Αριστερά και δεξιά παραγόμενοι τελεστές.

Θα ξεκινήσουμε με τους αριστερά παραγόμενους τελεστές. Γιά αυτό χρειαζόμαστε έναν τελεστή $\mathbb{F} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ έτσι ώστε να πληρούνται οι εξής ιδιότητες: οι κατηγορίες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ να είναι αβελιανές, η $\mathbb{A}$ να έχει αρκετά εμβολικά, ο τελεστής $\mathbb{F}$ να διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα καθώς και την ακρίβεια από τα δεξιά. Παρατηρούμε ότι αν $P_\bullet$ είναι σύμπλοκο, τότε και $F(P_\bullet)$ είναι σύμπλοκο. Έστω A ένα αντικείμενο της $\mathbb{A}$. Θα ορίσουμε το αντικείμενο $L_i(\mathbb{F}(A))$.

Ορισμός 0.1. *Έστω $P_\bullet$ μία προβολική επίλυση του A . Τότε $L_i\mathbb{F}(A) = H_i(\mathbb{F}(P))$.*

Θα αποδείξουμε ότι $L_i\mathbb{F}(\_\_) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ είναι ένας τελεστής. Πρώτα όμως θα δώσουμε κάποια παραδείγματα.

Παραδείγματα. Έστω $\mathbb{F} = \_\_ \otimes \mathbb{Z}_2 : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

(1) $A = \mathbb{Z}$. Μία προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ είναι $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. $L_0\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ και $L_i\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = 0$, $\forall i > 0$.

(2) $A = \mathbb{Z}_3$. Μία προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}_3$ είναι $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Τότε ο ομομορφισμός $3 \otimes id_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός και $L_i\mathbb{F}(\mathbb{Z}_3) = 0$, $\forall i$.

(3) $A = \mathbb{Z}_2$. Μία προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}_2$ είναι $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Τότε ο ομομορφισμός $2 \otimes id_{\mathbb{Z}_2} : Z \otimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός και $L_0\mathbb{F}(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $L_1\mathbb{F}(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ και $L_i\mathbb{F}(\mathbb{Z}_2) = 0$ $\forall i \geq 2$.

Μιάς και ο τελεστής $\mathbb{F}$ διατηρεί την ακρίβεια από τα δεξιά η ακολουθία $\mathbb{F}(P_1) \xrightarrow{\mathbb{F}d_1} \mathbb{F}(P_0) \longrightarrow \mathbb{F}(A) \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, οπότε $\mathbb{F}(A) = \operatorname{Coker} \mathbb{F}d_1 = \mathbb{F}(P_0)/\operatorname{Im} \mathbb{F}d_1$. Το τελευταίο ισούται με το $L_0\mathbb{F}(A)$ και έχουμε ότι $L_0\mathbb{F}(A) = \mathbb{F}(A)$.

Πρόταση 0.2. *Έστω ότι $Q_\bullet$ είναι μία άλλη προβολική επίλυση του A και ότι $\tilde{L}_i\mathbb{F}(A) = H_i\mathbb{F}(Q_\bullet)$. Τότε $L_i\mathbb{F}(A) \simeq \tilde{L}_i\mathbb{F}(A)$ και μάλιστα ο ισομορφισμός είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα της σύγκρισης υπάρχει μία αλυσιδωτή απεικόνιση $f : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ που ανυψώνει τον ταυτοτικό μορφισμό $i_A : A \longrightarrow A$. Μιάς και $\mathbb{F}$ είναι τελεστής $\mathbb{F}(id_A) = id_{\mathbb{F}(A)}$ και $\mathbb{F}(f) : \mathbb{F}(P_\bullet) \longrightarrow \mathbb{F}(Q_\bullet)$ είναι αλυσιδωτή απεικόνιση. Έπεται ότι υπάρχει μορφισμός $\mathbb{F}(f)_* : H_i(\mathbb{F}(P)) \longrightarrow H_i(\mathbb{F}(Q))$ ο οποίος είναι κανονικός, μιάς και δύο οποιαδήποτε ανυψώσεις ορίζουν τον ίδιο μορφισμό στην ομολογία..
Αντίστροφα αν $g : Q_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ είναι αλυσιδωτή απεικόνιση που ανυψώνει τον ταυτοτικό μορφισμό $i_A : A \longrightarrow A$ τότε υπάρχει μορφισμός $\mathbb{F}(g)_* : H_i(\mathbb{F}(Q)) \longrightarrow H_i(\mathbb{F}(P))$.
Έτσι η σύνθεση $gf : P_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ είναι αλυσιδωτή απεικόνιση που ανυψώνει τον ταυτοτικό μορφισμό $i_A : A \longrightarrow A$. Ο ταυτοτικός μορφισμός i_P είναι μία άλλη τέτοια ανύψωση. Επομένως gf, id_P είναι ομοτοπικές. Έπεται ότι $\mathbb{F}(gf) = \mathbb{F}(g)\mathbb{F}(f)$ και $id_{\mathbb{F}(P)} = \mathbb{F}(id_P)$ είναι επίσης ομοτοπικές και ορίζουν την ίδια συνάρτηση στην ομολογία, οπότε $(\mathbb{F}(gf))_* = \mathbb{F}(g)_*\mathbb{F}(f)_* = id_{\mathbb{F}(P)} : H_i\mathbb{F}(P) \longrightarrow H_i\mathbb{F}(P)$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\mathbb{F}(f)_*\mathbb{F}(g)_* = id_{\mathbb{F}(Q)} : H_i\mathbb{F}(Q) \longrightarrow H_i\mathbb{F}(Q)$. Έπεται ότι $\mathbb{F}(f)_*$ και $\mathbb{F}(g)_*$ είναι ισομορφισμοί.

