. Ο K-διανυσματικός χώρος $\mathrm{Im}f$ παράγεται από τα στοιχεία $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, δηλ. $\mathrm{Im}f = S(\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\})$. Άρα το σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $B \in S(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Ισοδύναμα

$$S(f(e_1), \ldots, f(e_n), B) = S(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \dim_K[S(f(e_1), \ldots, f(e_n), B] = \dim_K[S(f(e_1), \ldots, f(e_n))],$$

(βλ. Πρόταση 2.3.37). Όμως η $\dim_K[S(f(e_1),\ldots,f(e_n))]$ ισούται με τη διάσταση του χώρου που παράγουν οι στήλες του πίνακα A, δηλ. ισούται με τη βαθμίδα του A (βλ. Θεώρημα 2.3.29), ενώ η $\dim_K[S(f(e_1),\ldots,f(e_n),B)]$ είναι η βαθμίδα του πίνακα

$$[A|B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix} .$$

Έτσι, λοιπόν, το σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B])$.

Ας παρατηρήσουμε ότι αν $\mathrm{r}(A) = m$, τότε από τη φανερή σχέση $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}([A|B]) \leq m$ έπεται ότι $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B])$. Επομένως αν $\mathrm{r}(A) = m$, δηλ. όταν η βαθμίδα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος είναι ίση με τον αριθμό των εξισώσεων του, τότε το σύστημα έχει λύση.

Ορισμός 4.1.1. *Για το σύστημα* (4.1) *ή* (4.2) *ο πίνακας A λέγεται **πίνακας συντελεστών** (coefficient matrix), ο πίνακας B λέγεται **πίνακας των σταθερών όρων** (fixed terms) και ο πίνακας $[A|B]$ λέγεται **επεκτεταμένος** ή **επαυξημένος** (extended) πίνακας.*

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.1.2. *Το γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $AX = B$ με συντελεστές από το σώμα K έχει λύση αν και μόνο αν οι πίνακες A και $[A|B]$ έχουν την ίδια βαθμίδα. Ιδιαίτερα, αν $\mathrm{r}(A) = m$, τότε το σύστημα έχει πάντα λύση.*

Αν $B = \mathbf{O}$, δηλ. $\beta_i = 0$, $1 \leq i \leq m$, τότε το σύστημα (4.1) ή (4.2) λέγεται **ομογενές** (homogeneous) και γράφεται

$$AX = \mathbf{O} ,$$

όπου $\mathbf{O} \in K^m$. Είναι φανερό ότι η $\Xi = \mathbf{O}$ είναι πάντα λύση του συστήματος $AX = \mathbf{O}$, για όλα τα n και m. Έστω τώρα Ξ μία τυχαία λύση του συστήματος $AX = \mathbf{O}$. Τότε, αν f είναι η γραμμική συνάρτηση της σχέσης (4.3), έχουμε

$$A\Xi = \mathbf{O} \Leftrightarrow f(\Xi) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \Xi \in \operatorname{Ker} f.$$

Άρα το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = \mathbf{O}$ είναι ο πυρήνας της f, $\operatorname{Ker} f$. Ιδιαίτερα το σύστημα $AX = \mathbf{O}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική αν και μόνο αν $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{O}\}$, όπου $\mathbf{O} \in K^n$. Επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = \mathbf{O}$ είναι ο υποχώρος $\operatorname{Ker} f$ του K^n. Ο $\operatorname{Ker} f$ λέγεται **μηδενοχώρος** (null space) του A και συμβολίζεται με $\operatorname{null}(A)$.

Από το Θεώρημα 3.1.7 λαμβάνουμε

$$n = \dim_K(K^n) = \dim_K(\operatorname{Ker} f) + \dim_K(\operatorname{Im} f) \leq \dim_K(\operatorname{Ker} f) + m$$

και επειδή $\dim_K(\operatorname{Im} f) = \mathrm{r}(f) = \mathrm{r}(A)$ (βλ. Πρόταση 3.2.5) έπεται ότι

$$\dim_K(\operatorname{null}(A)) = n - \mathrm{r}(A).$$

Έτσι το σύστημα $AX = \mathbf{O}$ έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, αν και μόνο αν $n = \mathrm{r}(A)$. Μάλιστα στην ειδική περίπτωση που $n = m$, τότε $n = \mathrm{r}(A)$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ (βλ. Πόρισμα 1.3.11). Έτσι αν $n = m$ το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Ενώ αν $n > \mathrm{r}(A)$, τότε υπάρχουν και μη μηδενικές λύσεις, αυτές είναι ακριβώς τα στοιχεία του $\operatorname{Ker} f$ που είναι ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης $n - \mathrm{r}(A)$. Όταν το K είναι το $\mathbb{Q}$, το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, τότε αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις. Παρατηρούμε μάλιστα ότι αν το ομογενές σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις τότε θα έχει άπειρες λύσεις, αφού τότε

$$n > m \geq \mathrm{r}(A).$$

Καταλήγουμε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.1.3. *Το ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = \mathbf{O}$, m εξισώσεων με n αγνώστους, έχει πάντα λύση. Το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος αποτελεί διανυσματικό χώρο, τον $\operatorname{null}(A)$, με διάσταση $n - \mathrm{r}(A)$. Ιδιαίτερα έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, αν και μόνο αν $n = \mathrm{r}(A)$, δηλ αν η βαθμίδα του πίνακα συντελεστών του ομογενούς συστήματος ισούται με τον αριθμό των αγνώστων του συστήματος. Αν $A \in M_n(K)$ τότε το σύστημα $AX = \mathbf{O}$ έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.*

Έστω τώρα $\kappa_1\Sigma_1 + \cdots + \kappa_n\Sigma_n = \mathbf{O}$ μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ του πίνακα $A \in M_{m\times n}(K)$, όπου $\kappa_1, \cdots, \kappa_n \in K$. Θέτουμε $Z = [\, \kappa_1 \ \cdots \ \kappa_n \,]^T$. Αφού $AZ = \kappa_1\Sigma_1 + \cdots + \kappa_n\Sigma_n$ (βλ. Πρόταση

1.1.25, iii), έπεται ότι $AZ = \mathbf{O}$ και επομένως $Z \in \mathrm{null}(A)$. Αντίστροφα κάθε στοιχείο του $\mathrm{null}(A)$ δίνει τους συντελεστές για μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A. Έτσι έχουμε ουσιαστικά $n - \mathrm{r}(A)$ μη ισοδύναμες μεταξύ τους σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του A.

Ας επανέλθουμε τώρα στο σύστημα (4.2) (ή (4.1)). Έστω ότι το σύστημα είναι συμβατό και

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix}$$

είναι δύο λύσεις του συστήματος $AX = B$. Τότε

$$f(\Lambda - N) = f(\Lambda) - f(N) = A\Lambda - AN = B - B = \mathbf{O}.$$

Άρα

$$\Lambda - N \in \mathrm{null}(A).$$

δηλ.

$$\Lambda \in N + \mathrm{null}(A) = \{N + H \ / \ H \in \mathrm{null}(A)\}.$$

Αντίστροφα, αν N είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$ και $H \in \mathrm{null}(A)$ (δηλ. το H είναι μία λύση του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{O}$), τότε

$$A(N + H) = AN + AH = B + \mathbf{O} = B$$

δηλ. το $N+H$ είναι λύση του συστήματος $AX = B$. Με άλλα λόγια οι λύσεις του συστήματος προκύπτουν αν σε μία συγκεκριμένη λύση του συστήματος αυτού προσθέσουμε κάθε στοιχείο του $\mathrm{null}(A)$. Επομένως το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{O}$ έχει μοναδική λύση, δηλ. αν και μόνο αν $n = \mathrm{r}(A)$ (βλ. Πρόταση 4.1.3).

