Προβολικές και Εμβολικές Επιλύσεις

Η κατηγορία μας $\mathbb{A}$ είναι αβελιανή. Πρώτο παράδειγμα μιάς αβελιανής κατηγορίας είναι η κατηγορία των R-modules. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η κατηγορία των συμπλόκων και αλυσιδωτών απεικονίσεων σε μία αβελιανή κατηγορία. Η αβελιανή κατηγορία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(A, B)$ είναι αβελιανή ομάδα,
(2) η σύνθεση μορφισμών έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς τη πρόσθεση,
(3) η κατηγορία μας έχει το ίδιο αρχικό και τελικό αντικείμενο που το αποκαλούμε 0,
(4) το ευθύ γινόμενο υπάρχει
(5) γία κάθε μορφισμό έχουμε την έννοια του πυρήνα της εικόνας και του συνπυρήνα.

Σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\_\_, B)$ και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(A, \_\_)$ είναι αριστερά ακριβείς τελεστές. Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ είναι ακριβής ακολουθία τότε $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(E, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(G, B)$ είναι ακριβής όπως και η ακολουθία $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(A, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(A, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(A, E)$.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό ενός προβολικού αντικειμένου.

Ορισμός 0.1. *Το αντικείμενο P της κατηγορίας $\mathbb{A}$ είναι* **προβολικό**, *(projective) αν δοθέντων μορφισμών $\gamma : P \longrightarrow C$ και $g : B \longrightarrow C$ (επι), τότε υπάρχει μορφισμός $\beta : P \longrightarrow B$ που να ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα ανύψωσης, (lifting property):*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl] \arrow[d, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Κάθε ελεύθερο R-module F είναι προβολικό. Πράγματι και γιά να ορίσουμε τη β αρκεί να ορίσουμε την εικόνα των στοιχείων της βάσης του F. Έστω e_i μέλος μίας βάσης του F. Διαλέγουμε ένα στοιχείο b_i έτσι ώστε $g(b_i) = \gamma(e_i)$, και ορίζουμε $\beta(e_i) = b_i$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Υπάρχουν προβολικά R-modules που δεν είναι ελεύθερα, όπως το $\mathbb{Z}_6$-module $<2>$.

Απευθείας από τον ορισμό βλέπουμε ότι το αντικείμενο P είναι προβολικό εάν και μόνο εάν $\mathrm{Hom}(\_\_, P)$ είναι ακριβής τελεστής και από τα δεξιά.

Πρόταση 0.2. *Ένα R-module είναι προβολικό εάν και μόνο εάν είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου R-module.*

Απόδειξη. Έστω ότι $P \oplus K = F$ ένα ελεύθερο R-module, $\mathfrak{p}$ η προβολή $P \oplus K \longrightarrow P$, και $\gamma : P \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ (επιμορφισμός). Τότε υπάρχει β' που να ανυψώνει τον $\gamma\mathfrak{p}$, δηλαδή $g\beta' = \gamma\mathfrak{p}$ και το διάγραμμα να γίνεται αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
 & P \oplus K \arrow[d, "\mathfrak{p}"] & \\
 & P \arrow[d] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε $\beta = \beta'|_P$.

Γιά την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι το P είναι προβολικό. Θεωρούμε F, το ελεύθερο R-module με βάση τα στοιχεία του P. Τότε έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d, "id_P"] & \\ F \arrow[r, "\pi"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

δηλαδή $\pi\beta = id_P$. Αν K είναι ο πυρήνας του π, τότε η ακολουθία $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i_K} F \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ είναι διαιρετά ακριβής, (split exact). Έχουμε λοιπόν αντιμεταθετικότητα στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "id_K"] & P \bigoplus K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d, "id_P"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i_K"] & F \arrow[r, "\pi"] & P \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