Θεώρημα 0.3. *$L_i\mathbb{F}(\_\_) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ είναι τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω $f : A \longrightarrow A'$, $P_\bullet$, $P'_\bullet$ προβολικές επιλύσεις του A και A'. Τότε η f ανυψώνεται σε αλυσιδωτή απεικόνιση $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow P'_\bullet$ και έτσι $\mathbb{F}(f_\bullet) : \mathbb{F}(P_\bullet) \longrightarrow \mathbb{F}(P'_\bullet)$

είναι αλυσιδωτή απεικόνιση. Έπεται ότι έχουμε μορφισμό $\mathbb{F}(f)_* : L_i\mathbb{F}(A) \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A')$ ανεξάρτητο από την επιλογή της ανύψωσης $f_\bullet$.

Με το ίδιο σκεπτικό βλέπει κανείς ότι

- $L_i\mathbb{F}(id_A) = (id_{\mathbb{F}(P)})_* = id_{H_i(\mathbb{F}(P))} = id_{L_i\mathbb{F}(A)}$.
- $L_i\mathbb{F}(fg) = L_i\mathbb{F}(f)L_i\mathbb{F}(g)$.

Θα κάνουμε άλλη μία παρατήρηση σχετικά με τον τελεστή $L_i\mathbb{F}$. $L_i\mathbb{F}(f_1 + f_2) = L_i\mathbb{F}(f_1) + L_i\mathbb{F}(f_2)$. Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως τα παραπάνω.

Θεώρημα 0.4. *Έστω $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία. Τότε έχουμε τη μακριά ακριβή ακολουθία $\cdots \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A') \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A) \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A'') \xrightarrow{\theta} L_{i-1}\mathbb{F}(A') \longrightarrow \cdots$ όπου ο συνδετικός μορφισμός θ είναι φυσικός.*

Απόδειξη. Έστω $P'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} A'$, $P''_\bullet \xrightarrow{\epsilon''} A''$ προβολικές επιλύσεις του A' και A''. Σύμφωνα με το Λήμμα του Πετάλου μπορούμε να βρούμε μία προβολική επίλυση $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} A$ έτσι ώστε $0 \longrightarrow P'_\bullet \xrightarrow{i_P} P_\bullet \xrightarrow{\pi_{P''}} P''_\bullet \longrightarrow 0$ να είναι ακριβής ακολουθία. Θυμίζουμε ότι $P_n = P'_n \oplus P''_n$ οπότε $0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P_n \longrightarrow P''_n \longrightarrow 0$ είναι διαιρετά ακριβής και το διαφορικό $d_n : P_n = P'_n \oplus P''_n \longrightarrow P_{n-1} = P'_{n-1} \oplus P''_{n-1}$ ορίζεται από τη σχέση $d_n(p' + p'') = d'_n(p') + \phi_n(p'')$ όπου ϕ_n κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό και $\pi_{P''}|_{\mathrm{Ker}\, d_{n-1}}\phi_n = d''_n$:

