Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγη στην Αλγεβρα
Έβδομο σετ Ασκήσεων
Τμήμα Β

1. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν n διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί $k+1, \ldots, k+n$ που δεν είναι πρώτοι.

   (Υπόδειξη Να θέσετε $k = (n+1)! + 1$.)

2. Να δείξετε ότι για κάθε n υπάρχει ένας πρώτος p έτσι ώστε $n < p \leq n! + 1$.

   (Υπόδειξη Να χρησιμοποιήσετε την ιδέα της απόδειξης ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι για όλους τους πρώτους μικρότερους ή ίσους του n.)

3. Να δείξετε ότι αν $(a, b) = 1$ και $a|bc$ τότε $a|c$.

   (Υπόδειξη Ταυτότητα του Bezout για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη.)

4. Να αποδείξετε ότι αν $2^n + 1$ είναι πρώτος, τότε ο n είναι δύναμη του 2. (Η συνθήκη αυτή για το n είναι αναγκαία, όχι όμως και ικανή).

   (Υπόδειξη Αν n δεν είναι δύναμη του 2, τότε υπάρχει κάποιος περιττός πρώτος k που διαιρεί το n. Γνωρίζετε κάποια ταυτότητα για το άθροισμα $a^k + b^k$ όταν το k είναι περιττός;)

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n > 1$ ο αριθμός $n^4 + 4$ είναι σύνθετος.

   (Υπόδειξη Να εξετάσετε τις διάφορες περιπτώσεις των υπολοίπων του n, διαίρεση με το 5.)

6. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών a, b είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός m έτσι ώστε $a|m$ και $b|m$ και συμβολίζεται με $[a, b]$. Να βρείτε $[125, 55]$ και $(125, 55)$ και τη σχέση τους με το γινόμενο $125 \cdot 55$.

7. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ ενώ $b = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ όπου p_i πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους, ενώ $n_i \geq 0$. Να αποδείξετε ότι

   $$(a, b) = p_1^{\min(n_1, k_1)} \cdots p_s^{\min(n_s, k_s)}, \quad [a, b] = p_1^{\max(n_1, k_1)} \cdots p_s^{\max(n_s, k_s)} .$$

   Να δείξετε

   $$(a, b)[a, b] = ab .$$

   Να υπολογίσετε $[1234567, 1234569]$

XX 28-11-14