Το σύστημα $AX = \mathbf{O}$ λέγεται **αντίστοιχο ομογενές** (corresponding homogeneous) σύστημα του $AX = B$.

Καταλήγουμε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.1.4. *Το γραμμικό σύστημα $AX = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους και συντελεστές από το σώμα K, έχει λύση αν και μόνο αν* $\mathrm{r}(A) =$

r([A|B]). *Αν υπάρχουν λύσεις, τότε κάθε λύση εκφράζεται από τη σχέση $N+H$, όπου N είναι μία λύση του συστήματος και το H διατρέχει τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.*

Έτσι υπάρχουν τρεις δυνατότητες για το σύστημα $AX = B$ με n αγνώστους:

• $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}([A|B])$ και το σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύση,

• $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) = n$ και το σύστημα $AX = B$ έχει μία μοναδική λύση,

• $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|B]) < n$ και το σύστημα $AX = B$ έχει περισσότερες από μία λύσης με πλήθος παραμέτρων $n - \mathrm{r}(A) \geq 1$. Οι λύσεις είναι άπειρες αν $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Ας έλθουμε τώρα στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Αρχίζουμε με την περίπτωση $m = n$, δηλ. ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας.

Υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Από την Πρόταση 1.3.21, ii) έχουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A).$$

Έστω $\mathrm{adj}(A) = (d_{ij})$. Από τη σχέση $AX = B$ έπεται ότι

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(d_{i1}\beta_1 + \cdots + d_{in}\beta_n\right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ας συμβολίσουμε με $A(i,B)$ τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του πίνακα A με τον πίνακα B. Είναι εύκολο, αναπτύσσοντας την $\det A(i,B)$ κατά τα στοιχεία της i-στήλης, να διαπιστώσουμε ότι

$$d_{i1}\beta_1 + \cdots + d_{in}\beta_n = \det A(i,B).$$

Άρα

$$x_i = \frac{\det A(i,B)}{\det A}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{4.4}$$

Καταλήγουμε έτσι στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.1.5. (Μέθοδος του Cramer) *Το σύστημα $AX = B$ n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, έχει μοναδική λύση $(x_1, \ldots, x_n)$, όπου τα x_i περιγράφονται στις σχέσεις* (4.4), $1 \leq i \leq n$.

Όπως είδαμε η μέθοδος του Cramer χρησιμοποιείται σε ειδικές περιπτώσεις για την επίλυση του συστήματος $AX = B$, όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος. Πριν δώσουμε μία μέθοδο για την επίλυση του συστήματος $AX = B$ όταν δεν υπάρχουν τέτοιοι περιορισμοί για τον A, ας δούμε πως οι στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές ή στις στήλες του πίνακα $[A|B]$ επηρεάζουν την λύση του συστήματος. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών στον πίνακα $[A|B]$ είναι χρήσιμες προκειμένου να υπολογίσουμε την τάξη του πίνακα A.

Πρόταση 4.1.6. *Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $AX = B$.*

i) *Αν εφαρμοσθεί στον πίνακα $[A|B]$ μία από τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και προκύψει ο πίνακας $[A'|B']$, τότε το σύστημα $A'X = B'$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό σύστημα.*

ii) *Αν A' είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικατασταθεί η i-στήλη, Σ_i, με την $\Sigma_i + a\Sigma_j$, για $0 \neq a \in K$, τότε η $(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n)$ είναι μία λύση του συστήματος $A'X = B$ αν και μόνο αν η*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, a\xi_i + \xi_j, \ldots, \xi_n)$$

είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$.

iii) *Αν A' είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικατασταθεί η στήλη Σ_i με την $b\,\Sigma_i$, για $b \in K$, $b \neq 0$, τότε η $(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ είναι μία λύση του συστήματος $A'X = B$ αν και μόνο αν η $(\xi_1, \ldots, b\,\xi_i, \ldots, \xi_n)$ είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$.*

iv) *Αν A' είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντιμετατεθεί η στήλη Σ_i με την Σ_j, τότε η $(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n)$ είναι μία λύση του συστήματος $A'X = B$ αν και μόνο αν η $(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$.*

Απόδειξη. Ας αρχίσουμε πρώτα με τις στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές. Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.2.9 έχουμε $[A'|B'] = E[A|B]$, για κάποιο στοιχειώδη πίνακα E. Δηλαδή $EA = A'$ και $EB = B'$. Αφού ο E είναι αντιστρέψιμος ισχύει επίσης ότι $A = E^{-1}A'$ και $B = E^{-1}B'$. Συνεπώς αν Ξ είναι λύση του συστήματος $AX = B$ ισχύει

$$A\Xi = B \Rightarrow EA\Xi = EB \Rightarrow A'\Xi = B'.$$

Αντίστροφα αν Ξ είναι λύση του συστήματος $A'X = B'$ ισχύει

$$A'\Xi = B' \Rightarrow E^{-1}A'\Xi = E^{-1}B' \Rightarrow A\Xi = B.$$

Ας εξετάσουμε τώρα τις τρεις περιπτώσεις στοιχειωδών πράξεων στις στήλες. Από τη Πρόταση 1.2.10 ισχύει $A' = AE$, για κάποιο στοιχειώδη πίνακα E. Έστω Ξ μία λύση του συστήματος $A'X = B$. Θα δείξουμε ότι η $E\Xi$ είναι λύση του συστήματος $AX = B$. Πράγματι

$$A'\Xi = B \Rightarrow AE\Xi = B \Rightarrow A(E\Xi) = B.$$

Αντίστροφα έστω Y μία λύση του συστήματος $AX = B$, τότε η $\Xi = E^{-1}Y$ θα είναι μία λύση του συστήματος $A'X = B'$:

$$AY = B \Rightarrow A(E\Xi) = B \Rightarrow A'\Xi = B.$$

Η Πρόταση τώρα προκύπτει άμεσα από τη μορφή του πίνακα E για κάθε έναν από τους τρεις τύπους στοιχειωδών πράξεων (βλ. Παρατήρηση μετά τον Ορισμό 1.2.7), και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού τους με τη στήλη Ξ (βλ. Πρόταση 1.2.9). ■

Θεωρούμε το σύστημα (4.2) $AX = B$, για $m \neq n$, και τον πίνακα $[A|B]$. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss για τις γραμμές του $[A|B]$ και λαμβάνουμε, έστω, τον πίνακα $[A'|B']$, όπου ο πίνακας A' είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.6, i) τα συστήματα $[A|B]$ και $[A'|B']$ έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις και $\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A')$.