$$\begin{array}{cccc} & & P''_n & \\ & \swarrow & \downarrow & \\ \mathrm{Ker}\, d_{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, d''_{n-1} & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Θα θέσουμε $\lambda_n^P = -d''_n + \phi_n$. Τότε εξετάζοντας τη σύνθεση $\pi_{P''}\lambda_n^P$, βλέπουμε ότι λ_n^P είναι μορφισμός από το $P''_n \longrightarrow$ στο P'_{n-1} και έτσι $d_n(p'+p'') = d'_n(p') + \lambda_n^P(p'') + d''_n(p'')$. (Όταν $n = 0$, $\lambda_0^P = \phi_o$.) Μία άλλη παρατήρηση που θα μας χρειαστεί στο τέλος είναι ότι μιάς και $d_{n-1}d_n(p'') = 0$ έπεται ότι $(d'\lambda_n + \lambda_{n-1}d'')(p) = 0$ και $d'\lambda_n + \lambda_{n-1}d''$ είναι ο μηδενικός μορφισμός.

Η ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{F}(P'_n) \longrightarrow \mathbb{F}(P_n) \longrightarrow \mathbb{F}(P''_n) \longrightarrow 0$ είναι επίσης διαιρετά ακριβής γιατί ο τελεστής $\mathbb{F}$ διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα και η ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{F}(P'_\bullet) \longrightarrow \mathbb{F}(P_\bullet) \longrightarrow \mathbb{F}(P''_\bullet) \longrightarrow 0$ είναι μία κοντή ακριβή ακολουθία συμπλόκων. Παίρνοντας τη μακριά ακριβή ακολουθία στην ομολογία βρίσκουμε τη ζητούμενη ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A') \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A) \longrightarrow L_i\mathbb{F}(A'') \xrightarrow{\theta} L_{i-1}\mathbb{F}(A') \longrightarrow \cdots .$$

Μένει να αποδείξουμε ότι θ είναι φυσικός μορφισμός. Δηλαδή αν έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

τότε το αντίστοιχο διάγραμμα στην ομολογία

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(A') & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(A) & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(A'') & \longrightarrow & L_{i-1}\mathbb{F}(A') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(B') & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(B) & \longrightarrow & L_i\mathbb{F}(B'') & \longrightarrow & L_{i-1}\mathbb{F}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό.

Επειδή όμως ο συνδετικός μορφισμός στη μακριά ακριβή ακολουθία της ομολογίας που προέρχεται από μία κοντή ακριβή ακολουθία συμπλόκων είναι φυσικός, αρκεί να αποδείξουμε ότι έχουμε προβολικές επιλύσεις $P'_\bullet, P_\bullet, P''_\bullet, Q'_\bullet, Q_\bullet, Q''_\bullet$ των αντίστοιχων αντικειμένων που να ταιριάζουν στο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_\bullet & \longrightarrow & P_\bullet & \longrightarrow & P''_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Q'_\bullet & \longrightarrow & Q_\bullet & \longrightarrow & Q''_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Διαλέγουμε προβολικές επιλύσεις $P'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} A'$, $P''_\bullet \xrightarrow{\epsilon''} A'$, $Q'_\bullet \xrightarrow{\eta'} B'$, $Q''_\bullet \xrightarrow{\eta''} B''$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Πετάλου βρίσκουμε προβολικές επιλύσεις $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} A$, $Q_\bullet \xrightarrow{\eta} B$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σύγκρισης παίρνουμε ανυψώσεις $F' : P'_\bullet \longrightarrow Q'_\bullet$ και $F : P''_\bullet \longrightarrow Q''_\bullet$ των f' και f''. Γιά να αποδείξουμε την αντιμεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος τώρα αρκεί να βρούμε μία αλυσιδωτή απεικόνιση $F : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ που να ανυψώνει την f και που να εγγυάται την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος.

Η αντιμεταθετικότητα του διάγραμματος θα προκύψει αρκεί να βρεθεί $\gamma_n : P''_n \longrightarrow Q'_n$ έτσι ώστε $F_n(p' + p'') = F'_n(p') + \gamma_n(p'') + F''_n(p'')$ και η F να είναι αλυσιδωτή. Θα το κάνουμε πρώτα γιά $n = 0$.

