

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Τέταρτο σετ Ασκήσεων Τμήμα Β

1. Στο σύνολο \mathbb{Z} θεωρούμε τη σχέση

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \text{ και } a \equiv b \pmod{4}.$$

Να δείξετε ότι \mathcal{R} είναι σχέση ισοδυναμίας. Να περιγράψετε $\bar{0}$. Να δείξετε ότι υπάρχουν 12 κλάσεις ισοδυναμίας.

2. Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ θεωρούμε τη σχέση :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{3}, b \equiv d \pmod{4}$$

Να αποδείξετε ότι η \mathcal{R} είναι σχέση ισοδυναμίας. Να αποφασίσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς εξηγώντας το γιατί.

(α') $(0, 3), (1, 5)$ ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας

(β') Η κλάση ισοδυναμίας του $(0, 0)$ είναι το σύνολο $\{(3k, 4n) : k, n \in \mathbb{Z}\}$

(γ') Υπάρχουν άπειρες κλάσεις ισοδυναμίας.

(δ') Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(ε') Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο.

3. Να αποφασίσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς εξηγώντας το γιατί.

(A) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(B) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

4. Δεχόμενοι ότι 23 είναι πρώτος αριθμός να δείξετε ότι $\sqrt{23} \notin \mathbb{Q}$. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.
Να δείξετε ότι $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

5. Να βρείτε το λάθος στη παρακάτω απόδειξη της (μη αληθούς) πρότασης *Όλα τα άλογα του κόσμου έχουν το ίδιο χρώμα.*

Απόδειξη Θα εφαρμόσουμε μαθηματική επαγωγή στον αριθμό n των αλόγων. Για $n = 1$ η πρόταση είναι αληθής. Έστω ότι η πρόταση αληθής για k άλογα, (δηλ. έχουν όλα το ίδιο χρώμα). Θα δείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $k + 1$. Πράγματι, χωρίζουμε τα $k + 1$ άλογα σε δύο ομάδες: η πρώτη έχει τα πρώτα k άλογα, ενώ η δεύτερη έχει τα τελευταία k άλογα. Οι δύο αυτές ομάδες έχουν βέβαια κάποια κοινά άλογα. Τα άλογα της πρώτης ομάδας έχουν το ίδιο χρώμα, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής. Τα άλογα της δεύτερης ομάδας έχουν επίσης το ίδιο χρώμα για τον ίδιο λόγο. Αφού οι δύο ομάδες έχουν κάποιο κοινό άλογο έπεται ότι και τα $k + 1$ άλογα έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως σύμφωνα με την μαθηματική επαγωγή *Όλα τα άλογα του κόσμου έχουν το ίδιο χρώμα.*

6. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{2n+1} + 1$ διαιρείται από τον αριθμό 3 για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n .

XX 24-10-14