

## Εισαγωγή στην Άλγεβρα

ΟΝΟΜΑ

ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΟΔΟΣ, 3 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2014

### Τμήμα Β Ομάδα II

**Οδηγίες:** Θα υπάρξει ΑΡΝΗΤΙΚΗ βαθμολογία. Για κάθε ερώτημα πρέπει να *κυκλώσετε* τη σωστή απάντηση. Το πρώτο θέμα έχει 1 μονάδα, όλα τα άλλα έχουν 3 μονάδες το καθένα.

1. Μία σχέση ισοδυναμίας  $\mathcal{R}$  στο σύνολο  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  είναι τέτοια ώστε  $b\mathcal{R}c$ ,  $a\mathcal{R}d$ ,  $e\mathcal{R}c$  και  $\mathcal{R}$  έχει τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας.

- (Α) Υπάρχουν ακριβώς 2 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.
- (Β) Υπάρχουν ακριβώς 3 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.
- (Γ) Υπάρχουν ακριβώς 4 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.
- (Δ) Υπάρχουν ακριβώς 5 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

2. Στο σύνολο  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{2}, a \equiv c \pmod{4}$$

- Η κλάση ισοδυναμίας του  $(0, 0)$  είναι το σύνολο  $\{(4k, m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$  και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας έχει ακριβώς 4 στοιχεία.
- Η κλάση ισοδυναμίας του  $(0, 0)$  είναι το σύνολο  $\{(2k, m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$  και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας έχει ακριβώς 4 στοιχεία.
- Η κλάση ισοδυναμίας του  $(0, 0)$  είναι το σύνολο  $\{(2k, m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$  και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι άπειρο και αριθμήσιμο.
- Η κλάση ισοδυναμίας του  $(0, 0)$  είναι το σύνολο  $\{(2k, 4m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$  και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας έχει ακριβώς 8 στοιχεία.
- Η κλάση ισοδυναμίας του  $(0, 0)$  είναι το σύνολο  $\{(2k, 4m) : k, m \in \mathbb{Z}\}$  και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι άπειρο και αριθμήσιμο.

3. Να αποδείξετε αναλυτικά με μαθηματική επαγωγή ότι  $5n < 5 \cdot 2^n$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .

**Απόδειξη**

4. Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{18} \notin \mathbb{Q}$ .

**Απόδειξη**