

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Έβδομο σετ Ασκήσεων
Τμήμα Β

1. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν n διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί $k + 1, \dots, k + n$ που δεν είναι πρώτοι.
2. Να δείξετε ότι για κάθε n υπάρχει ένας πρώτος p έτσι ώστε $n < p \leq n! + 1$.
3. Να δείξετε ότι αν $(a, b) = 1$ και $a|bc$ τότε $a|c$.
4. Να αποδείξετε ότι αν $2^n + 1$ είναι πρώτος, τότε ο n είναι δύναμη του 2. (Η συνθήκη αυτή για το n είναι αναγκαία, όχι όμως και ικανή).
5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n > 1$ ο αριθμός $n^4 + 4$ είναι σύνθετος.
6. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών a, b είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός m έτσι ώστε $a|m$ και $b|m$ και συμβολίζεται με $[a, b]$. Να βρείτε $[125, 55]$ και $(125, 55)$ και τη σχέση τους με το γινόμενο $125 \cdot 55$.
7. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ ενώ $b = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ όπου p_i πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους, ενώ $n_i \geq 0$. Να αποδείξετε ότι

$$(a, b) = p_1^{\min(n_1, k_1)} \cdots p_s^{\min(n_s, k_s)}, \quad [a, b] = p_1^{\max(n_1, k_1)} \cdots p_s^{\max(n_s, k_s)} .$$

Να δείξετε

$$(a, b)[a, b] = ab .$$

Να υπολογίσετε $[1234567, 1234569]$