Έστω r η κοινή τάξη των πινάκων A, A' και $A' = (\alpha'_{ij})$, $B' = (\beta'_i)$. Τότε οι τελευταίες $m-$r γραμμές του πίνακα A' είναι μηδενικές και ο πίνακας $[A'|B']$ έχει τη μορφή

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{c|c} & \beta'_1 \\ * & \vdots \\ & \beta'_{\mathrm{r}} \\ \hline & \beta'_{r+1} \\ \mathbf{O} & \vdots \\ & \beta'_m \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι αν κάποιο από τα $\beta'_{\mathrm{r}+1}, \ldots, \beta'_m$ είναι διάφορο του 0 τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Για να συνεχίσουμε την επίλυση του συστήματος $AX = B$, ας υποθέσουμε ότι το σύστημα $AX = B$ (και $A'X = B'$) είναι συμβατό δηλαδή $\beta'_{\mathrm{r}+1} = \cdots = \beta'_m = 0$. Τότε το σύστημα $A'X = B'$ γίνεται

$$\begin{aligned} \alpha'_{11}x_1 + \cdots + \alpha'_{1n}x_n &= \beta'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_{r1}x_1 + \cdots + \alpha'_{rn}x_n &= \beta'_{\mathrm{r}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Αφού ο πίνακας A' είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών υπάρχουν δείκτες $k_1, \ldots, k_{\mathrm{r}}$ έτσι ώστε οι καθοδηγητικές μονάδες να είναι στις στήλες k_i, δηλαδή $\alpha_{ik_i} = 1$ και $\alpha_{ij} = 0,\ j \neq k_i$. Έτσι οι εξισώσεις (4.5), λύνοντας ως προς τις μεταβλητές $x_{k_1}, \cdots, x_{k_{\mathrm{r}}}$, γίνονται, για $1 \le i \le \mathrm{r}$, $1 \le j \le n$,

$$x_{k_i} = \beta'_i - \sum_j a'_{ij}x_j\ , \quad j \neq k_t\ , \quad t = 1, \cdots, \mathrm{r}, \tag{4.6}$$

δηλ. οι μεταβλητές x_j, $j \neq k_t$, γίνονται παράμετροι και περιγράφουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές ως προς αυτές τις $n - \mathrm{r}$ παραμέτρους. Τα στοιχεία $(x_1, \ldots, x_n)$, όπου αντικαθιστούμε τις τιμές των x_{k_i} από τις εξισώσεις (4.6), μας δίνουν τις λύσεις του συστήματος.

Ιδιαίτερα οι λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A'X = \mathbf{O}$ είναι το σύνολο

$$\mathrm{null}(A') = \{\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ /\ x_{k_i} = -\sum_j a'_{ij}x_j\ ,\ \ j \neq k_t\ ,\ \ t = 1, \cdots, \mathrm{r}\},$$

όπου $i = 1, \ldots, \mathrm{r}$. Θυμίζουμε ότι ο $\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A')$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $n - \mathrm{r}$, αριθμός ίσος με το πλήθος των παραμέτρων x_j στα αθροίσματα

$$\sum_j a'_{ij}x_j\ .$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε μία βάση του $\mathrm{null}(A)$ αν στο $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{null}(A)$ θέτουμε κάθε φορά μία από τις παραμέτρους x_j, $j \neq k_t$ ίση με 1 και όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους ίσες με 0. Έτσι σε κάθε μία από τις $n - \mathrm{r}$ παραμέτρους αντιστοιχεί και ένα στοιχείο του $\mathrm{null}(A)$, ενώ τα $n - \mathrm{r}$ στοιχεία που δημιουργούνται είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ο πίνακας των συντεταγμένων τους έχει βαθμίδα $n - \mathrm{r}$, αφού ένας υποπίνακας του είναι ο $I_{n-\mathrm{r}}$).

Τα παρακάτω παραδείγματα θα διαφωτίσουν τη διαδικασία που περιγράψαμε.

Παραδείγματα 4.1.7.

α) Θα λύσουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 5x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{array}$$

Παίρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα $[A|\mathbf{O}]$ του συστήματος και το φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$[A\,|\mathbf{O}] = \left[\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & | & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & | & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & | & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι r $= 3$, επομένως το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος θα αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης $5-3=2$. Το σύστημα γίνεται ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & & & +4x_5 = 0 \\ & & x_3 & & -\ x_5 = 0 \\ & & & x_4 & +3x_5 = 0 \end{array}$$

και το σύνολο των λύσεών του είναι το

$$\begin{aligned} \mathrm{null}(A) &= \{\ (2x_2-4x_5, x_2, x_5, -3x_5, x_5)\ /\ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_2(2,1,0,0,0) + x_5(-4,0,1,-3,1)\ /\ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} = \\ &= S(\{(2,1,0,0,0), (-4,0,1,-3,1)\}). \end{aligned}$$

Αν $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_5$ είναι οι στήλες του πίνακα A, τότε κάθε στοιχείο του $\mathrm{null}(A)$ μας δίνει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A. Έτσι έχουμε

$$2\Sigma_1 + \Sigma_2 = \mathbf{O}, \quad -4\Sigma 1 + \Sigma_3 - 3\Sigma_4 + \Sigma_5 = \mathbf{O}.$$

β) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 1 \\ -\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3. \end{array}$$

Παίρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα $[A|B]$ του συστήματος και το φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 5 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Η βαθμίδα του πίνακα A και $[A|B]$ είναι 4, και το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & -1/3\,x_5 & = & 1 \\ & x_2 & & & +8/3\,x_5 & = & 1 \\ & & x_3 & & + \quad x_5 & = & 1 \\ & & & x_4 & + \quad x_5 & = & 1. \end{array}$$

Οι λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{O}$ είναι τα στοιχεία

$$\{\ (1/3x_5, -8/3x_5, -x_5, -x_5, x_5)\ /\ x_5 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x_5(1/3, -8/3, -1, -1, 1)\ /\ x_5 \in \mathbb{R}\} = S(\{(1/3, -8/3, -1, -1, 1)\}).$$

Ο $\mathrm{null}(A)$ έχει διάσταση $5 - \mathrm{r}(A) = 1$ και μία βάση του αποτελείται από το $(1/3, -8/3, -1, -1, 1)$. Οι λύσεις του συστήματος $AX = B$ είναι

$$\{\ (1,1,1,1,0) + t\ (1/3, -8/3, -1, -1, 1)\ /\ t \in \mathbb{R}\}.$$

γ) Θα λύσουμε το γραμμικό παραμετρικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3\lambda + 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 3\lambda + 3 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -\lambda - 3, \end{array}$$

όπου $\lambda \in R$.

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(2+\lambda) - (2+1) - 3(2\lambda - 2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

• Αν $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1,\ 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, και θα την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Cramer. Θα υπολογίσουμε πρώτα τις ορίζουσες

$$\det A(1,B) = \begin{vmatrix} 3\lambda+3 & 2 & 1 \\ 3\lambda+3 & 2 & \lambda \\ -\lambda-3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3),$$

$$\det A(2,B) = \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda+3 & 1 \\ 1 & 3\lambda+3 & \lambda \\ -3 & -\lambda-3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 =$$
$$; \qquad = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

$$\det A(3,B) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3\lambda+3 \\ 1 & 2 & 3\lambda+3 \\ -3 & -1 & -\lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3).$$

Τότε η μοναδική λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$x_1 = \frac{\det A(1,B)}{\det A} = 1, \quad x_2 = \frac{\det A(2,B)}{\det A} = \lambda + 1, \quad x_3 = \frac{\det A(3,B)}{\det A} = 1.$$

Η μέθοδος Cramer δεν εφαρμόζεται όταν $\lambda = 1$ ή $\lambda = 3$. Έτσι:

• Αν $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2\,x_2 & +\,x_3 & = 6 \\ x_1 & +2\,x_2 & +\,x_3 & = 6 \\ -3\,x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & = -4. \end{array}$$

Παίρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα και το φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ -3 & -1 & 1 & | & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & -3/5 & | & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & | & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right].$$

Οι εξισώσεις του συστήματος $A'X = B'$ είναι:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2/5 + 3/5x_3 \\ x_2 & = & 14/5 - 4/5x_3 \end{array}$$

και οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\{(2/5, 14/5, 0) + t\ (3/5, -4/5, 1)\ /\ t \in \mathbb{R}\}.$$

• Αν $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrrcr} 3\,x_1 & +\,2\,x_2 & +\ \ x_3 & = & 12 \\ x_1 & +\,2\,x_2 & +\,3x_3 & = & 12 \\ -3\,x_1 & -\ x_2 & +\ \ x_3 & = & -6. \end{array}$$

Φέρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 3 & 2 & 1 & | & 12 \\ 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ -3 & -1 & 1 & | & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right]$$

και οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\{(0, 6, 0) + t\ (1, -2, 1)\ /\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρούμε ότι στις τελευταίες δύο περιπτώσεις, όπου η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι ίση με το 0, η βαθμίδα του πίνακα είναι αναγκαστικά μικρότερη του 3. Ο αριθμός των παραμέτρων στις λύσεις είναι ίσος με $3-2$, (τον αριθμό των στηλών μείον τη βαθμίδα του πίνακα), είναι ίσος δηλαδή με τον αριθμό των στηλών στις οποίες δεν αντιστοιχούν καθοδηγητικές μονάδες.

