

Πρόοδος 2

14.02.13

1. (20%) Να αποδείξετε ένα (1) από τα επόμενα:
 - (α) Αν R είναι δακτύλιος της Noether τότε $R[x]$ είναι δακτύλιος της Noether
 - (β) Αν S είναι ακέραιος πάνω από τον R και $P \in \text{Spec}(R)$ τότε υπάρχει $Q \in \text{Spec}(S)$ έτσι ώστε $Q \cap R = P$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $P_1 \subset P_2 \in \text{Spec}(R)$ τότε υπάρχουν $Q_1 \subset Q_2 \in \text{Spec}(S)$ έτσι ώστε $Q_i \cap R = P_i, i = 1, 2$.
 - (γ) Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether να δείξετε ότι $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $\text{ann}(M) \subset P \in \text{Spec}R$ με ελαχιστοτικό τρόπο, τότε $P \in \text{Ass}(M)$.
2. (70%) Έστω $I = (15x, x^3), P = \langle x \rangle$ ιδεώδη του $S = \mathbb{Z}[x]$ και $R = \mathbb{Z}[x]/I$.
 - (1) Να βρείτε την ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του I .
 - (2) Να βρείτε $\dim S_P$
 - (3) Να βρείτε $\dim R$.
 - (4) Είναι ο δακτύλιος R ακέραιος πάνω από τον \mathbb{Z} ;
 - (5) Να περιγράψετε ένα σύνολο γεννητόρων του R ως \mathbb{Z} -module.
 - (6) Είναι ο δακτύλιος R ελεύθερο \mathbb{Z} -module;
 - (7) Να υπολογίσετε τα σύνολα $\text{Supp}(S), \text{Ass}(S), \text{Supp}(R)$ και $\text{Ass}(R)$.
3. (10%) Έστω $J = \langle yxz \rangle \subset \mathbb{k}[x, y, z], R = \mathbb{k}[x, y, z]/J$ όπου \mathbb{k} σώμα. Να δείξετε στη πράξη το Λήμμα Κανονικοποίησης της Noether για τον R .