Ομολογική Άλγεβρα

Η Ομολογική Άλγεβρα είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται κυρίως στην Άλγεβρα και στην Αλγεβρική Τοπολογία σε αποδείξεις (μή κατασκευαστικές) υπάρξεως. Μελετάει εμπόδια σε διάφορες κατασκευές και προσφέρει τις μεθόδους για τους αναγκαίους υπολογισμούς. Παραδείγματος χάρι, αν A είναι μία υποομάδα της B τότε nA είναι υποομάδα της nB, όπου $n \in \mathbb{Z}$, όμως δεν είναι αναγκαίο $nA = NB \cap A$, (βλέπε $2\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}$ με $n = 2$). Στη περίπτωση αυτή όπως θα δούμε το εμπόδιο είναι η ομάδα $\mathrm{Tor}(B/A, \mathbb{Z}/n) = \{x \in B/A \mid nx = 0\}$ μιάς και $A \cap nB$ είναι ο πυρήνας του ομομορφισμού $A/nA \to B/nB$. Η Ομολογική Άλγεβρα ξεκίνησε με τις έννοιες της ομολογίας και συνομολογίας σε τοπολογικούς χώρους στα μέσα του 20 αιώνα και αναπτύχθηκε όταν καταννοήθηκε ότι ο φορμαλισμός αυτός θα μπορούσε να εφραμοσθεί σε αλγεβρικά συστήματα και άγγιζε κάθε κομμάτι της Αλγεβρας. Τα βασικά ονόματα εκείνης της περιόδου είναι οι Cartan, Eilenberg και MacLane. Θα δώσουμε τις βασικές έννοιες στην κοινή γλώσσα αυτού του φορμαλισμού.

Ορισμός 0.1. *Μία συλλογή από αντικείμενα A είναι μία* **κλάση**, *(class), αν δοθέντος ενός αντικειμένου x μπορούμε να αποφασίσουμε αν $x \in A$ η αν $x \notin A$.*

Ορισμός 0.2. *Μία κλάση A είναι* **σύνολο** *αν υπάρχει μία κλάση B τέτοια ώστε $A \in B$.*

Παραδείγματα:

(1) Τα συνήθη σύνολα, (γιατί;)
(2) Μία κλάση που δεν είναι σύνολο: (το παράδοξο του Russel). Έστω $M = \{X | X$ είναι ένα σύνολο και $X \notin X\}$. Το M είναι μία μή κενή κλάση, (γιατί;). Το M δεν είναι σύνολο. Πράγματι, αν το M ήταν σύνολο τότε το θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε αν το M ήταν στοιχείο του M, (βλέπε τον ορισμό του M) και να καταλήξουμε σε άτοπο και στις δύο περιπτώσεις: αν $M \in M \Rightarrow M \notin M$, αν $M \notin M \Rightarrow M \in M$.

Ορισμός 0.3. *Μία* **κατηγορία** *$\mathcal{C}$ αποτελείται από*

(1) *μία κλάση αντικειμένων* $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$
(2) $\forall A, B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ *ένα σύνολο* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, *που λέγεται το σύνολο των $\mathcal{C}$-μορφισμών από το A στο B*
(3) $\forall A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ *υπάρχει μία συνάρτηση σύνθεσης*
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. *Αν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, τότε σημειώνουμε gf γιά την σύνθεση τους. Η σύνθεση είναι προσεταιριστική.*
(4) $\forall D \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, *υπάρχει ένας μορφισμός $id_D \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, D)$ έτσι ώστε $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D), f\, id_A = f = id_D f$. Ο μορφισμός id_A λέγεται ταυτοτικός μορφισμός του A.*

Παραδείγματα:

(1) Η κατηγορία των συνόλων **Sets** όπου $\mathrm{obj}(\mathbf{Sets})$ είναι η κλάση των συνόλων, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A, B)$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο B με τη συνήθη σύνθεση.