δ) Έστω η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ , \quad (x, y) \mapsto (2x + y, x - 2y, x).$$

Θα περιγράψουμε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα στοιχείο $v = (a, b, c)$ να ανήκει στην εικόνα της f.

Το $v \in \mathrm{Im} f$ αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & y & = & a \\ x & - & 2\,y & = & b \\ x & & & = & c \end{array}$$

είναι συμβατό. Αφού

$$\left[\begin{array}{rrcr} 2 & 1 & | & a \\ 1 & -2 & | & b \\ 1 & 0 & | & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrcl} 1 & 0 & | & c \\ 0 & 1 & | & a - 2c \\ 0 & 0 & | & 2a + b - 5c \end{array}\right]$$

το σύστημα είναι συμβατό αν και μόνο αν $2a+b-5c=0$. Συνεπώς

$$\mathrm{Im} f = \{\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2a+b-5c=0\} = S(\{(1,-2,0),(0,5,1)\}),$$

δηλ. η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

ε) Τα στοιχεία $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (1,3,4)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω $B = (v_1, v_2, v_3)$. Θα βρούμε τις συντεταγμένες του στοιχείου $u = (1,2,1)$ ως προς τη βάση αυτή.

Έστω $u = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$. Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & + & 1\,x_3 & = & 1 \\ 1\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ 1\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Αφού

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 3 & 4 & | & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccr} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right]$$

έπεται ότι $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$ και $C_B(u) = [\ 2\ \ -3\ \ \ 2\ ]^T$.

στ) Οι εξισώσεις $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ και $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ περιγράφουν δύο επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$. Τα επίπεδα αυτά δεν είναι υποχώροι του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ γιατί δε διέρχονται από το $O(0,0,0)$. Μπορούμε όμως να τα σκεφτούμε ως τα επίπεδα $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ και $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ τα οποία έχουμε μεταφέρει παράλληλα έτσι ώστε να διέρχονται αντίστοιχα από τα σημεία $(1,0,0)$ και $(2,0,0)$. Θα υπολογίσουμε την τομή τους. Θα λύσουμε δηλ. το σύστημα

$$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & =2. \end{array}$$

Για τον επεκτεταμένο πίνακα έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccr} 1 & 2 & 0 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 \end{array}\right]\ .$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στις εξισώσεις

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5/2 - 2x_2 \\ x_3 & = & -1/2\,. \end{array}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο

$$\{ (5/2, 0, -1/2) + t(-2, 1, 0) \ / \ t \in \mathbb{R}\}.$$

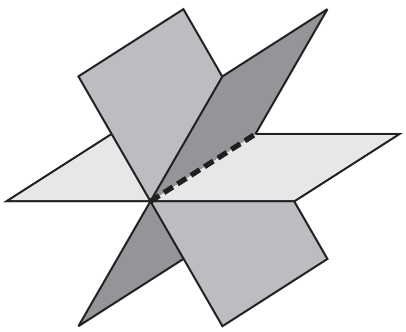
Το σύνολο αυτό είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(5/2, 0, -1/2)$ (για $t = 0$) και $(1/2, 1, -1/2)$ (για $t = 1$). Η ευθεία αυτή δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν διέρχεται από το O.

ζ) Θα υπολογίσουμε την τομή των τριών επιπέδων $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ και $2x_1 + 3x_2 = 2$ του $\mathbb{R}^3$. Για τον επεκτεταμένο πίνακα έχουμε:

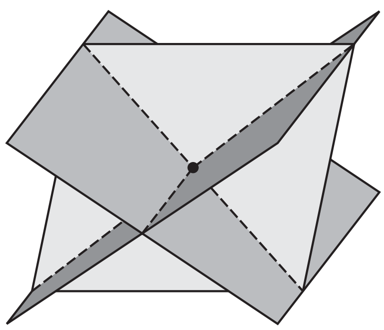
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι το σύστημα αυτό δεν είναι συμβατό, επομένως τα τρεία επίπεδα δε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε την τομή τριών ή και παραπάνω επιπέδων του $\mathbb{R}^3$. Η τομή είναι το κενό, δηλ. τα επίπεδα δε διέρχονται από το ίδιο σημείο, όταν το γραμμικό σύστημα δεν είναι συμβατό. Η τομή είναι ένα μοναδικό σημείο όταν ο πίνακας των συντελεστών και ο επεκτεταμένος πίνακας έχουν βαθμίδα 3 (βλ. Σχήμα 4.2). Η τομή είναι μία ευθεία όταν ο πίνακας των συντελεστών και ο επεκτεταμένος πίνακας έχουν βαθμίδα 2 (βλ. Σχήμα 4.1). Η τομή είναι ένα επίπεδο όταν ο πίνακας των συντελεστών και ο επεκτεταμένος πίνακας έχουν βαθμίδα 1 (στην περίπτωση αυτήν όλα τα επίπεδα ταυτίζονται). Η τομή δεν μπορεί να είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^3$. Στην περίπτωση αυτήν η βαθμίδα του πίνακα των συντελεστών θα έπρεπε να είναι ίση με το 0, δηλαδή κάθε ένα από τα επίπεδα να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$ και να δίνεται από την εξίσωση 0=0.



Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2

Εφαρμογή 4.1.8. Σημεία σε μία καμπύλη

Το γράφημα ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, βαθμού n και με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, στο $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **πολυωνυμική καμπύλη** βαθμού n. Θα δείξουμε ότι από $n+1$ δοθέντα σημεία

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}) \ , \ \text{ με } \ x_i \neq x_j, \ \ 1 \leq i < j \leq n+1,$$

του επιπέδου διέρχεται ακριβώς μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ n. Πράγματι θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ενός πολυωνύμου $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες $n+1$ εξισώσεις:

$$\begin{array}{l} a_0 1 + \ a_1x_1 \ + a_2x_1^2 \ + \cdots + \ a_nx_1^n \ = \ y_1 \\ \vdots \\ a_0 1 + a_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2 + \cdots + a_nx_{n+1}^n = y_{n+1} \ . \end{array} \tag{4.7}$$

Οι μεταβλητές σε αυτές τις εξισώσεις είναι τα $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι η ορίζουσα του Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j),$$

που είναι διάφορη του μηδενός, για $1 \leq i, j \leq n+1$ (βλ. Παράδειγμα 1.3.23 ε). Άρα το σύστημα (4.8) έχει μία ακριβώς λύση, που προσδιορίζει τους συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$, δηλ. υπάρχει μοναδική πολυωνυμική καμπύλη που διέρχεται από τα δοθέντα σημεία του επιπέδου.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όταν τα σημεία που δίνονται είναι περισσότερα από $n+1$, τότε ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος που δημιουργείται παύει να είναι τετραγωνικός και επομένως μπορεί να μην υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n που να διέρχεται από αυτά τα σημεία.

Παράδειγμα 4.1.9.

