Αντιμεταθετική Άλγεβρα, Σύνολο ασκήσεων 3

Ημερομηνία Παράδοσης 07.02.14

1. Έστω $\mathbb{k}$ άπειρο σώμα και $A = \mathbb{k}[t, t^2, t^3]$.

- Να δείξετε ότι $A \cong \mathbb{k}[x, y, z]/(x^2 - y, z - x^3)$.
- Να εξηγήσετε γιατί το ιδεώδες $(x^2 - y, z - x^3)$ είναι πρώτο.
- Να βρείτε $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $x_1, \ldots, x_r$ γραμμικά ανεξάρτητα έτσι ώστε A να είναι ακέραιο υπεράνω του $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_r]$ όπως στο Λήμμα Κανονικοποίησης της Noether.
- Να βρείτε $\dim(A)$ και $\dim A_{\mathfrak{m}}$ όπου $\mathfrak{m} = (x, y, z)$.
- Να βρείτε μία ακολουθία $P_0 \subset \cdots \subset P_{\dim(A)}$ πρώτων ιδεωδών του A.
- Αν $l = \dim A_{\mathfrak{m}}$ να βρείτε ένα παραμετρικό ιδεώδες q του $\dim A_{\mathfrak{m}}$ έτσι ώστε $q = (f_1, \ldots, f_l)$.
- Να βρείτε ένα πολυώνυμο $q(x)$ έτσι ώστε $q(n) = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}^n A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^{n+1} A_{\mathfrak{m}}$ για $n \gg 0$ και να παρατηρήσετε ότι όντως $\dim(A_{\mathfrak{m}}) = \deg q(x) + 1$.

2. Έστω $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος της Noether έτσι ώστε $\dim R = 0$ και έστω ότι $R/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$. Αν $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ να δείξετε ότι R είναι σώμα. Αν $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ να δείξετε ότι $\mathfrak{m}$ είναι κύριο ιδεώδες. Στη συνέχεια να δείξετε ότι κάθε μη μηδενικό γνήσιο ιδεώδες είναι παραμετρικό και κύριο.

3. Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[t]/(t^2)$, $S = \mathbb{k}[t, x]/(t^2, tx^3 + tx^2 - x^2 - x)$. Να ελέγξετε αν ο δακτύλιος S είναι ακέραιος υπεράνω του R και να αποδείξετε ότι $S \cong R \oplus R$.