(2) Η κατηγορία των ομάδων **Groups** όπου obj(**Groups**) είναι η κλάση των ομάδων, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Groups}}(A, B)$ είναι το σύνολο των ομομορφισμών ομάδων από το A στο B με τη συνήθη σύνθεση. **Ab** είναι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων.
(3) Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε την κατηγορία των δακτυλίων και των αριστερών (δεξιών) R-modules **R-mod**, (**mod-R**).
(4) Έστω G μία ομάδα. Ορίζουμε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ με ένα μόνο αντικείμενο: $\mathrm{obj}(\mathcal{C}) = \{G\}$ και με μορφισμούς τα στοιχεία του G. Η σύνθεση είναι ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων του G.
(5) Έστω P ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{C}$ με $\mathrm{obj}(C)$ τα στοιχεία του P. Έστω $p, q \in P$. Τότε ορίζουμε $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p, q)$ να είναι το κενό εκτός εάν $p \leq q$ οπότε σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ακριβώς έναν μορφισμό από το p στο q (που συμβολίζουμε $p \leq q$).
(6) Η κατηγορία **Top** με αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς τις συνεχείς συναρτήσεις.
(7) Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία. Με $\mathcal{C}^{op}$ συμβολίζουμε την *αντίθετη* (opposite) κατηγορία. Τα αντικείμενα της $\mathcal{C}^{op}$ είναι τα ίδια με τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, όμως οι μορφισμοί και η σύνθεση έχουν αντιστραφεί. Δηλαδή $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$ όπου $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C)$ δίνουν fg. Ετσι αν θεωρήσουμε τον δακτύλιο R σαν μία κατηγορία (όπως στο Παράδειγμα 4), με ένα μόνο αντικείμενο, με μορφισμούς τα στοιχεία του R και με σύνθεση τον πολλαπλασιασμό, τότε R^{op} είναι ο δακτύλιος με τον πολλαπλασιασμό ανάποδα.

Ορισμός 0.4. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Ο μορφισμός f είναι* **ισομορφισμός** *στο $\mathcal{C}$ αν υπάρχει $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ έτσι ώστε $gf = id_a$ και $fg = id_B$.*

Γιά παράδειγμα στη κατηγορία **Sets** οι ισομορφισμοί είναι οι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις. Στη κατηγορία **Top** οι ισομορφισμοί είναι οι ομοιομορφισμοί. Στο παράδειγμα 4 όλοι ο μορφισμοί είναι ισομορφισμοί.

Ορισμός 0.5. *Ένα αντικείμενο I σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι* **αρχικό** *(***initial***) αν $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, B) = \{f\}$, $\forall B \in \mathcal{C}$. Ένα αντικείμενο T σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι* **τελικό** *αν $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, T) = \{g\}$, $\forall A \in \mathcal{C}$.*

Γιά παράδειγμα στη κατηγορία **Groups** η ομάδα $\{e\}$ είναι αρχικό και τελικό αντικείμενο. Στην κατηγορία των **Sets** το κενό σύνολο είναι το αρχικό αντικείμενο και τα σύνολα με ένα στοιχείο είναι τελικά αντικείμενα. Ποιό είναι το αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία των δακτυλίων; Η κατηγορία των σωμάτων έχει αρχικό αντικείμενο; τελικό αντικείμενο;

Πρόταση 0.6. *Κάθε δύο αρχικά (τελικά) αντικείμενα είναι ισόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω I_1, I_2 δύο αρχικά αντικείμενα. Έστω $\{f_1\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I_1, I_2)$ και $\{f_2\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I_2, I_1)$. Τότε $f_2 f_1 = id_{I_1}$ και $f_1 f_2 = id_{I_2}$ μιάς και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I_1, I_1) = \{id_{I_1}\}$ και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I_2, I_2) = \{id_{I_2}\}$.

Ορισμός 0.7. *Έστω $\{B_i : i \in I\}$ μία συλλογή αντικειμένων στη κατηγορία $\mathcal{C}$. Το* **γινόμενο** *(***product***) $\prod B_i$ (αν αυτό υπάρχει) είναι ένα αντικείμενο στη $\mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς $\pi : \prod B_i \to B_i$ τέτοιο ώστε γιά κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ με μορφισμούς $\alpha_i : A \to B_i$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi : A \to \prod B_i$ με την ιδιότητα $\pi\phi = a_i$.*

Το γινόμενο δηλαδή έχει την καθολική ιδιότητα της απεικόνισης:

$$\begin{array}{ll} B_i \longleftarrow & \prod B_i \\ \uparrow & \nearrow \\ A & \end{array}$$

Το γινόμενο δεν υπάρχει στην κατηγορία των σωμάτων.