Δίνονται τα σημεία $(2, 4)$, $(3, 2)$ και $(5, -8)$ του επιπέδου. Θα βρούμε τη μοναδική πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα τρεία αυτά σημεία και θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 3 που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Έστω $y = \alpha_0 + a_1 x + a_2 x^2$ η ζητούμενη πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2. Επειδή τα τρεία σημεία ανήκουν στην καμπύλη, έχουμε

$$\begin{array}{rcr} a_0 1 + \ a_1 2 + \ a_2 2^2 & = & 4 \\ a_0 1 + \ a_1 3 + \ a_2 3^2 & = & 2 \\ a_0 1 + \ a_1 5 + \ a_2 5^2 & = & -8. \end{array}$$

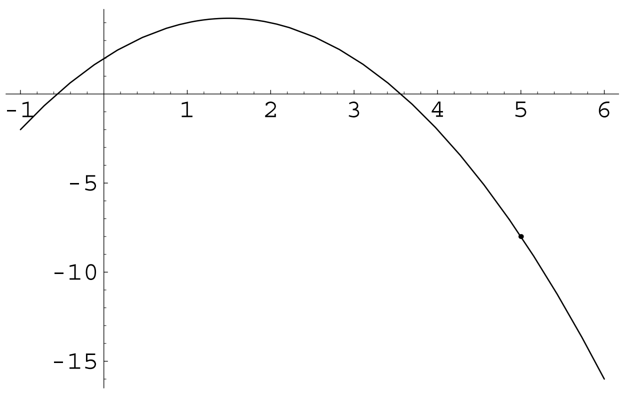
Η ορίζουσα του συστήματος ισούται με

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

και το σύστημα έχει μοναδική λύση, που δίνεται από τις σχέσεις (4.4):

$$a_0 = \frac{12}{6} = 2, \quad a_1 = \frac{18}{6} = 3, \quad a_2 = \frac{-6}{6} = -1.$$

Επομένως η ζητούμενη καμπύλη είναι η $y = 2 + 3x - x^2$ (βλ. επόμενο σχήμα).



Έστω τώρα $y = \alpha_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 3 που διέρχεται από τα δοθέντα σημεία. Τότε θα έχουμε

$$\begin{array}{rcr} a_0 1 + \ a_1 2 + \ a_2 2^2 + \ a_3 2^3 & = & 4 \\ a_0 1 + \ a_1 3 + \ a_2 3^2 + \ a_3 3^3 & = & 2 \\ a_0 1 + \ a_1 5 + \ a_2 5^2 + \ a_3 5^3 & = & -8\ . \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών του παραπάνω συστήματος έχει βαθμίδα 3 και επομένως το σύστημα είναι συμβατό (βλ. Πρόταση 4.1.2). Όμως το πλήθος των αγνώστων του συστήματος είναι $4 > \mathrm{r}(A)$ και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλ. υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 3 που διέρχονται από τα δοθέντα σημεία. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ο άγνωστος a_3 μπορεί να θεωρηθεί ως παράμετρος, οπότε το a_3 μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή του $\mathbb{R}$. $\square$

Ασκήσεις εδαφίου 4.1

1. **(*)** Να λυθούν με τη μέθοδο Cramer τα παρακάτω συστήματα:

i) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & + & x_4 & = & 3 \\ -\,x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 9\,. \end{array}$$

2. **(*)** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

i) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 3 \end{array}$$

3. **(*)** Να βρεθεί ο πυρήνας της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, με $\phi(a,b,c,d) = (a+2b+d,\ -a+3b+c-d,\ 2a+b-d,\ 2b-c+7d)$.

4. **(*)** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Να λυθούν τα συστήματα $AX = B$ και $A^T X = B$.

5. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 7\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 8\,x_4 & - & 4\,x_5 & = & -3 \\ -3\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 3\,x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

Αν A είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος, να βρείτε μία βάση του $\text{null}(A)$. Βεβαιώστε ότι ενώ το σύστημα έχει περισσότερες από μία λύσεις, υπάρχει άγνωστος του συστήματος που έχει μοναδική λύση. Επίσης να βρείτε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A.

6. **(*)** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε το σύστημα $AX = B$ να έχει λύση. Για την τιμή αυτή να λύσετε το σύστημα, αφού πρώτα βρείτε τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

7. **(*)** Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x + 3y).$$

Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα στοιχείο (a, b, c) του $\mathbb{R}^3$ να ανήκει στην $\text{Im} f$.

8. **(*)** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί ο $\mathrm{null}(A)$ και να βρεθούν οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A. Αν ο A είναι ο πίνακας του ενδομορφισμού $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, να περιγραφεί ο $\mathrm{Ker}\, f$.

9. **(*)** Δίνεται ο μη μηδενικός πίνακας $A \in M_{4\times 7}(K)$ και έστω $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ οι γραμμές του.

   i) Ποιές είναι οι δυνατές τιμές για την $\dim_K(\mathrm{null}(A))$;

   i) Ποιές είναι οι δυνατές τιμές για την $\dim_K(\mathrm{null}(A))$ αν για τις γραμμές του πίνακα A ισχύει $\Gamma_3 = \Gamma_1 + 2\Gamma_4$;

10. **(*)** Να βρείτε ένα γραμμικό σύστημα με 3 αγνώστους που η γενική του λύση να είναι το σύνολο

$$\{\ (1,2,1) + t(-1,0,1) + s(0,1,1)\ /\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

11. **(*)** Έστω ότι ο επεκτεταμένος πίνακας του συστήματος $AX = B$ έχει κλιμακωτή μορφή γραμμών τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Να λυθεί το σύστημα. Να βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος, καθώς και τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A. Για ποιούς πίνακες $C \in M_{2\times 1}(K)$ το σύστημα $AX = C$ δεν έχει λύση;

12. **(*)** Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2ay & + & z & = & 0 \\ x & + & 2ay & + & az & = & 0 \\ ax & + & 4ay & + & 2z & = & 0\,. \end{array}$$

Να υπολογίσετε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού a ο χώρος λύσεων του συστήματος έχει διάσταση ίση με 1.

13. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \kappa z & = & 0 \\ x & + & \lambda y & + & \mu z & = & 0, \end{array}$$

για $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

14. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} 3\,x & & & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2\,y & & & + & 4\,t & = & 0 \\ -\,x & + & \lambda\,y & + & z & + & (3+\lambda)t & = & 0, \end{array}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 6\kappa \\ \lambda x & + & 3y & + & 2z & = & 2\lambda \\ 2x & + & y & + & \mu z & = & 4, \end{array}$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

16. **(*)** Μπορεί να προσδιοριστεί ένας πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$ αν είναι γνωστό το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του;

17. **(*)** Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ώστε να υπάρχει πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$$

για τον οποίο $AB + BA = \mathbf{O}$.

18. **(*)** i) Για ποιές τιμές του a τα στοιχεία

$$v_1 = (1, 1, a), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (3, -1, 1)$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$;

ii) Να εκφρασθεί το $(1, 0, 0)$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων v_1, v_2, v_3 του ζητήματος i).

19. **(*)** Να υπολογισθεί το β ώστε το $(1, 2, \beta) \in S\{(1, 1, 1), (3, 2, 1)\})$.

20. **(*)** i) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$.

ii) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 3 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 6)$.

21. **(*)** Έστω πίνακας $A \in M_{n\times m}(K)$. Να αποδείξετε τα εξής:

i) Αν $\mathrm{r}(A) = n$, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας $B \in M_{m\times n}(K)$ έτσι ώστε $AB = I_n$. Ο B λέγεται δεξιός αντίστροφος του A.

ii) Αν $\mathrm{r}(A) = m$, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας $C \in M_{m\times n}(K)$ έτσι ώστε $CA = I_m$. Ο C λέγεται αριστερός αντίστροφος του A.

