Σύμπλοκα από R-modules

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα από την γραμμική άλγεβρα. Καταρχήν να θυμηθούμε ότι αν k είναι ένα σώμα, τότε τα R-modules είναι οι k-διανυσματικοί χώροι. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει έχει να κάνει με τον πυρήνα μίας γραμμικής συνάρτησης f ανάμεσα σε δύο k-διανυσματικούς χώρους $f : V \to W$. Έστω ότι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην f είναι ο A και ότι για κάποιο άλλο πίνακα B ισχύει η σχέση $AB = 0$. Με άλλα λόγια, αν $g : U \to V$ είναι η γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πίνακα B, τότε $fg = 0$, $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, και οι στήλες του B μας δίνουν τις συντεταγμένες στοιχείων που ανήκουν στον πυρήνα της f. Η ερώτηση μας είναι πότε τα στοιχεία αυτά παράγουν τον πυρήνα. Γιά τους διανυσματικούς χώρους δεν είναι δύσκολο να δώσουμε την απάντηση. Ο πυρήνας της f έχει διάσταση ίση με $\dim V - \mathrm{rank}\, f = \dim V - \mathrm{rank}\, A$. Η εικόνα της g είναι υποχώρος του V, με διάσταση ίση με $\mathrm{rank}\, B$ και είναι ίσος με τον πυρήνα όταν οι διαστάσεις τους είναι ίσες: $\mathrm{rank}\, B = \dim V - \mathrm{rank}\, A$. Ο αριθμός $d = \dim V - \mathrm{rank}\, B - \mathrm{rank}\, A$ υπολογίζει την ατέλεια, το πόσο μακριά είναι η εικόνα του B από τον πυρήνα του A. Έχουμε δηλαδή το σύμπλοκο $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ και d είναι η διάσταση του module της *ομολογίας*

$$H = \ker f / \mathrm{Im}(g).$$

Ορισμός 0.1. *Ένα* **αλυσιδωτό σύμπλοκο**, $(C_\bullet, d_\bullet)$, *(chain complex), από R-modules είναι μία οικογένεια $\{C_n, d_n\}$ από R-modules μαζί με ομομορφισμούς $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$, έτσι ώστε η σύνθεση $d_{n-1}d_n = 0$. Οι ομομορφισμοί d_n λέγονται* **διαφορικά**, *(***διφφερεντιαλς***). Ο πυρήνας του d_n συμβολίζεται με $Z_n = Z_n(C)$ και λέγεται το module των n-κύκλων. Η εικόνα του d_{n+1} συμβολίζεται με $B_n = B_n(C)$ και λέγεται το module των n-ορίων. Το n-module της ομολογίας του C είναι το module $H_n(C) = Z_n/B_n$. Το σύμπλοκο $C_\bullet$ λέγεται* **ακριβές**, *(exact), η* **ακυκλικό**, *(acyclic) αν $H_n(C_\bullet) = 0$ γιά κάθε n.*

Γιά παράδειγμα $\cdots \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{d_0} 0$ είναι ένα σύμπλοκο όπου ο ομομορφισμός $d_n : x \mapsto 4x$. Οι n κύκλοι είναι το υπο-module $<2>$ του $\mathbb{Z}_8$ ενώ τα όρια είναι το υπο-module $<4>$. Έπεται ότι το module $H_n(C) \simeq \mathbb{Z}_2$, $n \geq 1$, $H_0 \simeq Z_4$, $H_{-n} = 0$, $n \leq -1$.

Αν περικόψουμε το σύμπλοκο $C_\bullet$ θα πάρουμε ένα καινούριο σύμπλοκο. Το ίδιο και με τη μεταφορά: ορίζουμε ένα καινούριο σύμπλοκο θέτοντας $C[p]_n = C_{n+p}$.

Θα μπορούσε ακόμα κανείς να θεωρήσει τη κατηγορία των συμπλόκων, $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$. Τα αντικείμενα στην $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$ είναι σύμπλοκα R-modules. Οι μορφισμοί λέγονται **αλυσιδωτές** απεικονίσεις, (chain maps). Αν $(C_\bullet, d_\bullet)$ και $(D_\bullet, d'_\bullet)$ είναι δύο σύμπλοκα τότε ο μορφισμός $u : C_\bullet \longrightarrow D$ είναι μία οικογένεια μορφισμών $u_n : C_n \longrightarrow D_n$ έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle u_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle u_n} & & \downarrow{\scriptstyle u_{n-1}} \\ D_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