Αν αντιστρέψουμε τη φορά των μορφισμών στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε την δυαδική έννοια του **συνγινομένου**, (**coproduct**).

$$\begin{array}{ll} B_i \longleftarrow & \coprod B_i \\ \downarrow & \swarrow \\ A & \end{array}$$

Στη κατηγορία των **R-mod** το συνγινόμενο είναι το ευθύ άθροισμα.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τη καθολική ιδιότητα ότι το γινόμενο (συνγινόμενο) $\prod B_i$ (αν αυτό υπάρχει) στη κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μοναδικό με προσέγγιση ισομορφίας.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις ίδιες τις κατηγορίες σαν αντικείμενα μιάς μεγαλύτερης κατηγορίας. Τους μορφισμούς μέσα στην κατηγορία αυτή τους ονομάζουμε τελεστές η συναρτητές. (

Ορισμός 0.8. *•Εστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας* **συναλλοίωτος** *(covariant)* **τελεστής** *(functor) $\mathcal{F}$ από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ (σημειώνουμε $\mathbb{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας κανόνας που σε κάθε αντικείμενο $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ αντιστοιχεί ένα αντικείμενο $\mathcal{F}(B) \in \mathrm{obj}(\mathcal{D})$ και σε κάθε μορφισμό $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ αντιστοιχεί έναν μορφισμό $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ που διατηρεί την σύνθεση $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$ και τους ταυτοτικούς μορφισμούς $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.*

Παραδείγματα

(1) Θα ορίσουμε τον τελεστή $M \otimes \_\_ : \mathbf{R\text{-}mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, όπου M είναι δεξιό R-module. Αν N είναι ένα αριστερό R-module, τότε $M \otimes_R N$ είναι μία αβελιανή ομάδα και αν $f : N \longrightarrow N'$ είναι ομομορφισμός αριστερών R-modules τότε $id_M \otimes f : M \otimes N \longrightarrow M \otimes f(N)$, $m \otimes n \mapsto m \otimes f(n)$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

(2) Θα ορίσουμε τον τελεστή $\mathrm{Hom}_R(M, \_\_) : \mathbf{R\text{-}mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, όπου M είναι ένα αριστερό R-module. Αν N είναι επίσης ένα αριστερό R-module τότε $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ είναι μία αβελιανή ομάδα και αν $f : N \longrightarrow N'$ τότε
$f_* : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N')$, όπου $f_*(g) = fg$.

(3) Ο επιλήσμων (forgetful) τελεστής. $\mathcal{F} : \mathbf{R\text{-}mod} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ όπου $F(A) = A$ και αν $f : M \longrightarrow M'$ τότε $\mathcal{F}(f) : M \longrightarrow M'$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση.

(4) Θεωρώντας μία ομάδα σαν κατηγορία με ένα αντικείμενο, ένας τελεστής μεταξύ ομάδων είναι ακριβώς ένας ομομορφισμός ομάδων.

Αντίστοιχα υπάρχει ο ορισμός των ανταλλοιώτων τελεστών απο την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$. Αυτοί είναι οι συναλλοίωτοι τελεστές απο την $\mathcal{C}^{op}$ και $\mathcal{D}$

Ορισμός 0.9. *•Εστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας* **ανταλλοίωτος (contravariant) τελεστής** *$\mathcal{F}$ από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ (σημειώνουμε $\mathbb{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας κανόνας που σε κάθε αντικείμενο $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ αντιστοιχεί ένα αντικείμενο $\mathcal{F}(B) \in \mathrm{obj}(\mathcal{D})$ και σε κάθε μορφισμό $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ αντιστοιχεί έναν μορφισμό $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ έτσι ώστε $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ και $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.*

$\mathrm{Hom}_R(\_\_, N) : \mathbf{R\text{-}mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ είναι ανταλλοίωτος τελεστής. Εδώ όταν $M \xrightarrow{f} M'$, έχουμε τον μορφισμο ομάδων $f^* : \mathrm{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N)$, όπου $f^*(g) = gf$.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τη κατηγορία όλων των συναλλοίωτων τελεστών απο τη κατηγορία $\mathcal{C}$ στη κατηγορία $\mathcal{C}$. Οι μορφισμοί σε αυτήν την κατηγορία είναι το σύνολο των φυσικών μετασχηματισμών.