22. **(*)** Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{Q})$ και το σύστημα $AX = B$ έχει μία λύση $Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, αλλά $Z \notin M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις στο $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Εξάσκηση με Mathematica εδαφίου 4.1

Σ' αυτήν την ενότητα υπολογίζουμε τον μηδενοχώρο δοθέντος πίνακα a με την εντολή Nullspace[a]. Για να λύσουμε το σύστημα $ax = b$ χρησιμοποιούμε την εντολή LinearSolve[a, b] που δίνει μία συγκεκριμένη λύση και την εντολή Solve[$a.X$ == b] που είχαμε συναντήσει στην Ενότητα 2.3. Θα βρούμε τα μαγικά 3×3-τετράγωνα (βλ. άσκηση 2.2.4) με αθροίσματα 0 και 5.

In[*]:= **<< LinearAlgebra\`MatrixManipulation\`**

In[*]:= **a = {{1, 2, 2, 3}, {3, 6, -1, 2}, {2, 4, 5, 7}};**
MatrixForm[a]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

In[*]:= **null =NullSpace[*a*]**

Out[*]:= $\{\{-1,0,-1,1\},\{-2,1,0,0\}\}$

In[*]:= ***a*.Transpose[null]//MatrixForm**

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Σ.Σ. Οι δύο γραμμές του null είναι λύσεις του συστήματος $ax = 0$ και μάλιστα αποτελούν βάση για το χώρο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, όπως φαίνεται και από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του a παρακάτω. Για να λύσουμε ταυτόχρονα τα σύστηματα $ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}^T$ και $ax = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}^T$ επεκτείνουμε τον πίνακα a με τις αντίστοιχες δύο στήλες. Ονομάζουμε τον επεκτεταμένο πίνακα ea και τον φέρνουμε στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή rea.

In[*]:= ***ea* = AppendRows[*a*,Transpose[{{1, 1, 7}, {1, 10, 1}}]];**
MatrixForm[*ea*]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

In[*]:= ***rea* = RowReduce[*ea*]; MatrixForm [*rea*]**

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Σ.Σ. Το πρώτο σύστημα δεν είναι συμβατό και το στοιχείο $\{1, 1, 7\}$ δεν ανήκει στην εικόνα της γραμμικής συνάρτησης f που ορίζεται από τον πίνακα a ως προς τη συνήθη βάση. Ο πυρήνας της γραμμικής αυτής συνάρτησης f παράγεται από τις γραμμές του null. Το στοιχείο $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μία από τις λύσεις του δεύτερου συστήματος όπως επιβεβαιώνουμε με τον παρακάτω πολλαπλασιασμό.

In[*]:= ***sol* = {3, 0, −1, 0}; *a*.*sol***

Out[*]:= $\{1, 10, 1\}$

Σ.Σ. Παρακάτω υπολογίζουμε τον μηδενοχώρο του *rea* και παρατηρούμε ότι είναι άμεσα συνδεδεμένος με το χώρο των λύσεων των συστημάτων. Θα μπορρούσε ίσως ο αναγνώστης να διατυπώσει κάποιο θεώρημα;

In[*]:= **NullSpace[*rea*]**

Out[*]:= $\{\{-3, 0, 1, 0, 0, 1\}, \{-1, 0, -1, 1, 0, 0\}, \{-2, 1, 0, 0, 0, 0\}\}$

Σ.Σ. Επιβεβαιώνουμε ότι το άθροισμα μίας συγκεκριμένης λύσης, για το δεύτερο σύστημα και ενός στοιχείου του μηδενοχώρου, δίνουν μία καινούρια λύση του συστήματος.

In[*]:= **Simplify[*a*.(*sol* + *t*1 null[[1]] + *t*2 null[[2]])]**

Out[*]:= $\{1, 10, 1\}$

Σ.Σ. Οι εντολές στο Mathematica που δίνουν τη συγκεκριμένη και τη γενική λύση είναι η Solve και η LinearSolve. Τις εφαρμόζουμε για να λύσουμε το δεύτερο σύστημα.

In[*]:= ***b* = {1, 10, 1}; LinearSolve[*a*, *b*]**

Out[*]:= $\{3, 0, -1, 0\}$

In[*]:= ***a*.{*x*, *y*, *z*, *w*} == *b***

Out[*]:= $\{3w + x + 2y + 2z, 2w + 3x + 6y - z, 7w + 2x + 4y + 5z\}$
$== \{1, 10, 1\}$

In[*]:= **Solve[%, {*x*, *y*, *z*, *w*}]**

Out[*]:= Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...

Out[*]:= $\{\{x \to 3 - w - 2y, z \to -1 - w\}\}$

Σ.Σ. Το Mathematic δίνει λύσεις για το x και το z ως προς το w και το y. Οι δύο τελευταίες μεταβλητές θεωρούνται ως παράμετροι. Παρακάτω θα βρούμε τις συνθήκες έτσι ώστε το σύστημα $ax = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \end{bmatrix}^T$ να είναι συμβατό. Παίρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα και κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών έως ότου βρούμε όλες τις γραμμές που ορίζουν τη βαθμίδα του a. Εφόσον ο a έχει βαθμίδα 2, σταματάμε όταν βρούμε την κατάλληλη γραμμή με τα μηδενικά.

In[*]:= ***ea* = AppendRows[*a*,Transpose[{{*a*1, *a*2, *a*3}}]];**

MatrixForm[*ea*]

$$\text{Out[*]:=}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & a1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 & a2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & a3 \end{pmatrix}$$

In[*]:= ***nea* = *ea*; *nea*[[2]] = *nea*[[2]] − 3*nea*[[1]];**
***nea*[[3]] = *nea*[[3]] − 2*nea*[[1]]; MatrixForm[*nea*]**

$$\text{Out[*]:=}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & a1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -3a1+a2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2a1+a3 \end{pmatrix}$$

In[*]:= ***fea* = *nea*; *fea*[[2]] = *fea*[[2]] + 7*fea*[[3]];**
MatrixForm[Simplify[*fea*]]

$$\text{Out[*]:=}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & a1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17a1+a2+7a3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2a1+a3 \end{pmatrix}$$

In[*]:= **LinearSolve[*a*, {*a*1, +17*a*1 − 7*a*3, *a*3}]**

Out[*]:= $\{5a1-2a3, 0, -2a1+a3, 0\}$

Σ.Σ. Επομένως για να είναι συμβατό το σύστημα $ax = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \end{bmatrix}^T$ πρέπει $-17a1 + a2 + 7a3 = 0$. Στην περίπτωση αυτήν το σύνολο των λύσεων προκύπτει από το άθροισμα της συγκεκριμένης λύσης $(5a1-2a3, 0, -2a1+a3, 0)$ με τα στοιχεία του μηδενοχώρου.

Για να βρούμε το μαγικό 3×3 τετράγωνο που το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών, στηλών και κυρίας διαγωνίου είναι 0, πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα 7 εξισώσεων με 9 αγνώστους.

In[*]:= ***magic* = {{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0},**
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1}, {1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1}}; MatrixForm[*magic*]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In[*]:= **MatrixRank[*magic*]**

Out[*]:= 6

Σ.Σ. Αφού η βαθμίδα του πίνακα είναι 6 ο μηδενοχώρος έχει διάσταση 3. Τα στοιχεία της βάσης του μηδενοχώρου ανήκουν στο $\mathbb{R}^9$ και αντιστοιχούν σε μαγικούς πίνακες του $M_3(\mathbb{R})$ για τον αριθμό 0.