Το άθροισμα δύο αλυσιδωτών απεικονίσεων είναι αλυσιδωτή απεικόνιση, έτσι η $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$ έχει ευθέα γινόμενα και αθροίσματα ενώ το αρχικό και το τελικό αντικείμενο της $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$ είναι το μηδενικό σύμπλοκο. Ένας μορφισμός $u : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$

παράγει ομομορφισμούς R-modules $H_n(C)\longrightarrow H_n(D)$, (γιατί;). Ο μορφισμός u : $C_\bullet\longrightarrow D_\bullet$ λέγεται **ημι-ισομορφισμός**, (quasi-isomorphism), αν οι ομομορφισμοί $H_n(C)\longrightarrow H_n(D)$ είναι ισομορφισμοί. Γιά παράδειγμα, $0 : 0\longrightarrow C_\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός εάν και μόνο εάν $C_\bullet$ είναι ακριβές.

Αλλάζοντας τις φορές των μορφισμών έχουμε την έννοια του **συναλυσιδωτού** συμπλόκου $(C^\cdot, d^\cdot)$. Έτσι έχουμε $\cdots\longrightarrow C^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}} C^n\xrightarrow{d^n} C^{n+1}\longrightarrow\cdots$, και $d^{n+1}d^n = 0$. Εδώ $Z^n(C^\cdot) = \operatorname{Ker} d^n$ και $B^n(C^\cdot) = \operatorname{Im} d^{n-1}$, ενώ $H^n(C^\cdot) = Z^n(C^\cdot)/B^n(C^\cdot)$ είναι το module της **συνομολογίας**. Αν $C_\bullet$ είναι ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα συναλισιδωτό σύμπλοκο $C^\cdot$, θέτοντας $C^n = C_{-n}$. Λέμε ότι το $C_\bullet$ έχει άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα, αν $C_n = 0$ γιά $n > b$, (αντίστοιχα γιά $n < a$).

Θα αναφέρουμε ένα σημαντικό παράδειγμα συμπλόκου που σημάδεψε την ιστορία της ομολογικής άλγεβρας. Έστω Δ_k το k-διάστατο τυπικό (standard) προσανατολισμένο πλέγμα (simplex). Έτσι το Δ_0 είναι ένα σημείο, το Δ_1 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, το Δ_2 είναι το τρίγωνο και ούτω καθεξής. Δηλαδή $\Delta_k = \{(t_1,\ldots,t_k) : t_i \geq 0, \sum t_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^k$. Οι κορυφές του Δ_k είναι τα σημεία $v_0, v_1, \ldots, v_k$ όπου v_0 είναι η αρχή των αξόνων, v_i έχει τη τιμή 1 στην i συντεταγμένη και 0 στις υπόλοιπες. Ο προσανατολισμός του Δ_k δίνεται από $v_0 < v_1 < \cdots < v_k$ και θα συμβολίζουμε $\Delta_k = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$. Έστω τώρα X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα k-πλέγμα στο X είναι μία συνεχής συνάρτηση $\sigma : \Delta_k\longrightarrow X$. Θεωρούμε το σύνολο $S_k(X)$ που είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση όλα τα k-πλέγματα στο X, και θέτουμε $S_{-1}(X) = 0$. Συγκεκριμένα έχουμε ότι $S_0(X)$ είναι η ομάδα όλων των τυπικών γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του X, $S_1(X)$ είναι η ομάδα όλων των τυπικών γραμμικών συνδυασμών καμπύλων στο X. Κάθε συνάρτηση $\sigma : \Delta_k\longrightarrow X$ ορίζει $k+1$ συναρτήσεις $\Delta_{k-1}\longrightarrow X$ μιάς και Δ_k έχει $k+1$ όψεις. Γιά παράδειγμα αν $\sigma : \Delta_2\longrightarrow X$ έχουμε $\sigma_1 : t \mapsto \sigma((0,t,))$, $\sigma_2 : t \mapsto \sigma((t,0))$ και $\sigma_3 : t \mapsto \sigma((t,1-t))$. Το εναλλασόμενο άθροισμα αυτών των συναρτήσεων ορίζει έναν ομομορφισμό $\delta_k : S_k(X)\longrightarrow S_{k-1}(X)$. Έχουμε λοιπόν το **ιδιάζον**, (singular) σύμπλοκο του X:

$$C\bullet : \quad \cdots\longrightarrow S_2(X)\longrightarrow S_1(X)\longrightarrow S_0(X)\longrightarrow 0$$

και το ιδιάζον n-module της ομολογίας του X, $H_n(X)$. Παρατηρούμε ότι κάθε κλειστή καμπύλη στο Q, ($\sigma : \Delta_1\longrightarrow X$, $\sigma(0) = \sigma(1)$), μας δίνει ένα στοιχείο του $Z_1(C\bullet)$: $\delta(\sigma) = \sigma(0) - \sigma(1)$. Έτσι το module της ομολογίας κατά κάποιο τρόπο μετράει πόσες τρύπες έχει ο χώρος X. Αναφέρουμε ότι $H_m(\mathbb{R}^n) = 0$ αν $m > 0$ και $\mathbb{Z}$ γιά $m = 0$.