Ορισμός 0.10. *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ δύο τελεστές. Ένας* **φυσικός μετασχηματισμός** *(natural transformation) τ από τον τελεστή $\mathcal{F}$ στον τελεστή $\mathcal{G}$, σημειώνουμε $\tau : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, είναι ένας κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ έναν μορφισμό $\tau_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B), \mathcal{G}(B))$ που είναι φυσικός ως προς B. Δηλαδή γιά κάθε $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$ το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\tau_B"'] & F(B') \arrow[d, "\tau_{B'}"'] \\
\mathcal{G}(B) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"] & \mathcal{G}(B')
\end{tikzcd}$$

Παραδείγματα

(1) Ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός, $id_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$.

(2) Έστω $M, M' \in \mathbf{mod\text{-}R}$. Όπως είδαμε $M \otimes \_\_$ και $M' \otimes \_\_$ είναι δύο τελεστές από την $\mathbf{R\text{-}mod}$ στην $\mathbf{Ab}$. Κάθε $h : M \longrightarrow M'$ ορίζει έναν φυσικό μετασχηματισμό $M \otimes \_\_ \Rightarrow M' \otimes \_\_$. Αν $N \in \mathrm{obj}(\mathbf{R\text{-}mod})$ τότε $h_N = h \otimes id_N : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N$, όπου $h_N(m \otimes n) = h(m) \otimes n$. Μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι για κάθε $f : N \to N'$ το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "id_M \otimes f"] \arrow[d, "h \otimes id_N"'] & M \otimes N' \arrow[d, "h \otimes id_{N'}"'] \\
M' \otimes N \arrow[r, "id_{M'} \otimes f"] & M' \otimes N'
\end{tikzcd}$$

(3) Κάθε $h : M \longrightarrow M'$ ορίζει επίσης έναν φυσικό μετασχηματισμό $\mathrm{Hom}_R(M', \_) \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \_)$ όπου $h_N = h^* : \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N)$.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των προσαρτημένων τελεστών παρατηρούμε ότι αν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$, τότε η σύνθεση των μορφισμών ορίζει μία συνάρτηση $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B)$ και ομοίως $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A')$.

Ορισμός 0.11. *Οι τελεστές $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $R : \mathcal{D} \to C$ λέγονται* **προσαρτημένοι** *(adjoint) αν γιά όλα τα αντικείμενα A της $\mathcal{C}$ και B της $\mathcal{D}$ υπάρχει μία αμφιμονότιμη απεικόνιση των συνόλων των μορφισμών:*

$$\tau = \tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A), B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R(B)),$$

που είναι φυσική και ως προς το A και ως προς το B. Έτσι αν $f : A \to A'$ και $g : B \to B'$ τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A'), B) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\tau_{A',B}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A), B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau_{A,B}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(A), B') \arrow[d, "\tau_{A,B'}"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', R(B)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R(B)) \arrow[r, "Rg_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R(B'))
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα Έστω R ένας δακτύλιος και B ένα αριστερό R-module. Αν C είναι μία αβελιανή ομάδα τότε μπορούμε να δώσουμε στο σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B,C)$ τη δομή ενός δεξιού R-module ως εξής: $f\cdot r$ ορίζεται ο ομομορφισμός ομάδων που $(f\cdot r)(b)=f(rb)$. Έτσι έχουμε τον τελεστή $R:\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B,\_):\mathbf{Ab}\to\textbf{mod-R}$. Έχουμε επίσης τον τελεστή $L:\_\otimes_R B:\textbf{mod-R}\to\mathbf{Ab}$. Οι δύο αυτοί τελεστές είναι προσαρτημένοι. Πράγματι έχουμε την απεικόνιση συνόλων:

$$\tau_{DC}:\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(D\otimes_R B,C)\simeq \mathrm{Hom}_{\textbf{mod-R}}(D,\mathrm{Hom}_{Ab}(B,C))$$

