ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ, 2013
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

Με τις παρουσιάσεις θα καλύψουμε το κυριότερο μέρος της ενότητας 2.4 του βιβλίου του D. Eisenbud "Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry". Για τις παρουσιάσεις θα εξασκηθείτε στο διάβασμα και στην απόδοση μαθηματικών κειμένων λίγο πιο προχωρημένου επιπέδου, (προετοιμασία για τη διπλωματική εργασία). Θα δείτε ότι θα χρειαστεί να συμπληρώσετε πολλές από τις λεπτομέρειες μόνοι σας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι έχουμε δει στο μάθημα. Θα πρότεινα να γράψετε στα ελληνικά το κείμενο χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα LaTex που επίσης θα χρειαστεί ούτως ή άλλως να μάθετε για να γράψετε αργότερα τη διπλωματική σας εργασία: θα πρέπει να κατεβάσετε το πρόγραμμα και να το κάνετε να δουλέψει στον υπολογιστή σας.

Παρακάτω χωρίζω την ενότητα 2.4 σε υποενότητες. Θα αναλάβετε να παρουσιάσετε από δύο υποενότητες με απόσταση τουλάχιστον μία υποενότητα ο καθένας: η ιδέα είναι ότι θα έχετε διαβάσει συνολικά όλοι την ενότητα 2.4 και η παρουσίαση θα γίνει ένα project από κοινού. Θα καλύψει τις υποενότητες που θα απομείνουν.

(1) Ορισμός ενός δακτυλίου και module του Artin. Παρουσίαση του βασικού αποτελέσματος. Απόδειξη ότι $\mathbb{Z}/(12) \equiv \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3)$ με τοπικοποίηση.
(2) Ορισμός αλυσίδας, απλού module, σειράς σύνθεσης, μήκους. Κάθε απλό module είναι ισόμορφο με R/P όπου $P \in \operatorname{maxSpec}(R)$. Αν M είναι module της Noether και του Artin τότε M έχει πεπερασμένη σειρά σύνθεσης.
(3) Αν M έχει πεπερασμένη σειρά σύνθεσης και M' είναι γνήσιο υπο-module του M τότε το μήκος του M' είναι μικρότερο του μήκους του M. Κάθε αλυσίδα υπο-modules του M έχει μήκος μηκρότερου του μήκους του M. Αν M έχει πεπερασμένη σειρά σύνθεσης τότε M είναι module της Noether και του Artin.
(4) Ένας ομομορφισμός μεταξύ R-modules είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο ομομορφισμός της τοπικοποίησης σε κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι ισομορφισμός, (βλ. και βιβλίο Atiyah, MacDonald 3.8, 3.9). Όταν το μήκος του M είναι 1, τότε $M \equiv M_P$ όπου $P = \operatorname{ann}(M)$.
(5) Έστω M έχει πεπερασμένη σειρά σύνθεσης. Τότε M είναι ισόμορφο με ευθύ άθροισμα M_P όπου P είναι τα πρώτα ιδεώδη που αντιστοιχούν στα πηλίκα της σειράς σύνθεσης του M. Ο αριθμός των $M_i/M_{i+1} \equiv R/P$ που εμφανίζονται σε μία σειρά σύνθεσης είναι ισος με το μήκος του M_P ως R_P-module.
(6) $M = M_P$ αν και μόνο αν M μηδενίζεται από κάποια δύναμη του P. Έστω ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether έτσι ώστε R να μην έχει πεπερασμένο μήκος. Τότε υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες P έτσι ώστε R/P αν μην έχει πεπερασμένο μήκος.
(7) Αν R είναι δακτύλιος της Noether έτσι ώστε κάθε πρώτο ιδεώδες να είναι μέγιστο, τότε R έχει πεπερασμένο μήκος και ο R είναι δακτύλιος του Artin.

Έστω ότι ο R είναι δακτύλιος του Artin. Τότε το μηδενικό ιδεώδες είναι το γινόμενο μεγίστων ιδεωδών του R.

(8) Έστω ότι ο R είναι δακτύλιος του Artin. Τότε ο R έχει πεπερασμένο μήκος και ο R είναι δακτύλιος της Noether. Αν ο R είναι δακτύλιος του Artin τότε ο R έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα ιδεώδη.

(9) Αν R είναι δακτύλιος του Artin τότε R είναι ισόμορφος (ως δακτύλιος) με πεπερασμένο ευθύ άθροισμα τοπικών δακτυλίων του Artin.

(10) Πόρισμα 2.17

(11) Πόρισμα 2.18

(12) Πόρισμα 2.19