Στή συνέχεια θα ορίσουμε τα αλυσιδωτά σύμπλοκα στη κατηγορία $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$. Θα τα ονομάσουμε **διπλά**, (double) σύμπλοκα. Ένα διπλό σύμπλοκο $(C_{\bullet,\bullet}, d_\bullet)$ είναι μία συλλογή από R-modules, $C_{p,q}$ με οριζόντιους και κάθετους μορφισμούς:

$$d^h : C_{p,q}\longrightarrow C_{p-1,q}, \quad d^v : C_{p,q}\longrightarrow C_{p,q-1}$$

έτσι ώστε $d^h \circ d^h = 0$, $d^v \circ d^v = 0$, και έτσι ώστε να ισχύει η αναντιμεταθετικότητα (anticommutativity) των αντίστοιχων τετραγώνων: $d^v \circ d^h + d^h \circ d^v = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
C_{p-1,q+1} \arrow[d, "d^v"] & C_{p,q+1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & C_{p+1,q} \arrow[l] \arrow[d] \\
C_{p-1,q} \arrow[d] & C_{p,q} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & C_{p+1,q} \arrow[l] \arrow[d] \\
C_{p-1,q-1} & C_{p,q-1} \arrow[l] & C_{p+1,q-1} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Κάθε στήλη και κάθε γραμμή του διπλού σύμπλοκου είναι αλυσιδωτό σύμπλοκο. Παραδείγματα τέτοιων διπλών συμπλόκων θα δούμε όταν πάρουμε προβολικές (η εμβολικές) επιλύσεις των modules M και N στο τανυστικό γινόμενο $M \otimes N$. Θα λέμε ότι το διπλό σύμπλοκο είναι **φραγμένο**, αν το $C_\bullet$ έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων σε κάθε διαγώνιο $p+q=n$, παραδείγματος χάρι όταν το $C_\bullet$ έχει όρους μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου. Ο οριζόντιος μορφισμός $d^v(p,*)$ δεν είναι μορφισμός στη κατηγορία $\mathbf{Ch}(\mathbf{R\text{-}mod})$. Όμως χρειαζόμαστε την αναντιμεταθετικότητα γιά να ορίσουμε ένα καινούριο σύμπλοκο, το ολικό σύμπλοκο $(\mathbf{Tot}^{\sqcap}(C), d)$. Εδώ έχουμε ότι $\mathbf{Tot}^{\sqcap}(C)_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$ ενώ το διαφορικό $d : \mathbf{Tot}^{\sqcap}(C)_n \longrightarrow \mathbf{Tot}^{\sqcap}(C)_{n-1}$ στέλνει το στοιχείο $c_{p,q}$ στο άθροισμα $d^v(c_{p,q}) + d^h(c_{p,q})$. (Να ελέγξετε ότι το $\mathbf{Tot}^{\sqcap}(C)$ είναι σύμπλοκο!). Αντίστοιχα έχουμε και τον ορισμό του ολικού συμπλόκου $(\mathbf{Tot}^{\oplus}(C), d)$. Όταν το διπλό σύμπλοκο είναι φραγμένο, οι δύο αυτές έννοιες συμπίπτουν.

Τέλος αναφέρουμε το **Λήμμα του Φιδιού**, (Snake Lemma) και το θεώρημα της **μακριάς ακριβής ακολουθίας της ομολογίας**, (long exact sequence in homology), και θα εισάγουμε τη τεχνική του **κυνηγητού του διαγράμματος** (diagram chasing) γιά την απόδειξή τους.

