# ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
# ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ, 2013
# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

## 1. Διασταση: πολυωνυμικοι δακτυλιοι, παραμετρικα ιδεωδη, τοπικοι δακτυλιοι

Έστω $R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος. Θυμίζουμε ότι $\dim R$, *η διάσταση του Krull του* $R$, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των μηκών αυστηρά αξουσών ακολουθιών πρώτων ιδεωδών του $R$.

**Θεώρημα 1.** *Έστω* $\mathbb{k}$ *σώμα. Τότε για* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, *ισχύει ότι* $\dim \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] = n$.

Παρακάτω κάνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος όταν $\mathbb{k}$ είναι άπειρο, ενώ στο παράδειγμα που ακολουθεί θα υποδείξουμε τη τακτική που ακολουθούμε όταν $\mathbb{k}$ είναι πεπερασμένο. Οι αποδείξεις όταν $\mathbb{k}$ είναι άπειρο και πεπερασμένο διαφοροποιούνται μόνο στην επιλογή της αλλαγής των συντεταγμένων. Η απόδειξη όταν $\mathbb{k}$ είναι πεπερασμένο μπορεί να εφαρμοστεί και όταν $\mathbb{k}$ είναι άπειρο.
*Απόδειξη.* Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ όπου $\mathbb{k}$ άπειρο. Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $n$. Εάν $n = 0$ τότε $R$ είναι σώμα και άρα $\dim R = 0$.

Έστω τώρα ότι η πρόταση είναι αληθής όταν $0 \leq n < r$. Θα αποδείξουμε ότι $\dim \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_r] = r$. Πράγματι, $\dim \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_r] \geq r$ αφού

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \ldots, x_r) \ .$$

Μένει να δείξουμε ότι $\dim \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_r] \leq r$. Έστω

$$(0) \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_m$$

μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του $R$ έτσι ώστε $m = \dim R$. Αφού $m \geq 1$, η ακολουθία ξεκινά στο μηδενικό ιδεώδες και $P_1 \neq (0)$. Έστω $0 \neq f(x_1, \ldots, x_r) \in P_1$. Το πολυώνυμο $f(x_1, \ldots, x_r)$ είναι πεπερασμένο άθροισμα μονωνυμικών όρων $c_{j_1 \ldots j_r} x_1^{j_1} \cdots x_r^{j_r}$. Έστω $d = \max\{j_1 + \cdots + j_r \ : \ c_{j_1 \ldots j_r} \neq 0\}$, (ο βαθμός του $f(x_1, \ldots, x_r)$). Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_{r-1} \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε με την αντικατάσταση $x_i = x_i' - a_i x_r$ για $i = 1, \ldots, r-1$ έχουμε

$$f(x_1, \ldots, x_r) = b x_r^d + h_{d-1}(x_1', \ldots, x_{r-1}') x_r^{d-1} + \cdots + h_0(x_1', \ldots, x_{r-1}')$$

και $b \in \mathbb{k}$ να μην είναι μηδέν. Επομένως διαιρώντας με το $b$ τη παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι $x_r$ είναι ακέραιο υπεράνω του $S = \mathbb{k}[x_1', \ldots, x_{r-1}', f(x_1, \ldots, x_r)]$ αφού ικανοποιεί τη πολυωνυμική σχέση

$$x_r^d + \frac{h_{d-1}(x_1', \ldots, x_{r-1}')}{b} x_r^{d-1} + \cdots + \frac{h_0(x_1', \ldots, x_{r-1}'}{b} - \frac{f(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r)}{b} = 0 \ .$$

Παρατηρούμε ότι $R = S[x_r]$ και ότι $R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη $S$-άλγεβρα. Αφού λοπόν $x_r$ είναι ακέραιο πάνω από τον $S$, έπεται ότι $R$ είναι ακέραιος πάνω από τον $S$ και άρα $\dim S = \dim R = m$. Επίσης σύμφωνα με το Θεώρημα της Μη Συγκρισιμότητας έπεται ότι

$$(0) \subset P_1 \cap S \subset P_2 \cap S \subset \cdots \subset P_m \cap S$$

είναι αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών στον $S$. Θέτουμε $P_i' := P_i \cap S$. Έστω τώρα $S' = S/(f) \cong \mathbb{k}[[x_1', \dots, x_{r-1}']]$. Στον $S'$ η ακολουθία

$$P_1'/(f) \subset P_2/(f) \cdots \subset P_m'/(f)$$

είναι αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών. Έπεται ότι $m - 1 \leq \dim S'$. Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $\dim S' = r - 1$. Έπεται ότι $m - 1 \leq r - 1$ και άρα $m \leq r$ όπως ήταν το ζητούμενο. □

