Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγη στην Αλγεβρα
Έκτο σετ Ασκήσεων
Τμήμα B

1. Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 1234 και 23456 εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $(a, b) = 9$ και $a + b = 102346$. Αν $(a, b) = 14$ να βρείτε όλους τους ακεραίους $c \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε να υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ με την ιδιότητα $ax + by = c$.

3. Να βρεθούν δυάδες ακεραίων (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) έτσι ώστε $(1234, 23456) = 1234x_i + 23456y_i$.

4. Θέλουμε να αποφασίσουμε αν ο $10^6 - 3$ είναι πρώτος: πως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αποτελεσματικά τη διαίρεση και το κόσκινο του Ερατοσθένη;

5. Πόσοι πρώτοι υπάρχουν της μορφής $a^3 - 1$;

6. Έστω ότι $p, p + 2, p + 4$ είναι πρώτοι. Ποιος είναι ο p;

7. Έστω ότι p είναι πρώτος και ότι $p = 6k + r$ όπου r το υπόλοιπο από τον αλγόριθμο διάιρεσης. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να έχει το r.

8. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n + 3$.

9. (Η παρακάτω άσκηση δίνεται ως πρόκληση για περαιτέρω σκέψη και παραμένει ανοιχτή ως το τέλος του εξαμήνου.) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n + 1$. (<u>Υπόδειξη</u> Αν p περιττός πρώτος και $p|(x^2 + 1)$ τότε p είναι της μορφής $4n + 1$. Στη συνέχεια αν $p_1, \ldots, p_n$ είναι πρώτοι της μορφής $4n+1$ τότε να θεωρήσετε τον αριθμό $x = p_1 \cdots p_n$.)

XX 21-11-14