όπου $f(p,k) = \beta(p) + i_K(k)$. Το Λήμμα του Φιδιού μας δίνει ότι f είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 0.3. *Λέμε ότι η κατηγορία μας $\mathbb{A}$ έχει* **αρκετά** *προβολικά αντικείμενα αν γιά κάθε αντικείμενο A υπάρχει ένα προβολικό P και ένας επιμορφισμός $\epsilon : P \longrightarrow A \longrightarrow 0$.*

Όταν η αβελιανή κατηγορία έχει αρκετά προβολικά, τότε κάθε αντικείμενο έχει μία **προβολική επίλυση**, (projective resolution), δηλαδή ένα σύμπλοκο $P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0$ μαζί με έναν μορφισμό $\epsilon : P_0 \longrightarrow M$ έτσι ώστε η ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$$

να είναι ακριβής και τα P_i να είναι προβολικά.

Πράγματι δημιουργούμε αυτό το σύμπλοκο ξεκινώντας με το προβολικό P και τον επιμορφισμό $\epsilon : P \longrightarrow A \longrightarrow 0$. Έστω K_1 ο πυρήνας του ϵ. Στη συνέχεια πέρνουμε το προβολικό P_1 και τον επιμορφισμό $\delta_1 : P_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$ και ορίζουμε $d_1 : P_1 \longrightarrow P_0$ την σύνθεση $d_1 = i_K \delta$. Συνεχίζουμε κατά αυτόν τον τρόπο.

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, dashed] & P_1 \arrow[dr] & \arrow[r, dashed] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

Έστω ότι $(P_\bullet, d_\bullet)$ είναι μία προβολική επίλυση του M και $K_i = \operatorname{Ker} d_i$. Αν περικόψουμε το σύμπλοκο στο n βήμα, (δηλαδή $P_i = 0, \forall i \leq n$) τότε το καινούριο αυτό σύμπλοκο είναι η προβολική επίλυση K_i. Το αντίστροφο ισχύει επίσης: αν έχουμε μία ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ όπου τα P_i είναι προβολικά και $Q_\bullet$ είναι μία προβολική επίλυση του K_n τότε το ακόλουθο είναι μία προβολική επίλυση του M: $\cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$.

Θεώρημα 0.4. ***Θεώρημα Σύγκρισης*** *Έστω $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M$ και $Q_\bullet \xrightarrow{\eta} N$ προβολικές επιλύσεις του M και N, και έστω $f' : M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός από το M στο N. Τότε υπάρχει αλυσιδωτή απεικόνιση $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ που ανυψώνει την f', δηλαδή $f'\epsilon = \eta f_0$. Αν g. είναι μία άλλη τέτοια ανύψωση, τότε οι f, g είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη.

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d'_2"] & Q_1 \arrow[r, "d'_1"] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Μιάς και το P_0 είναι προβολικό και $Q_0 \xrightarrow{\eta} N \longrightarrow 0$, ο μορφισμός $f'\epsilon : P_0 \longrightarrow N$ ανυψώνεται σε μορφισμό $f_0 : P_0 \longrightarrow Q_0$.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $f_0|_{\mathrm{Ker}\,\epsilon} : \mathrm{Ker}\,\epsilon \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\eta$. Ακόμα έχουμε ότι $d_1 : P_1 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}\,\epsilon$ και ανάλογα $Q_1 \xrightarrow{d_1} \mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}\,\eta \longrightarrow 0$. Επομένως ο μορφισμός $f_0|_{\mathrm{Ker}\,\epsilon} d_1 : P_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\eta$, ανυψώνεται σε μορφμισμό $f_1 : P_1 \longrightarrow P_0$.

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο. Μένει να αποδείξουμε ότι η f είναι μοναδική με προσέγγιση ισομορφίας.

