Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Ιούνιος 2009
Θέματα προηγούμενων εξεταστικών
Διδάσκουσα: Χαρά Χαραλάμπους

Γραμμικά Συστήματα

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις πράξεις μπορούμε να φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B|C]$ στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1| & -3| & 1/5(3c_1 - 18c_2 + 10c_3) \\ 0 & 1 & 2| & 4| & 1/5(-9x + 29y - 15z) \\ 0 & 0 & 0| & 0| & c_1 - 2c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

– α) Να λύσετε το σύστημα $AX = 0$ και να βρείτε μία βάση για τον μηδενοχώρο του A, $\mathrm{Null}(A)$.
– β) Να λύσετε το σύστημα $AX = B$.
– γ) Να βρείτε συνθήκη έτσι ώστε το σύστημα $AX = C$ να μην έχει λύση και να βρείτε έναν πίνακα C έτσι ώστε το σύστημα $AX = C$ να μην είναι συμβατό.

2. – Αν ο πίνακας A είναι 2×3 ποιές είναι οι δυνατές διαστάσεις του $null(A)$; Δώστε από ένα παράδειγμα στη κάθε περίπτωση.
– Να βρείτε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ kx_1 + \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

γιά όλες τις δυνατές τιμές των k και λ.

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

1. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix}.$$

– α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με $2i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
– β) Να βρείτε τους ιδιοχώρους του A.
– γ) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακας P και έναν διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε $D = P^{-1}AP$.

2. – Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : V \to V$ και έστω ότι το v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή 3 και ότι το v_2 είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή 4. Να αποδείξετε αναλυτικά ότι τα διανύσματα v_1 και v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
– Αν το 3 είναι ιδιοτιμή για τον πίνακα A να δείξετε ότι το 27 είναι ιδιοτιμή για τον πίνακα A^3.

- Έστω $A \in M_n(K)$ και λ είναι μία ιδιοτιμή του A. Να αποδείξετε ότι $\lambda^3 - 2\lambda + 1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A^3 - 2A + I_4$.
- Να δώσετε συνθήκες για τα $a, b, c \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

να είναι διαγωνιοποιήσιμος.

3. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική συνάρτηση που περιστρέφει τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ γύρω από την ευθεία που ορίζεται από το v_1 με γωνία περιστροφής $\theta = \pi/9$ και κατόπιν τα πολλαπλασιάζει με το 2. Χωρίς να υπολογίσετε τον πίνακα της ϕ να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα της ϕ και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Είναι η ϕ διαγωνιοποιήσιμη; Είναι η ϕ ορθογώνια;

4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική συνάρτηση που αντικατοπτρίζει τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ ως προς το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα v_2, v_3. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους της f. Είναι η f διαγωνιοποιήσιμη; Είναι η f ορθομοναδιαία;

5.
- Να βρείτε ενδομορφισμό με ιδιοτιμές 1 και 2 και ανίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(1, -1)$ και $(2, 1)$.
- Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A \in M_3(\mathbb{C})$ είναι το πολυώνυμο $c(x) = x^3 + 5x^2 + x$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.
- Έστω D ο διαγώνιος πίνακας $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Έστω S αντιστρέψιμος πίνακας με στήλες $v1$, $v2$, $v3$, και $A = SDS^{-1}$. Είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος; Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.
- Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_3(\mathbb{R})$ έχει ιδιοτιμή το 1, με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να δώσετε, (αν είναι δυνατόν), ένα παράδειγμα ενός τέτοιου πίνακα A, έτσι ώστε :
  (1) το 1 να έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2
  (2) το 1 να έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1
  (3) το 1 να έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 0.

6. Έστω ότι $p_A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
- Να βρεθεί $\det(A)$.
- Να βρεθεί $\mathrm{Tr}(A)$.
- Να γράψετε τον πίνακα A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A.
- Να γράψετε τον πίνακα A^4 ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A.
- Να γράψετε τον πίνακα A^5 ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A.