**Παράδειγμα 1.** Έστω $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 \in \mathbb{Z}_2[x_1, x_2, x_3]$. Παρατηρούμε ότι το $d$ όπως ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος είναι 4 και ότι και οι δύο μονωνυμικοί όροι του $f(x_1, x_2, x_3)$ αντιστοιχούν στο ίδιο $d$. Αν θέσουμε $x_1 = x_1' + a_1 x_3$, $x_2' = x_2 + a_2 x_3$ και αντικαταστήσουμε, τότε

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1' + a_1 x_3)^2 (x_2 + a_2 x_3) x_3 + (x_1' + a_1 x_3)(x_2' + a_2 x_3) x_3^2 = (a_1^2 a_2 + a_1 a_2) x^4 + \cdots$$

όπου με $\cdots$ γράφουμε όρους με βαθμό μικρότερου του 4. Όμως είναι φανερό ότι δεν υπάρχει επιλογή $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2$ που να μη μηδενίζει το συντελεστή $a_1^2 a_2 + a_1 a_2$. Αυτή λοιπόν η αλλαγή συντεταγμένων δεν αποδίδει καρπούς.

Θα δοκιμάσουμε μία διαφορετική αλλαγή συντεταγμένων. Θέτουμε $x_1 = x_1' + x_3^5$, $x_2 = x_2' + x_3^{5^2}$. Αντικαθιστώντας βλέπουμε ότι

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1' + (x_3^5)^2 (x_2' + x_3^{25}) x_3 + (x_1' + x_3^5)(x_2' + x_3^{25}) x_3^2 = x_3^{36} + x_3^{32} + \cdots$$

όπου με $\cdots$ γράφουμε όρους με βαθμό μικρότερου του 36 και έτσι $x_3$ είναι ακέραιο πάνω από τον $\mathbb{Z}_2[x_1', x_2', x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2]$. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι αν $e$ είναι φυσικός αριθμός τότε μετά την αντικατάσταση $x_1 = x_1' + x_3^e$, $x_2 = x_2' + x_3^{e^2}$ το μονώνυμο $x_1^2 x_2 x_3$ θα δώσει τους όρους $x_3^{e^2+2e+1} + \cdots$ (όπου με $\cdots$ γράφουμε όρους μικρότερου βαθμού), ενώ το μονώνυμο $x_1 x_2 x_3^2$ θα δώσει τους όρους $x_3^{e^2+e+2} + \cdots$ (όπου με $\cdots$ γράφουμε όρους μικρότερου βαθμού). Αν τώρα $e > 2$, τότε οι εκθέτες $e^2 + 2e + 1$ και $e^2 + e + 2$ δίνουν διαφορετικούς αριθμούς σε βάση $e$ και δίνουν διαφορετικές δυνάμεις του $x_3$. Επομένως για κάθε τέτοια αλλαγή συντεταγμένων $x_3$ θα είναι ακέραιο πάνω από τον $\mathbb{Z}_2[x_1', x_2', x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2]$.

**Θεώρημα 2.** *Έστω $R$ ακεραία περιοχή και δακτύλιος της Noether και έστω $(0) \neq P \in \operatorname{Spec} R$. Τότε δεν υπάρχει $f$ μη αντιστρέψιμο έτσι ώστε $P \subsetneq (f)$*

*Απόδειξη.* Έστω ότι $P \subsetneq (f)$ και άρα $f \notin P$. Τότε $\forall y \in P \Rightarrow y = rf \in P$ και επομένως $r \in P$. Έπεται ότι $P \subset (f)P$ και αφού $(f)P \subset P$ έπεται ότι $P = (f)P$. Αφού $R$ δακτύλιος της Noether έπεται ότι $P$ πεπερασμένα παραγόμενο. Σύμφωνα με το Λήμμα του Nakayama υπάρχει $b \in (f)$ έτσι ώστε $(1 - b)P = 0$. Όμως $R$ είναι ακεραία περιοχή και καταλήγουμε σε άτοπο γιατί αφού $f$ δεν είναι αντιστρέψιμο $b \neq 1$, ενώ $(0) \neq P$. □