Αν g είναι μία άλλη ανύψωση, τότε η $f-g$ είναι αλυσιδωτή απεικόνιση. Γιά κάθε βήμα n ισχύει:

$$\begin{tikzcd}
Q_{n+1} \arrow[dr] & & Q_n \\
& B_n(Q) = Z_n(Q) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

Γιά $n=0$, $f_0 - g_0 : P_0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\eta$ και s_0 είναι ο μορφισμός που κάνει το διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
& P_0 \arrow[dl] \arrow[d, "f_0 - g_0"] & \\
Q_1 \arrow[r, "d'"] & \mathrm{Ker}\,\eta \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιούμε επαγωγή. Υποθέτουμε ότι έχουν βρεθεί μορφισμοί έτσι ώστε $f_{n-1} g_{n-1} = s_{n-2} d_{n-1} + d'_n s_{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $[(f_n - g_n) - s_{n-1} d_n](P_n)$ ανήκει στον πυρήνα του $d'n$. Πράγματι $d'_n[(f_n - g_n) - s_{n-1} d_n] = d'_n(f_n - g_n) - ((f_{n-1} - g_{n-1}) + s_{n-2} d_{n-1}) d_n = (d'_n(f_n - g_n) - ((f_{n-1} - g_{n-1}) d_n) + s_{n-2} d_{n-1} d_n = 0 + 0 = 0$. Έτσι θέτουμε s_n τον μορφισμό που κάνει αντιμεταθετικό το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& P_n \arrow[dl] \arrow[d] & \\
Q_{n+1} \arrow[r, "d'"] & Z_n(Q) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Θεώρημα 0.5. *Το Λήμμα του πετάλου, (Horseshoe Lemma). Έστω η ακριβής ακολουθία* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i_{A'}} A \xrightarrow{\pi_{A''}} A'' \longrightarrow 0$ *και έστω ότι* $P'_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon'} A' \longrightarrow 0$ *είναι μία προβολική επίλυση του* A' *ενώ* $P''_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon''} A'' \longrightarrow 0$ *είναι μία προβολική επίλυση του* A''. *Τότε μπορούμε να βρούμε διαφορικά* $d_n : P_n = P'_n \oplus P''_n \longrightarrow P'_{n-1} \oplus P''_{n-1}$ *έτσι ώστε* $P_{\bullet}$ *να είναι μία προβολική επίλυση του* A *και*

$$\begin{tikzcd}
& \arrow[d] & & \arrow[d] & & \\
& P'_0 \arrow[r, "i_{P'_0}"] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\pi_{P''_0}"] \arrow[d] & \arrow[d] & P''_0 & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i_{A'}"] & A \arrow[r, "\pi_{A''}"] & \; \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πως θα βρούμε τον επιμορφισμό $\epsilon : P'_0 \oplus P''_0 \longrightarrow A$. Η προβολική επίλυση θα χτιστεί επαναλαμβάνοντας αυτά τα βήματα.

Μιάς και το P''_0 είναι προβολικό υπάρχει μορφισμός l έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& P''_0 \arrow[dl] \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "\pi_{A''}"] & A'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε $\epsilon : P_0' \oplus P_0'' \longrightarrow A$ ως εξής: $\epsilon(a,b) = i_{A'}\epsilon'(a) + l(b)$.

Έτσι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_0' & \xrightarrow{i_{P_0'}} & P_0' \oplus P_0'' & \xrightarrow{\pi_{P_0''}} & P_0'' & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i_{A'}} & A & \xrightarrow{\pi_{A''}} & & \longrightarrow 0 \end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Φιδιού. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Coker}\epsilon' = \mathrm{Coker}\epsilon'' = 0$ αφού ϵ' και ϵ'' είναι επιμορφισμοί. Αφού $\mathrm{Coker}\epsilon' \longrightarrow \mathrm{Coker}\epsilon \longrightarrow \mathrm{Coker}\epsilon''$ και $\mathrm{Coker}\epsilon$ έχει παγιδευθεί ανάμεσα σε δύο μηδενικά αντικείμενα, είναι και το ίδιο μηδενικό. Επομένως ϵ είναι επιμορφισμός.

