ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

Μπορείτε να μιμηθείτε τα παρακάτω.

1. Θεωρημα Βασης του Hilbert και αλλα τινα

Αν $0 \neq f(x) \in R[x]$, τότε με $\mathrm{lc}(f(x))$ συμβολίζουμε τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$: δηλαδή αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ όπου $a_n \neq 0$, τότε $\mathrm{lc}(f(x)) = a_n$.

Θεώρημα 1. *(Θεώρημα Βάσης του Hilbert) Αν R είναι δακτύλιος της Noether, τότε $R[x]$ είναι δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Έστω I ιδεώδες του $R[x]$. Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το σύνολο

$$J_n = \{r = \mathrm{lc}(f(x)) : \ f(x) \in I, \ \deg f(x) = n\} \cup \{0\} .$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι J_n είναι ιδεώδες του R. Επίσης προκύπτει εύκολα ότι $J_n \subset J_{n+1}, \forall n$. Αφού R είναι δακτύλιος της Noether, $\exists N$ έτσι ώστε $J_N = J_{N+k}, \forall k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_N = J_{N+1}$. Αφού R είναι δακτύλιος της Noether, τα ιδεώδη J_i, $i = 1, \ldots, N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα: $J_i = \langle a_{i1}, \ldots, a_{is_i}\rangle$ και έστω $f_{ij}(x) \in I$, $\deg f_{ij}(x) = i$ και $\mathrm{lc}(f_{ij}(x)) = a_{ij}$ για $j = 1, \ldots, s_i$. Έστω τώρα

$$I' = \langle f_{01}(x), \ldots, f_{0s_0}(x), f_{11}(x), \ldots, f_{Ns_N}(x)\rangle \ .$$

Θα δείξουμε ότι $I = I'$. Πράγματι $\cdots$ □

Άσκηση 1. *Να βρείτε τα αντιστρέψιμα του $\cdots$.*

Από εδώ και στο εξής, θα συμβολίζουμε με $m \otimes n$ το στοιχείο $f(m, n)$ όπου $f : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι η διγραμμική συνάρτηση του τανυστικού γινομένου.

Πρόταση 1. *Το R-module $M \otimes_R N$ παράγεται από τα στοιχεία $m \otimes n : m \in M, n \in N$. Ένα τυχαίο στοιχείο του $M \otimes_R N$ είναι της μορφής $m_1 \otimes n_1 + \cdots + m_l \otimes n_l$ όπου $m_i \in M$, $n_i \in N$ και $l \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $P := \langle m \otimes n : m \in M, n \in N\rangle$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι P είναι υπο-modυλε του $M \otimes_R N$. Έστω $f' : \ M \times N \to P, f'(m, n) = m \otimes n$. Είναι άμεσο ότι f' είναι διγραμμική. Είναι επίσης πολύ εύκολο να δει κανείς ότι αν $g : \ M \times N \to Q$ διγραμμική και $\phi : M \otimes_R N \to Q$ είναι ο R-ομομορφισμός του τανυστικού γινομένου, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[dl, "\phi_P"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Όπως στο προηγούμενο θεώρημα, έπεται ότι $i : P \to M \otimes_R N$, $m \otimes n \mapsto m \otimes n$ είναι ισομορφισμός. Επομένως $P = M \otimes_R N$. $\square$

Παράδειγμα 1. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = 0$. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διγραμμική $g : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow P$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε το παρακάτω διάγραμμα πληρεί τις προυποθέσεις του ορισμού του τανυστικού γινομένου:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[dl] \\ P & \end{tikzcd}$$

Η g είναι όντως μηδενική, όπως προκύπτει εύκολα από τις ιδιότητες της διγραμμικής συνάρτησης: $g(\overline{1}, \overline{a}) = g(3 \cdot \overline{1}, \overline{a}) = g(\overline{1}, 0) = 0$.