In[*]:= **null = NullSpace[*magic*]**

Out[*]:= $\{\{0, 1, -1, 1, -1, 0, -1, 0, 1\}, \{1, -1, 0, 1, -1, 0, -2, 2, 0\},$
$\{1, 1, -2, -1, -1, 2, 0, 0, 0\}\}$

In[*]:= ***magic*0*a* = {{0, 1, −1}, {1, −1, 0}, {−1, 0, 1}};**
MatrixForm[*magic*0*a*]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In[*]:= ***magic*0*b* = {{1, −1, 0}, {1, −1, 0}, {−2, 2, 0}};**

In[*]:= ***magic*0*c* = {{1, 1, −2}, {−1, −1, 2}, {0, 0, 0}};**

In[*]:= **LinearSolve[*magic*, {5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}]**

Out[*]:= $\{0, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 0\}$

In[*]:= ***magic*5 = {{0, 0, 5}, {0, 5, 0}, {5, 0, 0}};**
MatrixForm[*magic*5]

Out[*]:= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Σ.Σ. Τα μαγικά τετράγωνα για τον αριθμό 5 είναι της μορφής $magic5 + r\ magic0a + s\ magic0b + t\ magic0c$. Γενικότερα τα μαγικά τετράγωνα για τον αριθμό m είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+s \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

4. Αν f είναι συνάρτηση που περιγράφεται παραπάνω, να παρατηρήσετε ότι $f(e_3) = e_3$.

Κεφάλαιο 4 Γραμμικά συστήματα

4.1 Γραμμικά συστήματα

1. i) $x_1 = \dfrac{2}{7}$, $x_2 = \dfrac{37}{7}$, $x_3 = \dfrac{18}{7}$.

ii) $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 1.$

2. i) $x = -3z, \;\; y = 2z, \;\; z \in \mathbb{R}$. ii) Μη συμβατό.

iii) $x = -3z, \;\; y = 1 + 2z, \;\; z \in \mathbb{R}$.

3. Φέρνοντας τον πίνακα της ϕ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

επομένως $\operatorname{Ker}\phi = S(\{(1, -1, 5, 1)\})$.

4. Παρατηρήστε ότι $\det A = 0$. Για το σύστημα $AX = B$ παρατηρήστε ότι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right] ,$$

δηλ. το σύστημα είναι αδύνατο. Για το σύστημα $A^T X = B$ παρατηρήστε ότι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = 2 - z, \;\; y = 1 - 2z, \;\; z \in \mathbb{R}.$$

5. Έστω $[A|B]$ ο επεκτεταμένος πίνακας του συστήματος. Τότε

$$[A|B] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι οι λύσεις του συστήματος $AX = \mathbf{O}$ είναι

$$\text{null}(A) = \{\ (-1/5x_3 - x_4,\ 2/5x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4,\ 0)\ /\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= S(\{(-1/5, 2/5, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 1, 0)\}),$$

ενώ οι λύσεις του $AX = B$ είναι το $\{\ (1,0,0,0,1) + v\ /\ v \in \text{null}(A)\}$. Οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_5$ του πίνακα A είναι οι

$$-1/5\Sigma_1 + 2/5\Sigma_2 + \Sigma_3 = \mathbf{O}, \quad -\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_4 = \mathbf{O}.$$

6. Φέρνουμε τον επεκτεταμένο πίνακα $[A|B]$ του συστήματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$[A|B] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 + a/2 \end{bmatrix}.$$

Για να έχει το σύστημα λύση πρέπει $1 + a/2 = 0$, δηλ. $a = -2$. Τότε οι λύσεις του συστήματος $AX = B$ είναι

$$\{\ (-5 + 3t, -3 + 2t, 5 - t, t)\ /\ t \in \mathbb{R}\} = \{\ (-5, -3, 5, 0) + v\ /\ v \in \text{null}(A)\},$$

όπου $\text{null}(A) = S(\{(3, 2, -1, 1)\})$ είναι το σύνολο των λύσεων του $AX = \mathbf{O}$.

7. $a + b - c = 0$.

8. $\text{null}(A) = \text{Ker}\, f = \{(2z, -z, z)/z \in \mathbb{R}\} = S(\{(2, -1, 1)\})$. Αν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι οι στήλες του πίνακα A, τότε $2\Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 = \mathbf{O}$.

9. i) $3 \leq \dim_K(\text{null}(A)) \leq 6$. ii) $4 \leq \dim_K(\text{null}(A)) \leq 6$.

10. $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 2 + s$, $x_3 = 1 + t + s$. Απαλείφοντας τα t και s παίρνουμε $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

11. Το σύστημα γίνεται $x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_4$, $x_3 = 2 - 2x_4$. Η λύση του $AX = \mathbf{O}$ είναι το σύνολο

$$\text{null}(A) = S(\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\})$$

και η λύση του συστήματος είναι το σύνολο

$$\{\ (1, 0, 2, 0, 0) + v\ /\ v \in \text{null}(A)\}.$$

Επειδή $\mathrm{r}(A) = 2$, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|C])$, $\forall\, C \in M_{2\times 1}(K)$, και το σύστημα $AX = C$ είναι πάντα συμβατό.

12. Θα πρέπει το σύστημα να έχει μη μηδενική λύση. Άρα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2a & a \\ a & 4a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \;\text{ ή }\; a = 1 \;\text{ ή }\; a = 2.$$

Για $a = 1$, φέρνοντας τον πίνακα του συστήματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι ο υποχώρος

$$\{\, (0, -1/2z, z) \;/\; z \in \mathbb{R}\} = S(\{(0,-1,2)\})$$

του $\mathbb{R}^3$ που έχει διάσταση 1. Όμοια για $a = 0$ ή $a = 2$, ο χώρος των λύσεων έχει διάσταση ίση με 1. Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι 0, 1 και 2.

13. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \\ 1 & \lambda & \mu \end{bmatrix},$$

τότε $\det A = (\kappa - 1)(1 - \lambda)$.

• Αν $\kappa \neq 1$ και $\lambda \neq 1$, τότε υπάρχει μοναδική λύση, η $(0,0,0)$.

• Αν $\kappa = 1$ και $\lambda \neq 1$, τότε $\mathrm{r}(A) = 2$ και η διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος είναι ίση με $3 - 2 = 1$. Οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\left\{\, (\frac{\mu-\lambda}{\lambda-1}\, z,\; \frac{1-\mu}{\lambda-1}\, z,\; z) \;/\; z \in \mathbb{R}\right\}.$$

• Αν $\kappa \neq 1$ και $\lambda = 1$, τότε $\mathrm{r}(A) = 2$ και οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\{\, (x, -x, 0) \;/\; x \in \mathbb{R}\}.$$

• Αν $\kappa = \lambda = 1$ και $\mu \neq 1$, τότε $\mathrm{r}(A) = 2$ και οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\{\, (x, -x, 0) \;/\; x \in \mathbb{R}\}.$$

• Αν $\kappa = \lambda = \mu = 1$, τότε $\mathrm{r}(A) = 1$ και η διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος είναι ίση με $3 - 1 = 2$. Οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\{\, (x, y, -x-y) \;/\; x, y \in \mathbb{R}\} = S(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}).$$

14. Έστω A ο πίνακας του συστήματος. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & 3+\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2+\lambda & 1 & 7+\lambda \\ 0 & -6 & -1 & -11 \end{bmatrix}.$$

Για να προχωρήσουμε θα αλλάξουμε τη στήλη 2 με τη στήλη 3, προσέχοντας ότι στον καινούριο πίνακα η στήλη 2 αναφέρεται στη μεταβλητή t, ενώ η στήλη 3 αναφέρεται στη μεταβλητή y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2+\lambda & 7+\lambda \\ 0 & -1 & -6 & -11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2+\lambda & 7+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-4 & \lambda-4 \end{bmatrix}.$$

• Αν $\lambda \neq 4$, τότε $\mathrm{r}(A) = 3$ και $(\lambda - 4)y = (4 - \lambda)t$, δηλαδή $y = -t$. Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έπεται ότι $x = -2t$ και από την πρώτη εξίσωση έπεται ότι $-6t - z + t = 0$, δηλαδή $z = -5t$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι $\{\ (-2t - t, -5t, t)\ /\ t \in \mathbb{R}\}$.