Παρατηρούμε ότι αν περικόψουμε τα σύμπλοκα P' και P'' στο 0, τότε έχουμε προβολικές επιλύσεις γιά $\ker \epsilon'$ και $\ker \epsilon''$ αντίστοιχα. Το Λήμμα του Φιδιού μας δίνει την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker \epsilon' \longrightarrow \ker \epsilon \longrightarrow \mathrm{Ker}\, \epsilon'' \longrightarrow 0.$$

Έτσι επαναλαμβάνουμε τη προηγούμενη διαδικασία.

Θα δούμε τώρα τις δυικές έννοιες, των εμβολικών αντικειμένων και επιλύσεων. Όπως πάντα δουλεύουμε μέσα σε μία αβελιανή κατηγορία.

Ορισμός 0.6. *Το αντικείμενο E είναι* **εμβολικό**, *(injective) αν δοθέντων μορφισμών $\gamma : A \longrightarrow E$ και $f : A \longrightarrow B$ (μονο), τότε υπάρχει μορφισμός $\beta : B \longrightarrow E$ που να ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα επέκτασης, (extension property):*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow & & \swarrow \\ & & I & & \end{array}$$

Λέμε ότι η κατηγορία μας $\mathbb{A}$ έχει **αρκετά** εμβολικά αντικείμενα αν γιά κάθε αντικείμενο A υπάρχει ένα εμβολικό I και ένας μονομορφισμός $0 \longrightarrow A \longrightarrow I$.

Αν η κατηγορία έχει αρκετά εμβολικά τότε κάθε αντικείμενο A έχει μία **εμβολική επίλυση**, δηλαδή ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο $I^\bullet : I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$ μαζί με έναν μορφισμό $\alpha : A \longrightarrow I^0$ έτσι ώστε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

να είναι ακριβής και τα I^i να είναι εμβολικά. Ξεκινάμε με το εμβολικό αντικείμενο I^0 και τον μονομορφισμό $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} I^0$. Έστω C^1 ο συνπυρήνας του α, $C^1 = I^0 / \operatorname{Im} \alpha$ και π η κανονική προβολή $\pi : I^0 \longrightarrow I^0 / \operatorname{Im} \alpha$. Στη συνέχεια πέρνουμε το εμβολικό I^1 και τον μονομορφισμό $\delta^1 : C^1 \longrightarrow I^1$ και ορίζουμε $d_1 : I^0 \longrightarrow I^1$ την σύνθεση $d_1 = \delta^1 \pi$. Συνεχίζουμε κατά αυτόν τον τρόπο.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \dashrightarrow & & I^1 & \dashrightarrow \\ & & & & \searrow & \nearrow & & \\ & & & & C^1 & & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & & \\ & & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι τα εμβολικά αντικείμενα στην $\mathbb{A}$ είναι ακριβώς τα προβολικά αντικείμενα στην $\mathbb{A}^{op}$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το αντικείμενο E είναι εμβολικό εάν και μόνο εάν $\mathrm{Hom}(E, \_\_)$ είναι ακριβής τελεστής και από τα δεξιά.

Πρόταση 0.7. *Το ευθύ γινόμενο εμβολικών αντικειμένων είναι εμβολικό.*

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από την καθολική ιδιότητα του ευθέος γινομένου και το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\
 & \prod E_i \arrow[d] & \\
 & E_i &
\end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία **R-mod** έχει αρκετά εμβολικά. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η κατηγορία **Ab** έχει αρκετά εμβολικά. Γιά αυτό θα χρειαστούμε το κριτήριο του Baer και το πόρισμα του γιά διαιρετέα R-modules.