Λήμμα 0.2. ***(Λήμμα του Φιδιού)*** *Έστω ότι έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:*

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r] &
\end{tikzcd}
$$

Αν οι γραμμές είναι ακριβείς, τότε έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\alpha|_{\operatorname{Ker} f}} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{\beta|_{\operatorname{Ker} g}} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{\bar{\beta}'} \operatorname{Coker} h$$

όπου θ είναι ο **συνδετικός μορφισμός**, *connecting homomorphism και $\theta(c) = a' + \operatorname{Im} f$ όπου το a' είναι τέτοιο ώστε $\alpha'(a') = g(b)$ αν $\beta(b) = c$. Αν η α είναι μονομορφισμός τότε και $\alpha|_{\operatorname{Ker} f}$ είναι μονομορφισμός και αν η β' είναι επιμορφισμός τότε και η $\bar{\beta}'$ είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $\alpha|_{\operatorname{Ker} f}$, $\beta|_{\operatorname{Ker} g}$, $\bar{\alpha}'$, $\bar{\beta}'$ είναι καλά ορισμένοι ομομορφισμοί. Με απλό κυνηγητό του διαγράμματος βρίσκει κανείς ότι η συνάρτηση θ είναι καλά ορισμένη και ότι υπάρχει μοναδικό στοιχείο a' έτσι ώστε $\alpha'(a') = g(b)$, καθώς και ότι $\theta(c)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του b με την ιδιότητα $\beta(b) = c$. (Με άλλα λόγια μπορεί εύκολα να δείξει ότι αν $b_1 - b_2 \in \operatorname{Ker} \beta$ τότε $\alpha'^{-1}(g(b_1)) - \alpha'^{-1}(g(b_2)) \in \operatorname{Im} f$. Το υπόλοιπο της απόδειξης επαφίεται ως άσκηση.

Λήμμα 0.3. ***Μακριά ακριβής ακολουθία στην ομολογία*** *Έστω* $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} C \longrightarrow 0$ *μία ακριβής ακολουθία συμπλόκων. Τότε η ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(B) \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\theta} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής όπου ο συνδετικός μορφισμός θ *στέλνει το στοιχείο* $c + d(C_{n+1})$ *στο στοιχείο* $a + d(A_n)$*, όπου το* a *είναι τέτοιο ώστε* $\alpha_{n-1}(a) = d_n(b)$ *αν* $\beta_n(b) = c$*. Ακόμα αν το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_\bullet & \longrightarrow & B_\bullet & \longrightarrow & C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \longrightarrow & B'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

τότε το αντίστοιχο διάγραμμα στην ομολογία

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό (φυσικότητα του θ*.)*

Απόδειξη. Γιά κάθε l έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_l & \longrightarrow & B_l & \longrightarrow & C_l & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{l-1} & \longrightarrow & B_{l-1} & \longrightarrow & C_{l-1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Φιδιού βρίσκουμε ότι

$$0 \longrightarrow Z_l(A) \longrightarrow Z_l(B) \longrightarrow Z_l(C) \longrightarrow \frac{A_{l-1}}{d(A_l)} \longrightarrow \frac{B_{l-1}}{d(B_l)} \longrightarrow \frac{C_{l-1}}{d(C_l)} \longrightarrow 0.$$

Θα συνδυάσουμε το τέλος αυτής της ακολουθίας με $l = n+1$ και την αρχή της ακολουθίας με $l = n-1$ γιά να πάρουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα με κάθετους μορφισμούς να ορίζονται απο τα αντίστοιχα διαφορικά:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \dfrac{A_n}{d(A_{n+1})} & \longrightarrow & \dfrac{B_n}{d(B_{n+1})} & \longrightarrow & \dfrac{C_n}{d(C_{n+1})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(A) & \longrightarrow & Z_{n-1}(B) & \longrightarrow & Z_{n-1}(C) & &
\end{array}$$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Φιδιού ακόμα μία φορά. Ο πυρήνας των κάθετων ομομορφισμών είναι $H_n(A)$, $H_n(B)$, $H_n(C)$ αντίστοιχα, ενώ ο συνπυρήνας είναι $H_{n-1}(A)$, $H_{n-1}(B)$, $H_{n-1}(C)$. Η ποθητή μακριά ακριβής ακολουθία ακολουθεί.

Γιά το τελευταίο κομμάτι της απόδειξης ισχυριζόμαστε ότι αρκεί κανείς να δείξει την φυσικότητα του θ στο Λήμμα του Φιδιού. Έστω το αντιμεταθετικό τριδιάστατο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
 & & d & A & \xrightarrow{e} & B & \xrightarrow{\phi} & C & \longrightarrow & 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{f} & E' & \xrightarrow{g} & F' & \xrightarrow{h} & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & &
\end{array}$$