όπου $\tau_{DC}(f)=\tau_f$ γιά $f:D\otimes_R B\to C$ και $\tau_f:D\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B,C))$ είναι ο μορφισμός που ορίζεται ως εξής: αν $d\in D$ τότε $\tau_f(d):B\to C$ και $(\tau_f(d))[b]=f(d\otimes b)$. Λεπτομέρειες που καλό θα ήταν να ελεγχθούν: $\tau_f(d)$ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, τ_f είναι ομομορφισμός δεξιών R-modules. Επίσης τ_{DC} είναι ισομορφισμός συνόλων και η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $\phi_{DC}:\mathrm{Hom}_{\textbf{mod-R}}(D,\mathrm{Hom}_{Ab}(B,C))\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(D\otimes_R B,C)$, όπου $(\phi_{DC}(g))(d\otimes b)=(g(d))(b)$.

Τέλος θα δώσουμε τους ορισμούς και κάποια βασικά παραδείγματα για τα ευθέα και αντίστροφα όρια σε μία κατηγορία.

Ένα σύνολο I θα λέγεται **προδιατεταγμένο**, (quasi-ordered), αν το I έχει μία ανακλαστική και μεταβατική σχέση. Μπορούμε να θεωρήσουμε το I σαν μία κατηγορία όπως στο Παράδειγμα 5, (σελ. 2). Ένα **ευθύ σύστημα**, (direct system), στην κατηγορία $\mathcal{C}$ με **σύνολο δεικτών**, (index set), το σύνολο I, είναι ένας τελεστής $\mathbb{F}:I\to C$. Αυτό σημαίνει ότι $\forall i\in I$, υπάρχει ένα αντικείμενο $F_i\in\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ και ότι όταν $i,j\in I$ ικανοποιούν τη σχέση $i\le j$ τότε υπάρχει ένας μορφισμός $\phi^i_j:F_i\longrightarrow F_j$ που να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\phi^i_i:F_i\longrightarrow F_i$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός,

(2) αν $i\le j\le k$, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_k \\ & F_j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Σημειώνουμε το ευθύ σύστημα με $F=\{F_i,\phi^i_j\}$. Το **ευθύ όριο**, (direct limit) αυτού του συστήματος, (αν υπάρχει), και σημειώνουμε $\varinjlim F_i$, είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς $a_i:F_i\longrightarrow\varinjlim F_i$ τέτοιο ώστε $a_i=a_j\phi^i_j$ όταν $i\le j$ και που ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα απεικόνισης: δηλαδή γιά κάθε αντικείμενο X με μορφισμούς $f_i:F_i\longrightarrow X$, όπου $f_i=f_j\phi^i_j$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\beta:\varinjlim F_i\longrightarrow X$ έτσι ώστε $\beta\alpha_i=f_i$. Συμπληρώστε τά βέλη και τους μορφισμούς έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim F_i \arrow[rr] & & X \\ & F_j \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & F_j & \end{tikzcd}$$

Πρόταση 0.12. *Το ευθύ όριο ενός ευθέος συστήματος $\{F_i,\phi^i_j\}$ από modules υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_i:F_i\longrightarrow\coprod F_i$ ο εγκλεισμός στο ευθύ άθροισμα. Ορίζουμε

$$\varinjlim F_i:=\sqcup F_i/S$$

όπου S είναι το υπο-module το οποίο παράγεται από όλα τα στοιχεία $\lambda_j\phi^i_j a_i - \lambda_i a_i$ όπου $a_i \in F_i$ και $i \leq j$. Επίσης ορίζουμε $\alpha_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F_i$, όπου $\alpha_i(a_i) = \lambda_i(a_i) + S$. Αποδεικνύεται ότι $\varinjlim F_i$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Παραδείγματα

(1) Αν το I έχει τη τετριμμένη προδιάταξη (δηλαδή $i \leq j$ ανν $i = j$), τότε $\varinjlim F_i = \bigsqcup F_i$.