Πρόταση 0.8. *Το κριτήριο του Baer. Έστω E ένα (δεξί) R-module. Το E είναι εμβολικό αν και μόνο αν γιά κάθε (δεξί) ιδεώδες J του R, κάθε ομομορφισμός $J \longrightarrow E$ μπορεί να επεκταθεί σε ομομορφισμό $R \longrightarrow E$.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r, "i_J"] \arrow[d] & R \arrow[dl] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής.
Γιά την δεύτερη κατεύθυνση, έστω ότι έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{(A', \alpha')\}$ όπου A' είναι υπο-module του R που περιέχει το A και α' είναι μία επέκταση του α. Δίνουμε σε αυτό το μη κενό σύνολο μία μερική διάταξη, θέτοντας $(A_1, \alpha_1) \leq (A_2, \alpha_2)$ αν $A_1 \subseteq A_2$ και α_2 είναι μία επέκταση της α_1. Κάθε αλυσίδα του S έχει άνω όριο, (ποιό;), και σύμφωνα με το Λήμμα του Zorn το σύνολο S έχει μέγιστο στοιχείο, (C, γ). Θα δείξουμε ότι $C = B$.

Έστω ότι $C \neq B$ και $b \in B, b \notin C$. Το σύνολο $J = \{r | br \in C\}$ είναι (δεξί) ιδεώδες του R, οπότε η σύνθεση $\gamma b : J \xrightarrow{b} C \xrightarrow{\gamma}$ μπορεί να επεκταθεί σε ομομορφισμό $f : R \longrightarrow E$ έτσι ώστε $fi = \gamma b$. Θέτουμε $C' = C + bR$, και ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma' : C' \longrightarrow E$ ως $\gamma'(a + br) = \gamma(a) + f(r)$. Η γ' είναι καλά ορισμένη: $a_1 + br_1 = a_2 + br_3 \Rightarrow a_1 - a_2 = b(r_2 - r_1) \Rightarrow r_2 - r_1 \in J$ και $\gamma'(a_1 - a_2)\gamma'(b(r_2 - r_1)) = f(r_2 - r_1) \Rightarrow \gamma'(a_1) - \gamma'(a_2) = f(r_2) - f(r_1)$. Έπεται ότι η γ' είναι ομομορφισμός και επέκταση της γ και της α. Αυτό μας δίνει το ζητούμενο άτοπο γιατί (C, γ) είναι γνήσια μικρότερο του (C', γ').

Το R-module E λέγεται **διαιρετέο**, (divisible), εάν γιά κάθε στοιχείο $r \in R$ και $a \in E$ υπάρχει ένα στοιχείο $b \in E$ έτσι ώστε $a = rb$.

Πόρισμα 0.9. *Έστω R μία ακεραία περιοχή κυρίων ιδεωδών. Τότε το R-module A είναι εμβολικό εάν και μόνο εάν το E είναι διαιρετέο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το E είναι εμβολικό και $r \in R$, $a \in E$. Θεωρούμε το ιδεώδες $J = (r)$ και τη συνάρτηση $f : J \longrightarrow E$, $f(sr) = sa$. Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη μίας και R είναι ακεραία περιοχή και μάλιστα η f είναι ομομορφισμός. Επεκτείνεται λοιπόν σε έναν ομομορφισμό $f' : R{\longrightarrow}E$. Η εικόνα $f'(1)$ είναι το ζητούμενο b μιάς και $a = f'(r) = rf'(1)$.

Αντίστροφα αν J είναι ιδεώδες του R και $f : J{\longrightarrow}E$ τότε το J είναι κύριο ιδεώδες, $J = (r)$ και η f ορίζεται πλήρως από την εικόνα $f(r) = a$. Μιάς και E είναι διαιρετέο υπάρχει b έτσι ώστε $a = rb$ και ορίζουμε $f : R{\longrightarrow}E$, $f(1) = b$.

Παραδείγματα 0.10. (1) $\mathbb{Q}$ *είναι διαιρετέα αβελιανή ομάδα και εμβολικό αντικείμενο στην κατηγορία* **Ab**.

(2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *είναι εμβολικό αντικείμενο στην κατηγορία* **Ab**.