Τότε με απλό κυνηγητό διαγράμματος μπορεί να δείξει κανείς ότι έχουμε αντιμεταθετικότητα στο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} \operatorname{Ker} d & \longrightarrow & \operatorname{Ker} e & \longrightarrow & \operatorname{Ker} \phi & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker} d & \longrightarrow & \operatorname{Coker} e & \longrightarrow & \operatorname{Coker} \phi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Ker} f & \longrightarrow & \operatorname{Ker} g & \longrightarrow & \operatorname{Ker} h & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker} f & \longrightarrow & \operatorname{Coker} g & \longrightarrow & \operatorname{Coker} h \end{array}$$

Παρατήρηση 0.4. *Έχουμε το αντίστοιχο θεώρημα γιά τις ακριβείς ακολουθίες συναλισυδωτών συμπλόκων: έστω* $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{\alpha^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{\beta^\bullet} C \longrightarrow 0$ *μία ακριβής ακολουθία συμπλόκων. Τότε η ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\theta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής και ο συνδετικός μορφισμός είναι φυσικός.

Τέλος θα μιλήσουμε για μηδενομοτοπίες και γιά κόνους απεικονίσεων.

Ορισμός 0.5. *Μία αλυσιδωτή απεικόνιση* $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *είναι* **μηδενομοτοπία**, *(null homotopic), εάν γιά κάθε n υπάρχει ένας μορφισμός* $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ *έτσι ώστε* $f_n = d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$*:*

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ D_{n+1} & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{d} & D_{n-1} \end{array}$$

Η f, g είναι **ομοτοπικές** *εάν η $f - g$ είναι μηδενομοτοπική. Οι μορφισμοί s λέγονται* **συστολές**, *(contractions).*

Παραδείγματα

(1) Η μηδενική απεικόνιση είναι μηδενομοτοπική.
(2) Έστω $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ αυθαίρετοι μορφισμοί. Τότε αν ορίσουμε $f_n = d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, βρίσκουμε εύκολα ότι η $f_\bullet$ είναι αλυσιδωτή απεικόνιση και μάλιστα μηδενομοτοπία.

Οι μηδενομοτοπίες μας ενδιαφέρουν κυρίως γιατί οι μορφισμοί που ορίζουν στην ομολογία είναι μηδενικοί:

Λήμμα 0.6. *Έστω ότι* $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *είναι μηδενομοτοπία. Τότε η* $0 = \tilde{f} : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f = ds + sd$ και ότι $z \in H_n(C), z = x + B_n(C), x \in Z_n(C)$. Τότε $\tilde{f}(z) = \overline{f(x)} = ds(x) + sd(x) + B_n(D) = ds(x) + B_n(D) = 0$.

Λήμμα 0.7. *Έστω η* $f, g : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *ομοτοπικές απεικονίσεις. Τότε* $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Λήμμα 0.8. *Θεωρούμε την ταυτοτική αλυσιδωτή απεικόνιση* $id : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$. *Αν id είναι μηδενομοτοπία τότε το σύμπλοκο $C_\bullet$ είναι ακριβές.*

Απόδειξη. $\tilde{id} = 0 : H_n(C) \longrightarrow H_n(C)$, συνεπώς $H_n(C) = 0$.

Παρατηρούμε ότι στη περίπτωση που $id : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ είναι μηδενομοτοπία τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $\beta = s|_{B_{n-1}} : B_{n-1} \longrightarrow C_n$ έτσι ώστε η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$ να είναι διαιρετά ακριβής. Με άλλα λόγια η σύνθεση $d\beta = id_{B_{n-1}(C)}$. Επόμενο θεώρημα λέει ότι $C_n \simeq Z_n(C) \oplus B_{n-1}(C)$.

Ορισμός 0.9. *Έστω* $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *μία αλυσιδωτή απεικόνιση. Ο* **κώνος** *της* f *θα συμβολίζεται με* $cone(f)$ *και είναι το σύμπλοκο που ορίζεται με* $cone(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$ *και με διαφορικό* $d(a, b) = (-da, db - fa)$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{i} cone(f) \xrightarrow{\pi} C_\bullet[-1] \longrightarrow 0$, όπου $i(b) = (0, b)$, $\pi(a, b) = -a$ και θυμίζουμε ότι $C_n[-1] = C_{n-1}$. Παίρνοντας τη μακριά ακριβή ακολουθία στην ομολογία και μιάς και $H_l(C[-1]) = H_{l-1}(C)$, έχουμε

$$\longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\theta} H_n(D) \longrightarrow H_n(cone(f)) \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow$$

όπου υπολογίζοντας τον συνδετικό μορφισμό βρίσκουμε $\theta = \tilde{f}$. Όταν λοιπόν $H_n(cone(f)) = 0$ τότε $H_n(C) \simeq H_n(D)$.