(2) Έστω I οι θετικοί ακέραιοι με τη συνήθη διάταξη, και $A_1 \subset A_2 \subset A_2 \subset \cdots$. Τα $\{A_t, i^t_j\}$ όπου i^t_j είναι ο συνήθης εγκλεισμός γιά $t \leq j$ είναι ευθύ σύστημα. Τότε $\varinjlim F_i = \cup A_i$. (Γιατί ζητάμε $A_i \subset A_{i+1}$;)

(3) Κάθε R-module είναι ισόμορφο με το ευθύ όριο όλων των πεπερασμένα παραγόμενων υπο-modules του.

(4) Το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι ισόμορφο με το ευθύ γινόμενο του ευθέος συστήματος των κυκλικών $\mathbb{Z}$-modules $<1/r>$. (Εδώ το προδιατεταγμένο σύνολο είναι το ίδιο το σύνολο των $<1/r>$ όπου έχουμε ορίσει ότι $<1/r> \leq <1/s>$ ανν $rr' = s$ γιά κάποιο ακέραιο r'.

Αλλάζοντας τις φορές των μορφισμών στούς ορισμούς μας έχουμε τις έννοιες του αντίστροφου ορίου.

Ένα **αντίστροφο σύστημα**, (inverse system), $F = \{F_i, \psi^j_i\}$στην κατηγορία $\mathcal{C}$ με σύνολο δεικτών το προδιατεταγμένο σύνολο I, είναι ένας ανταλλοίωτος τελεστής $\mathbb{F} : I \to C$.

Το **αντίστροφο όριο**, (inverse limit) αυτού του συστήματος, (αν υπάρχει), σημειώνουμε $\varprojlim F_i$, είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς $a_i : \varprojlim F_i \longrightarrow F_i$ τέτοιο ώστε $a_i = \psi^j_i a_j$ όταν $i \leq j$ και που ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα απεικόνισης: δηλαδή γιά κάθε αντικείμενο X με μορφισμούς $f_i : X \longrightarrow F_i$ με $f_i = \psi^j_i f_j$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\beta : X \longrightarrow \varprojlim F_i$ έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό, (συμπληρώστε τους μορφισμούς και τα βέλη!).

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F_i & \longleftarrow & X \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & F_j & \\ & \uparrow & \\ & F_j & \end{array}$$

Πρόταση 0.13. *Το αντίστροφο όριο ενός αντίστροφου συστήματος $\{F_i, \psi^i_j\}$ από modules υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω $\pi_i : \prod F_i \longrightarrow F_i$ η προβολή. Ορίζουμε

$$\varprojlim F_i = \{(a_i) \in \prod F_i : a_i = \psi^j_i a_j, \text{ όταν } i \leq j\}.$$

Επίσης ορίζουμε $\alpha_i : \varprojlim F_i \longrightarrow F_i$, όπου $\alpha_i(a_i) = \pi(a_i)$.

Παραδείγματα

(1) Αν το I έχει τη τετριμμένη ημιδιάταξη (δηλαδή $i \leq j$ ανν $i = j$), τότε $\varprojlim F_i = \prod F_i$.

(2) Έστω I οι θετικοί ακέραιοι. Ορίζουμε ότι $A_i \leq A_j$ αν $A_i \supset A_j$. Αν $A_1 \subset A_2 \subset A_2 \subset \cdots$ τότε $\lim\limits_{\leftarrow} F_i = \cap A_i$.

(3) Οι p-αδικοί αριθμοί είναι το αντίστροφο όριο του συστήματος Z/p^iZ όπου οι μορφισμοί $Z/p^jZ \longrightarrow Z/p^iZ$ είναι οι προβολές. Μπορούμε να θεωρήσουμε τους p-αδικούς αριθμούς σαν δυναμοσειρές της μορφής $b_0 + b_1p + b_2p^2 + \cdots +$ όπου $0 \leq a_i < p$, (και με προσοχή στη πρόσθεση!). Γιά παράδειγμα, αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι αν $p = 2$ τότε $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + \cdots = -1$.