Θεώρημα 0.11. *Η κατηγορία* **Ab** *έχει αρκετά εμβολικά.*

Απόδειξη. Έστω A μία αβελιανή ομάδα και θεωρούμε την εμβολική ομάδα $I(A)$ που είναι το ευθύ γινόμενο $\prod_S \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ όπου S είναι $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Έχουμε επίσης και τον κανονικό ομομορφισμό $e_A : A{\longrightarrow}I(A)$ όπου $e_A(a) = (g(a))$, $g \in S$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός e_A είναι μονομορφισμός. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι γιά κάθε $a \in A$ υπάρχει $g \in S$ έτσι ώστε $g(a) \neq 0$. Καταρχήν θα κατασκευάσουμε έναν μη μηδενικό ομομορφισμό $\mathbb{Z}a{\longrightarrow}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Παίρνουμε τον μηδενιστή του a στο $\mathbb{Z}$, J. Με άλλα λόγια $J = \{n \in \mathbb{Z} | na = 0\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{Z}a{\longrightarrow}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, όπου $f(a) = 1/2 + \mathbb{Z}$ αν $J = 0$ και $f(a) = 1/m + \mathbb{Z}$ αν $J = (m)$. Μιάς και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι εμβολικό f επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό $g : A{\longrightarrow}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Θα δείξουμε τώρα ότι η κατηγορία **R-mod** έχει αρκετά εμβολικά. Γιά την απόδειξη θα κάνουμε μία σειρά παρατηρήσεων.

(1) Έστω I μία αβελιανή ομάδα. Τότε η αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, I)$ είναι ένα R-module, όπου ο πολλαπλασιασμός $r \cdot f$ ορίζεται $(r \cdot f)(s) = f(rs)$.

(2) Έστω $\mathbb{L} : \textbf{R-mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$,ο επιλήσμων τελεστής και $\mathbb{R} : \mathbf{Ab} \longrightarrow \textbf{R-mod}$, ο τελεστής $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \_\_)$. Τότε $\mathbb{L}$, $\mathbb{R}$, είναι προσαρτημένοι τελεστές και

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\textbf{R-mod}}(M, \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)).$$

Ο ισομορφισμός τ ανάμεσα στα δύο R-modules ορίζεται ως εξής: έστω $f : M{\longrightarrow}I$. Τότε $\tau(f) : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)$ όπου $m{\longrightarrow}g_m$ και $g_m : R{\longrightarrow}I$, $g_m(r) = f(rm)$. Ο αντίστροφος ισομορφισμός στέλνει το $g : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)$ στον ομομορφισμό $f : M{\longrightarrow}I$, όπου $m{\longrightarrow}[g(m)](1)$.

(3) Έστω I μία εμβολική αβελιανή ομάδα. Τότε $\mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)$ είναι εμβολικό R-module. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Hom}_{\textbf{R-mod}}(\mathrm{Hom}_{Ab}(R, I), \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I))$ διατηρεί την ακρίβεια από τα δεξιά. Έστω $0{\longrightarrow}A{\longrightarrow}A'$ ένας μονομορφισμός R-modules. Τότε έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα όπου οι δύο κάθετοι ομομορφισμοί είναι κανονικοί ισομορφισμοί:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\textbf{R-mod}}(A', \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\textbf{R-mod}}(A, \mathrm{Hom}_{Ab}(R, I)) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A', I) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, I) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Έπεται ότι και ο ομομορφισμός της πρώτης σειράς είναι επί.

(4) $I_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι εμβολικό R-module. Έστω $S = \mathrm{Hom}_R(M, I_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Τότε

$$I(M) = \prod_S I_0$$

είναι εμβολικό R-module.

(5) Ο κανονικός ομομορφισμός $M \longrightarrow I(M)$ όπου $m \longrightarrow (g_m)$, $g \in S$ είναι μονομορφισμός. Πράγματι γιά κάθε m, υπάρχει ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\tilde{g} : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, έτσι ώστε $\tilde{g}(m) \neq 0$. Έπεται ότι αν $g = \tau(\tilde{g})$ τότε $g_m \neq 0$.

Έτσι κάθε R-module έχει μία εμβολική επίλυση.