Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Galois

A, Όνομα______________

Πρωτη Προοοδος, 14 Νοεμβριου 2014

Οδηγίες: Θα πρέπει να δώσετε πλήρεις καθαρογραμμένες αιτιολογήσεις για τις απαντήσεις σας.

1. (3) Το πρόβλημα αυτό αφορά το $\mathbb{Z}_3[x]$.
   - (.5) Να βρείτε ένα ανάγωγο μονικό πολυώνυμο $f(x)$ στο $\mathbb{Z}_3[x]$ έτσι ώστε $f(0) = 1$ και $\deg f(x) = 3$.
   - (.5) Έστω $I = (f(x))$ όπου $g(x)$ το πολυώνυμο του πρώτου ερωτήματος. Να βρείτε τον αντίστροφο του $x + I$ στο σώμα $\mathbb{Z}_3[x]/I$.
   - (.5) Να βρείτε ένα σώμα L έτσι ώστε $\mathbb{Z}_3$ να εμφυτεύεται στον L και $f(x)$ να έχει μία ρίζα στο L.
   - (.5) Έστω E σώμα ανάλυσης του $f(x)$ πάνω από το $\mathbb{Z}_3$. Είναι οι ρίζες του $f(x)$ στο E απλές;
   - (1) Έστω E όπως παραπάνω. Να θέσετε ένα άνω και κάτω όριο για $[E : \mathbb{Z}_3]$.
2. (2) Έστω ότι $[E : \mathbb{k}] = 100$. Να αποδείξετε ότι κάθε στοιχείο του E είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{k}$.
3. (5) Έστω $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$.
   - Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{7})$.
   - Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ και $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ είναι ισόμορφοι ως $\mathbb{Q}$ διανυσματικοί χώροι.
   - Να αποδείξετε ότι $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$.
   - Να αποδείξετε ότι $[E : \mathbb{Q}] = 4$.
   - Να βρείτε $\mathrm{irr}_{(\mathbb{Q}, \sqrt{3}+\sqrt{7})}(x)$.
   - Να βρείτε $\mathrm{irr}_{(\mathbb{Q}(\sqrt{7}), \sqrt{3}+\sqrt{7})}(x)$.
   - Να βρείτε μία $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$-βάση του E.
   - Να βρείτε μία $\mathbb{Q}$-βάση του E.
   - Να βρείτε δύο στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q})$.
   - Υπάρχει $\phi \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ έτσι ώστε $\phi(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = -\sqrt{3} - \sqrt{7}$;