Αντιμεταθετική Άλγεβρα, Σύνολο ασκήσεων 1

Ημερομηνία Παράδοσης 29.11.13

1. Αν M είναι R-module ορίζουμε $\mathrm{Ass}(M) := \{P \in \mathrm{Spec}\, R,\ R/P \hookrightarrow M\}$. Αν $M = \Bbbk[x,y]/(x^2y, x^3)$ να εξετάσετε αν (x) και (x,y) ανήκουν στο $\mathrm{Ass}(M)$. Να δείξετε ότι αν

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

είναι βραχεία ακριβή ακολουθία, τότε $\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

2. Έστω ότι

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

είναι ακριβής ακολουθία. Να δειξετε ότι M είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν M' και M'' είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

3. Έστω $R = \Bbbk[x]$, $I = (x^2)$, $J = (x^2+1)$. Να υπολογισετε τα τανυστικα γινόμενα $R/I \otimes_{\Bbbk} R/J$ και $R/I \otimes_R R/J$.

4. Έστω ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[x,y]$. Να αποφασίσετε αν τα παρακάτω ιδεώδη είναι α) πρώτα, β) μέγιστα και γ) στη περίπτωση που είναι γνήσια και μη μέγιστα, να βρείτε ένα μέγιστο ιδεώδες που να τα περιέχει: $I_1 = (x^3+y^2, y)$, $I_2 = (x^3+y, x)$, $I_3 = (x^2+y, x^2+y+1, x-1)$, $I_4 = (xy-y, y-1)$, $I_5 = (x^2-2, y)$.