Πρόοδος 1

11.12.13

1. Να αποδείξετε ένα (1) από τα επόμενα:

– (α)Αν $I \subset P_1 \cup P_2 \cup r P_3$ όπου $P_i \in$ SpecR, τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, 3\}$ έτσι ώστε $I \subset P_i$.

– (β)

$$\bigcap_{P \in \mathrm{SpecR}} P = \{f \in R : f^n = 0,\ \text{για } n \in \mathbb{N}\}$$

2. Έστω ότι R είναι τοπικός δακτύλιος με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες m. Έστω ότι M είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module και ότι $M/mM = 0$. Να αποδείξετε ότι $M = 0$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $< f_1, \dots, f_l >= M$ αν και μόνο αν $< f_1 + mM, \dots, f_l + mM >= M/mM$.

3. Έστω ότι $I = \langle x^2, y^2 \rangle$. Να φτιάξετε μία βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to K \to F \to I \to 0$ έτσι ωστε F να είναι ελεύθερο R-module.

4. Έστω ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x]$. Να δείξετε ότι το ιδεώδες $I = \langle x^2 - 25, x^2 - 4x - 5 \rangle$ είναι πρώτο. Στη συνέχεια να βρείται $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $I + n\mathbb{Z}$ να είναι μέγιστο.

5. Να αποδείξετε αναλυτικά ότι $M \otimes_R R/I \cong M/IM$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $M/N \otimes_R R/I \cong M/(IM + N)$.