Θέλουμε να ορίσουμε γ_0 και F_0 έτσι ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{array}{rcc} P_0 = P'_0 \oplus P''_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_0 = Q'_0 \oplus Q''_0 & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Έτσι

$$\begin{array}{ccr} p'_0 + p''_0 & \longrightarrow & i_{A'}\epsilon'(p'_0) + \lambda_0^P(p''_0) \\ & & \downarrow \\ & & f i_{A'}\epsilon'(p'_0) + f\lambda_0^P(p''_0). \end{array}$$

Επίσης

$$\begin{array}{ccc} p'_0 + p''_0 & & \\ \downarrow & & \\ F'_0(p'_0) + \gamma_0(p''_0) + F''_0(p''_0) & \longrightarrow & i_{B'}\eta' F'_0(p'_0) + i_{B'}\eta'\gamma_0(p''_0) + \lambda_0^Q F''_0(p''_0). \end{array}$$

Μιάς και έχουμε $f i_{A'} = i_{B'} f'$ και $f'\epsilon' = \eta' F'_0$ (γιατι;), βλέπουμε ότι $f i_{A'}\epsilon' = (i_{B'} f')\epsilon' = i_{B'}(f'\epsilon') = i_{B'}\eta' F'_0$. Έτσι απομένει να βρούμε την $\gamma''_0 : P''_0 \longrightarrow Q'_0$ έτσι ώστε $f\lambda_0^P = i_{B'}\eta'\gamma_0 + \lambda_0^Q F''_0$ η $i_{B'}\eta'\gamma_0 = f\lambda_0^P - \lambda_0^Q F''_0$. Θα δείξουμε καταρχήν ότι $f\lambda_0^P - \lambda_0^Q F''_0$ είναι μορφισμός από το P''_0 στην $\Im i_{B'}$ (δηλαδή στον $\operatorname{Ker} \pi_{B''}$) και θα μπορέσουμε να την ανυψώσουμε στη γ_0 με την επιθυμητή ιδιότητα από το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{cccc} & & P''_0 & \\ & & \downarrow & \\ Q'_0 & \xrightarrow{i_{B'}\eta'} & \operatorname{Im} i_{B'} & \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Πράγματι $\pi_{B''}(f\lambda_0^P) = (\pi_{B''} f)\lambda_0^P = (f''\pi_{A''})\lambda_0^P = f''(\pi_{A''}\lambda_0^P) = f''\epsilon'' = \eta'' F'' = (\pi_{B''}\lambda_0^Q)F'' = \pi_{B''}(\lambda_0^Q F'')$.

Θα υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}_{n-1}$ έχει κατασκευασθεί και θα γενικεύσουμε τη παραπάνω κατασκευή γιά να ορίσουμε γ_n και F_n έτσι ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} P_n = P'_n \oplus P''_n & \longrightarrow & P'_{n-1} \oplus P''_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n = Q'_n \oplus Q''_n & \longrightarrow & Q'_{n-1} \oplus Q''_{n-1}. \end{array}$$

Ακολουθώντας το οριζόντιο και δεξιά κάθετο μορφισμό έχουμε ότι

$$\begin{array}{ccr} p'_n + p''_n & \longrightarrow & d'(p'_n) + \lambda^P_n(p''_n) + d''(p''_n) \\ & & \downarrow \\ & & F'_{n-1}d'(p'_n) + F'_{n-1}\lambda^P_n(p''_n) + \gamma_{n-1}d''(p''_n) + F''_{n-1}d''(p''_n). \end{array}$$

Από την άλλη πλευρά

$$\begin{array}{ccc} p'_n + p''_n & & \\ \downarrow & & \\ F'_n(p'_n) + \gamma_n(p''_n) + F''_n(p''_n) & \longrightarrow & d'F'_n(p'_n) + d'\gamma_n(p''_n) + \lambda^Q_n F''_n(p''_n) + d''F''_n(p''_n). \end{array}$$