• Αν $\lambda = 4$, τότε $\mathrm{r}(A) = 2$. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος προκύπτει ότι $z = t + 3(-2y - 4t)$ και $x = -2y - 4t$. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση οι λύσεις είναι $\{\ (-2y - 4t, y, -6y - 11t, t)\ /\ y, t \in \mathbb{R}\} = S(\{(-2, 1, -6, 0), (-4, 0, -11, 1)\})$.

15. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{bmatrix}$$

ο πίνακας του συστήματος, τότε $\det A = (\mu - 1)(6 - \lambda)$.

• Αν $\mu \neq 1$ και $\lambda \neq 6$, τότε υπάρχει μοναδική λύση, η

$$x = \frac{-2(\mu-1)(\lambda+9\kappa) - 2(2+3\kappa)}{(\mu-1)(6-\lambda)},$$

$$y = \frac{2(2+3\kappa)(\lambda\mu-4)}{(\mu-1)(6-\lambda)}, \qquad z = \frac{2(2+3\kappa)}{\mu-1}.$$

• Αν $\mu = 1$, τότε αφαιρώντας την πρώτη εξίσωση από την τρίτη προκύπτει ότι $4 + 6\kappa = 0$. Άρα για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $\kappa = -2/3$ και το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & 3y & + & 2z & = & 2\lambda \\ 2x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

Από αυτό προκύπτει ότι $y = (4 - \lambda)(x - 2)$ και $z = (\lambda - 6)(x - 2)$.

• Αν $\lambda = 6$ και $\mu \neq 1$, τότε από τις δύο τελευταίες εξισώσεις του αρχικού συστήματος προκύπτει ότι $(2-3\mu)z = 0$. Αν $z = 0$, τότε το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & -6\kappa \\ 2x & + & y & = & 4 \end{array}$$

που έχει λύση αν $\kappa = -2/3$ και η λύση βρίσκεται όπως στην περίπτωση $\mu = 1$. Έστω ότι $z \neq 0$, τότε $2 - 3\mu = 0$, $\mu = 2/3$. Το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & -6\kappa \\ 6x + 3y + 2z & = & 12. \end{array}$$

Η λύση δίνεται από τις σχέσεις

$$y = 12 + 12\kappa - 2x, \quad z = -18\kappa - 12.$$

16. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & \beta & & & & & = & k_1 \\ a & & & + & \gamma & & & = & k_2 \\ & & \beta & & & + & \delta & = & k_3 \\ & & & & \gamma & + & \delta & = & k_4\,. \end{array}$$

Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Άρα το σύστημα αν έχει λύση αυτή δεν είναι μοναδική. Επομένως ο πίνακας A δεν προσδιορίζεται μοναδικά.

17. Η σχέση $AB + BA = \mathbf{O}$ συνεπάγεται την

$$\begin{bmatrix} 2ax + \gamma y + \beta z & \beta x + (a+\delta)y + \beta w \\ \gamma x + (a+\delta)z + \gamma w & \gamma y + \beta z + 2\delta w \end{bmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2\,a & + & \gamma\ y & + & \beta\ z & & & = & 0 \\ \beta\, x & + & (a+\delta)y & & & + & \beta\, w & = & 0 \\ \gamma\, x & & & + & (a+\delta)z & + & \gamma\, w & = & 0 \\ & & \gamma\ y & + & \beta\ z & + & 2\delta\, w & = & 0 \end{array}$$

Για να έχει το πάνω σύστημα μη μηδενική λύση, πρέπει

$$\begin{vmatrix} 2a & \gamma & \beta & 0 \\ \beta & a+\delta & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & a+\delta & \gamma \\ 0 & \gamma & \beta & 2\delta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(a+\delta)^2(a\delta-\beta\gamma)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+\delta=0 \text{ ή } \det A = 0.$$

18. i) Για να είναι τα v_1, v_2, v_3 γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει $\det A \neq 0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως $\det A = 2(1-a)$, άρα για $a \neq 1$ τα v_1, v_2, v_3 αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.
ii) Ζητούνται στοιχεία $x, y, z \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $(1,0,0) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Άρα το (x, y, z) είναι λύση του συστήματος

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος δίνει

$$x = \frac{1}{2(1-a)}\ ,\ \ y = \frac{a+1}{2(1-a)}\ ,\ \ z = \frac{1}{2(1-a)}\ .$$

19. Θα πρέπει

$$(1,2,\beta) = k(1,1,1) + \lambda(3,2,1),$$

για κάποια $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι τα k, λ είναι λύση του συστήματος

$$\begin{array}{ccccc} k & + & 3\lambda & = & 1 \\ k & + & 2\lambda & = & 2 \\ k & + & \lambda & = & \beta. \end{array}$$

Όμως

$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 1 & | & \beta \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta = 3.$$

20. i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$. ii) $g(x) = x^3 - x^2 + 2$.

21. i) Έστω $X_1, \ldots, X_n$ οι στήλες του ζητούμενου πίνακα B και $I_{(1)}, \ldots, I_{(n)}$ οι στήλες του I_n. Τότε

$$AB = I_n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} AX_1 & \cdots & AX_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} I_{(1)} & \cdots & I_{(n)} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AX_i = I_{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Όμως $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|I_{(i)}]) = n$, $i = 1, \ldots, n$, και τα συστήματα έχουν πάντα μοναδική λύση, άρα υπάρχει μοναδικός πίνακας B με την ιδιότητα $AB = I_n$. Για το ii) παρατηρήστε ότι

$$CA = I_m \Leftrightarrow (CA)^T = (I_m)^T \Leftrightarrow A^T C^T = I_m,$$

οπότε η ύπαρξη και μοναδικότητα του πίνακα C προκύπτει από το i).

22. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\mathrm{r}(A) = n$. Τότε $m \geq n$ και ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές ενώ οι υπόλοιπες $m-n$ γραμμές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών. Θεώρουμε το ισοδύναμο σύστημα $A'X = B'$, $A' \in M_n(\mathbb{Q})$, $B' \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$, το οποίο περιέχει μόνο τις εξισώσεις του $AX = B$ που αντιστοιχούν στις n γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Τότε $\det A' \neq 0$ και το $A'X = B'$ έχει μοναδική λύση, την $(x_1, \ldots, x_n)$, όπου $x_i = \dfrac{\det A'(i, B')}{\det A'} \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq n$, το οποίο είναι αδύνατο.

Κεφάλαιο 5. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

5.1. Ιδιοτιμές - Ιδιοχώροι

1. i) $V_{-1}(\phi) = S(\{(-2, 1)\})$, $\quad V_5(\phi) = S(\{(1, 1)\})$.

ii) $P_\psi(x) = 1 - x^3$, $\quad V_1(f) = S(\{1 + x + x^2)\})$.

iii) $P_f(x) = -(x-3)(x-2)^2$, $\quad V_3 = S(\{(-1/2, 1/2), 1\}) = S(\{(1, 1, -2)\})$, $V_2(f) = S(\{(1, 0, 0)\})$. Παρατηρήστε ότι ενώ η ιδιοτιμή 2 είναι διπλή, $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1$.

iv)

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$