

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Όγδοο σετ Ασκήσεων Τμήμα Β

1. Να αποδείξετε ότι $\delta(a, b) = (8a, 8b)$.
2. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του 6^{444} με τον 37 και του 13^{2015} με τον 168.
3. Να βρεθούν τα τελευταία δύο ψηφία του 99^{2998} και του 99^{2377} .
4. Να βρείτε όλες τις λύσεις της ισοδυναμίας $6x + 5 \equiv 3 \pmod{25}$. Να βρείτε όλες τις λύσεις της ισοδυναμίας $4x \equiv 6 \pmod{10}$.
5. Να βρεθεί φυσικός αριθμός $t > 1$ έτσι ώστε $n^t \equiv 1 \pmod{8}$ για κάθε φυσικό αριθμό n έτσι ώστε $(n, 8) = 1$.
6. Να αποδείξετε ότι $1105^{4n} \equiv 1 \pmod{11}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι 11 διαιρεί $2^{10n} - 1105^{4n}$.
7. Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μπορεί να είναι πίνακες πολλαπλασιασμού ομάδας $G = \{a, b, c\}$;

$$A_1 = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & c & a & b \\ c & b & c & a \end{array}, \quad A_3 = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ b & c & a & b \\ c & a & b & c \end{array}$$

8. Έστω G το δυναμοσύνολο του $S = \{1, 2, 3\}$ με πράξη $*$ ορισμένη ως εξής: αν $A, B \in G$ τότε $A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Να κάνετε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G και να αποφασίσετε αν είναι ομάδα.
9. Πόσες ομάδες υπάρχουν (με προσέγγιση ισομορφίας) με 4 στοιχεία;
10. Έστω $G = \{e, a, b, c\}$ μία ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e , όπου $a^2 = e$ ενώ $b^2 \neq e$. Να αποφασίσετε ποιες από τις παρακάτω απαντήσεις είναι σωστές.
 - (Α) Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να αποφασίσουμε αν $c^2 = e$ ή $c^2 \neq e$.
 - (Β) $b^3 = c$.
 - (Γ) Υπάρχει ένας ισομορφισμός ανάμεσα στη G και στη \mathbb{Z}_3 .
 - (Δ) Υπάρχει ισομορφισμός ανάμεσα στη G και στη \mathbb{Z}_4 .

XX 13-12-14