Μιάς και η F' (F'' αντίστοιχα) είναι η ανύψωση της f' (της f'' αντίστοιχα) έχουμε ότι $F'_{n-1}d' = d'F'_n$ και ότι $F''_{n-1}d'' = d''F''_n$. Έτσι απομένει να βρούμε την $\gamma_n : P''_n \longrightarrow Q'_n$ έτσι ώστε $F'_{n-1}\lambda^P_n + \gamma_{n-1}d'' = d'\gamma_n + \lambda^Q_n F''_n$ δηλαδή $d'\gamma_n = F'_{n-1}\lambda^P_n - \lambda^Q_n F''_n + \gamma_{n-1}d''$. Θα δείξουμε ότι ο μορφισμός $F'_{n-1}\lambda^P_n - \lambda^Q_n F''_n + \gamma_{n-1}d''$ είναι μορφισμός από το P''_n στον $\operatorname{Ker} d'_{n-1}$ και έτσι θα μπορέσουμε να τον ανυψώσουμε στον γ_n από το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} & & P''_n & & \\ & & \downarrow & & \\ Q'_n & \xrightarrow{d'} & \operatorname{Ker} d'_{n-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Πράγματι $d'(F'_{n-1}\lambda^P_n - \lambda^Q_n F''_n + \gamma_{n-1}d'') = d'F'_{n-1}\lambda^P_n - d'\lambda^Q_n F''_n + (d'\gamma_{n-1})d''$ Αντικαθιστούμε σε αυτή την έκφραση το $d'\gamma_{n-1} = F'_{n-2}\lambda^P_{n-1} - \lambda^Q_{n-1}F''_{n-1} + \gamma_{n-2}d''$ και παρατηρούμε ότι ο όρος που θα περιλαμβάνει τη σύνθεση $d''d''$ μηδενίζεται. Έτσι η αρχική έκφραση γίνεται $d'F'_{n-1}\lambda^P_n - d'\lambda^Q_n F''_n + F'_{n-2}\lambda^P_{n-1}d'' - \lambda^Q_{n-1}F''_{n-1}d''$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το γεγονός ότι $d'\lambda^P_n = -\lambda^P_{n-1}d''$ και αντίστοιχα γιά το Q. Αντικαθιστούμε το δεύτερο και τρίτο όρο και η έκφραση μας παίρνει τη μορφή $d'F'_{n-1}\lambda^P_n + \lambda^Q_{n-1}d''F''_n - F'_{n-2}d'\lambda^P_n - \lambda^Q_n F''_{n-1}d'' = (d'F'_{n-1} - F'_{n-2}d')\lambda^P_n + \lambda^Q_{n-1}(d''F''_n - F''_{n-1}d'') = 0$ μιάς και F', F'' είναι αλυσιδωτές απεικονίσεις.

Έστω τώρα A ένα δεξιό και B ένα αριστερό R-module. Τότε έχουμε δύο αριστερά παραγόμενους τελεστές: $L_i(\_\_ \otimes_R B)$ και $L_i(A \otimes_R \_\_)$, τον πρώτο από την κατηγορία **mod-R** στην **Ab** και τον δεύτερο από την κατηγορία **R-mod** στην **Ab**. Το επόμενο θεώρημα μάς λέει ότι τα αντικείμενα $L_i(\_\_\otimes_R B)(A)$ και $L_i(A\otimes_R \_\_)(B)$ είναι ισόμορφα και θα τα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής με $\operatorname{Tor}^R_i(A, B)$.

Παραδείγματα 0.5. ***Ισορροπώντας τον Tor***, *Balancing Tor.*

$$L_i(\_\_ \otimes_R B)(A) \simeq L_i(A \otimes_R \_\_)(B) := \operatorname{Tor}^R_i(A, B)$$

Απόδειξη. Έστω $(P_\bullet, d^P)$ και $(Q_\bullet, d^Q)$ μία προβολική επίλυση του A και του B αντίστοιχα μαζί με επιμορφισμούς $P_0 \xrightarrow{\epsilon} A$ και $Q_0 \xrightarrow{\eta} B$. Τότε έχουμε το διπλό σύμπλοκο $P_\bullet \otimes_R Q_\bullet$ όπου

$$\begin{array}{ccccc}
P_{p-1}\otimes_R Q_{q+1} & \xleftarrow{d^h} & P_p\otimes_R Q_{q+1} & \longleftarrow & P_{p+1}\otimes_R Q_q \\
\downarrow{\scriptstyle d^v} & & \downarrow{\scriptstyle d^v} & & \downarrow \\
P_{p-1}\otimes_R Q_q & \xleftarrow{d^h} & P_p\otimes_R Q_q & \longleftarrow & P_{p+1}\otimes_R Q_q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_{p-1}\otimes_R Q_{q-1} & \longleftarrow & P_p\otimes_R Q_{q-1} & \longleftarrow & P_{p+1}\otimes_R Q_{q-1}
\end{array}$$