7. Να διαγωνιοποιήσετε μοναδιαία τον αυτοπροσαρτημένο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

8. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
(2) Να βρεθούν οι ιδιοχώροι του A.
(3) Να βρεθεί αν είναι δυνατόν ορθογώνιος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε $D = P^{-1}AP$.
(4) Να γραφεί το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του A.

9. Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το πολυώνυμο $x^4 + 5x^3 + 2x + 3i$.

(1) Να γράψετε (χωρίς να υπολογίσετε) τον αντίστροφο του A σαν γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton.
(2) Αποδείξτε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ισούται με $3i$. Να βρεθεί το άθροισμα των ιδιοτιμών.
(3) Είναι ο A αυτοπροσαρτημένος; Αν ϕ είναι ο ενδομορφισμός που αντιστοιχεί στον A, είναι ο ϕ ισομετρία;

Εσωτερικό γινόμενο, Φασματικό Θεώρημα

1. Έστω $\langle\ ,\ \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τις τιμές $\langle e_1, e_1\rangle = 2$, $\langle e_1, e_2\rangle = 3$, $\langle e_1, e_3\rangle = -1$, $\langle e_2, e_2\rangle = 4$, $\langle e_2, e_3\rangle = 0$ και $\langle e_3, e_3\rangle = 1$ όπου $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ η συνήθης βάση. Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 0, 5)$. Να υπολογίσετε $\langle u, v\rangle$. Να υπολογίσετε γενικώτερα το $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\rangle$.

2.
- Θεωρούμε τον Ερμητιανό χώρο $\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Για τα στοιχεία $x = (1 + 2i, 2, 1 - i)$ και $y = (1 + i, -2, 1 - 2i)$ να υπολογίσετε τις τιμές $\langle x, y\rangle$ και $\|x\|$.
- Θεωρούμε τον Ερμητιανό χώρο $\mathbb{C}^2$ ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία $(w, 1)$ και $(w, -1)$ είναι ορθογώνια, όπου $w \in \mathbb{C}$ και $w^{2013} = 1$.
- Έστω V ένας Ερμητιανός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και v, u δύο στοιχεία του V έτσι ώστε $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ και $\langle\ u, v\rangle = 1 - i$. Να υπολογίσετε το $\|4u - v\|$.

3. Δίνεται το επίπεδο $U = S(\{v_1, v_2\})$ του $\mathbb{R}^3$, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, όπου $v_1 = (1, 0, 2)$ και $v_2 = (1, 1, 3)$.
- Να βρεθεί μία ορθογώνια βάση για το U.
- Να επεκταθεί σε ορθογώνια βάση για το $\mathbb{R}^3$.
- Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για το $U^{\perp}$.
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $(1, 2, 5)$ ως προς τη βάση του δεύτερου ερωτήματος.
- Να γράψετε το στοιχείο $(1, 2, 5)$ σαν άθροισμα ενός στοιχείου από το U και ενός στοιχείου από το $U^{\perp}$.
- Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του $(1, 2, 5)$ από το U.

4.
- Να βρείτε την προβολή του $v = (0, 1, i)$ πάνω στο διάνυσμα v_1.

– Έστω $U = \Gamma(A)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 & i \\ 1 & i & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο $U^\perp$.

– Να αποδείξετε ότι
  * $(V_1 + V_2 + V_3)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap V_3^\perp$.
  * $(V^\perp + W^\perp)^\perp = V \cap W$.

5. Έστω v_1, v_2, v_3 μία ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{C}^3$ και $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ η γραμμική συνάρτηση, που ορίζεται από τις σχέσεις $f(v_1) = -iv_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι μοναδιαία.

6. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ορθομοναδιαίος πίνακας. Να δείξετε ότι $|\det A| = 1$ και ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε $\lambda\overline{\lambda} = 1$.

7. – Να ελέγξετε αν η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x, y, z) = 1/\sqrt{2}(x+z, \sqrt{2}\ y, x - z)$ είναι μοναδιαία.

– Έστω $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (1, -1, -2)$. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορθογώνια συνάρτηση, και $f(u_1) = (0, \sqrt{2}, 0)$, $f(u_2) = (\sqrt{3}, 0, 0)$. Να υπολογίσετε όλες τις δυνατότητες για $f(u_3)$.

8. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\phi(x, y) = ((2+3i)x+5y, 4ix+2y)$.

– Να υπολογισθεί η ϕ^*.

– Έστω $v = (1, i)$. Να βρεθεί διάνυσμα $w \in \mathbb{C}^2$ έτσι ώστε $< \phi(u), v >=< u, w >$, $\forall u \in \mathbb{C}^2$. Να ελέγξετε την απάντηση σας για δύο u της επιλογής σας.

9. Έστω $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ ο ενδομορφισμός του Ερμητιανού χώρου $\mathbb{C}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τη σχέση $\phi(a, b, c) = (a + ic, b, -2a + b)$.

– α) Να βρεθεί $\phi^*(a, b, c)$.

– β) Να βρεθεί διάνυσμα w έτσι ώστε γιά κάθε $v \in \mathbb{C}^3$, να ισχύει

$$< (1, 0, i), \phi(v) >=< w, v > .$$

10. – Έστω $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση, δηλαδή $\phi = \phi^*$. Για ποιά k είναι η συνάρτηση $k\phi$ αυτοπροσαρτημένη; Έστω ότι $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ είναι επίσης αυτοπροσαρτημένη. Να αποφασίσετε αν $\psi + \phi$ είναι αυτοπροσαρτημένη.

– Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ να δείξετε ότι AA^* είναι αυτοπροσαρτημένος.

– Αν η $\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ είναι αυτοπροσαρτημένος να δείξετε αναλυτικά ότι $\lambda = 1 + 3i$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του ϕ.

11. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ με ιδιοτιμή $\lambda = 1 - 2i$.

– Να δείξετε ότι $\overline{\lambda} = 1 + 2i$ είναι ιδιοτιμή του A^*.

– Να αποφασίσετε αν θα μπορούσε $AA^* = I_n$.

– Να αποφασίσετε αν θα μπορούσε $A = A^*$

– Να κατασκευάσετε έναν τέτοιο πίνακα $A \in M_2(\mathbb{C})$ (με ιδιοτιμή $1-2i$) που να διαγωνιοποιείται μοναδιαία.

12. (1) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $< v_i, v_j >= 0$ αν $i \neq j$ ενώ $\|v_i\| = 2$ για $i = 1, 2, 3$. Έστω A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα v_i. Να αποδείξετε ότι $A^{-1} = 1/4A^T$.

(2) Να περιγράψετε το φασματικό θεώρημα.
(3) Αν A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αποδείξτε ότι A^3 είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.
(4) Έστω $A \in M_3(\mathbb{C})$ με ιδιοτιμές $1, \omega$ και ω^2 όπου $\omega^3 = 1$ και $\omega^2 \neq 1$. Να αποδείξετε ότι $A^3 = I_n$.

13. – α) Να βρείτε μία ορθογώνια βάση για τον υποχώρο U του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1, 2, 1)$ και $(1, 2, 3)$. Να βρείτε το $U^{\perp}$.
– β) Να δείξετε ότι αν η γραμμική συνάρτηση $\phi : V \to V$ των $\mathbb{R}$ διανυσματικών χώρων είναι ισομετρία, τότε οι ιδιοτιμές της είναι ± 1. Να αποδείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
– γ) Να αποδείξετε ότι αν ο ϕ είναι αυτοπροσαρτημένος, τότε οι ιδιοτιμές του ϕ είναι πραγματικοί αριθμοί.
– δ) Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές $1, \omega, \omega^2$ όπου $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$. Να αποδείξετε ότι $A^3 = I_3$. Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

14. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
– α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και τις ιδιοτιμές του A.
– β) Να βρείτε τους ιδιοχώρους του A.
– γ) Να βρείτε έναν ορθομοναδιαίο πίνακας P και έναν διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε $D = P^{-1}AP$.
– δ) Ποιά ιδιότητα του A εγγυάται ότι ο A διαγωνιοποιείται ορθομοναδιαία; Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $B = \lambda A$. Είναι ο B ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος;
– ε) Να γραφεί το διάνυσμα (a, b, c) σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του A.