Οι οριζόντιοι και κάθετοι μορφισμοί ορίζονται ως εξής: $d^h(p_i\otimes q_j) = d^P(p_i)\otimes_R id_Q(q_j)$ και $d^v(p_i\otimes q_j) = (-1)^{i-1}p_i\otimes d^Q(q_j)$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ισχύει η αναντιμεταθετικότητα $d^v\circ d^h + d^h\circ d^v = 0$ και έτσι $d = d^v + d^h$ είναι το διαφορικό του ολικού συμπλόκου των διαγονίων $\mathbf{Tot}(P_\bullet\otimes_R Q_\bullet)$ όπου $\mathbf{Tot}(P_\bullet\otimes_R Q_\bullet)_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουμε ημι-ισομορφισμό $f : \mathbf{Tot}(P_\bullet\otimes_R Q_\bullet) \longrightarrow P_\bullet\otimes_R B$ (και αντίστοιχα $\epsilon\otimes \mathrm{id}_{P_\bullet} : \mathbf{Tot}(P_\bullet\otimes_R Q_\bullet) \longrightarrow A\otimes_R Q_\bullet)$. Έπεται ότι τα modules της ομολογίας είναι ισομορφικά. Ορίζουμε τον μορφισμό $f_n : \mathbf{Tot}(P_\bullet\otimes_R Q_\bullet)_n \longrightarrow P_n\otimes_R B$ ως εξής: $f(p_n\otimes q_0) = (-1)^{n-1}p_n\otimes\eta(q_0)$ και $f(p_i\otimes q_j) = 0$ αν $j\neq 0$. Από προηγούμενο κεφάλαιο γιάν να είναι η f ημι-ισομορφισμός αρκεί να δείξουμε ότι ο κώνος της f είναι ακυκλικός.

Έστω C το διπλό σύμπλοκο $P_\bullet\otimes_R Q_\bullet$ με μία επιπλέον γραμμή $P_\bullet\otimes_R B$ στή θέση -1 και με τους επιπλέον κάθετους μορφισμούς $(-1)^i\otimes\eta : P_i\otimes Q_0 \longrightarrow P_i\otimes B$:

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_0\otimes_R Q_0 & \longleftarrow & P_1\otimes_R Q_0 & \longleftarrow & P_2\otimes_R Q_0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_0\otimes_R B & \longleftarrow & P_1\otimes_R B & \longleftarrow & P_2\otimes_R B
\end{array}$$

Τότε το ολικό σύμπλοκο $\mathbf{Tot}(C_\bullet)$ είναι ο κώνος της f, cone(f), (να ελεγχθεί!). Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι $\mathbf{Tot}(C_\bullet)$ είναι ακριβές σύμπλοκο. Αυτό θα προκύψει από το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 0.6. *Έστω ότι $\{C_{p,q}\}$ είναι ένα διπλό σύπλοκο φραγμένο από κάτω, (δηλαδή $C_{p,q} = 0\ \ \forall q < b$), και έτσι ώστε οι στήλεσ-σύμπλοκα $C_{\cdot,q}$ να είναι ακριβείς. Τότε το ολικό σύμπλοκο $\mathbf{Tot}(C)$ είναι ακυκλικό.*

Απόδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $b = 0$, δηλαδή $C_{p,q} = 0\ \ \forall q < 0$. Γιά να δείξουμε ότι $H_n(\mathbf{Tot}(C)) = 0$ αρκεί να εξετάσουμε τη περίπτωση που $n = 0$.

Έστω $c\in \operatorname{Ker}\delta_0 : c = (\ldots, c_{-l,l},\ldots, c_{0,0})$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $b_{0,1}\xrightarrow{d^v} c_{0,0}$. Τότε όμως το στοιχείο του $C_{-1,1}$, $c_{-1,1} - d^h(b_{0,1})$ είναι στον πυρήνα του d^v, επομένως υπάρχει $b_{-1,2}$ με εικόνα $c_{-1,1} - d^h(b_{0,1})$. Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο βλέπουμε ότι η εικόνα του στοιχείου $b = (\ldots, b_{-l,l+1},\ldots, b_{-1,2}, b_{0,1}, 0)$ είναι το c.