**Θεώρημα 3.** *Έστω $R$ δακτύλιος της Noether. Αν $P \in \operatorname{Spec} R$ και $P \subsetneq (f)$ όπου $f$ μη αντιστρέψιμο, τότε $\dim R_P = 0$*

*Απόδειξη.* Έστω ότι $Q \subsetneq P \subsetneq (f)$ όπου $Q \in SpecR$. Τότε $R/Q$ ακεραία περιοχή και δακτύλιος της Noether, $P/Q \in \operatorname{Spec} R/Q$, $P/Q \subsetneq (f)/Q$, άτοπο από το προηγούμενο Θεώρημα. □

**Ορισμός 1.** *Έστω $Q \in \operatorname{Spec} R$. Τότε με $Q^{(n)}$ την $n$-στή συμβολική δύναμη του $Q$ ορίζουμε τον περιορισμό $Q^n R_Q \cap R$. Με άλλα λόγια,*

$$Q^{(n)} = \{r \in R : \ sr \in Q^n, s \notin Q\}$$

Παρατηρούμε ότι

- $Q^n \subset Q^{(n)}$
- $Q^{(n)} R_Q = Q^n R_Q$.
- $Q^{(n+1)} \subset Q^{(n)}$

**Παράδειγμα 2.** Έστω ότι $\mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec} R$. Τότε $\mathfrak{m}^{(n)} = \mathfrak{m}^n$. Πράγματι παρατηρούμε πρώτα ότι $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{m}$ ελαχιστοτικά: αν υπήρχε $Q \in \operatorname{Spec} R$ έτσι ώστε $\mathfrak{m} \subset Q$ τότε $\mathfrak{m} \subset Q$ αφού $Q \in \operatorname{Spec} R$ και άρα $\mathfrak{m} = Q$. Επομένως $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{m}^n) = \{\mathfrak{m}\}$ το οποίο σημαίνει ότι κάθε στοιχείο εκτός του $\mathfrak{m}$ δε μπορεί να είναι διαιρέτης του μηδενός στο $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{m}^n)$. Δηλαδή αν $s \notin \mathfrak{m}$ τότε $sr \in \mathfrak{m}^n$ μπορεί να συμβεί μόνο αν $r \in \mathfrak{m}^n$. Άρα τα στοιχεία του $\mathfrak{m}^{(n)}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του $\mathfrak{m}^n$.

Έστω $P \in SpecR$, $J$ ιδεώδες του $R$. Λέμε ότι $J \subset P$ *ελαχιστοτικά*, αν δεν υπάρχει $Q \in \operatorname{Spec} R$ έτσι ώστε $J \subset Q \subsetneq P$. Με άλλα λόγια $J \subset P$ ελαχιστοτικά αν $\operatorname{ht} P/J = 0$. Εάν $P$ είναι το μέγιστο ιδεώδες του $R$ αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{Ass}(R/J) = \{P\}$ και ισοδύναμα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P^n \subset J$. Στη γενική περίπτωση, όταν $P$ δεν είναι κατάνάγκη το μέγιστο ιδεώδες του $R$, τοπικοποιούμε και βλέπουμε ότι $J \subset P$ ελαχιστοτικά αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P^n R_P \subset J^n R_P$.

**Θεώρημα 4.** *Έστω $R$ δακτύλιος της Noether, $P \in \operatorname{Spec} R, f \in R$ και $(f) \subset P$ ελαχιστοτικά, τότε $\dim R_P \leq 1$.*

*Απόδειξη.* Αν $\dim R_P = 0$ δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε. Έστω λοιπόν ότι $\dim R_P > 0$, δηλαδή ότι υπάρχει $Q \in \operatorname{Spec} R$ έτσι ώστε $Q \subsetneq P$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\dim R_Q = 0$ ή ισοδύναμα ότι $(0) \subset Q$ ελαχιστοτικά. Περνώντας στον δακτύλιο $R_P$, θεωρώντας το ιδεώδες $QR_P$ και παρατηρώντας ότι $(f)R_P \subset PR_P$ ελαχιστοτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε εξαρχής ότι $(R, P)$ είναι τοπικός δακτύλιος. Αφού $\operatorname{Ass}(R/(f)) = \{P\}$ έπεται ότι $\dim R/(f) = 0$ και αφού $R/(f)$ δακτύλιος της Noether έπεται ότι $R/(f)$ είναι και δακτύλιος του Artin. Παρατηρούμε επίσης ότι $f \notin Q$ μιας και $(f) \subset P$ ελαχιστοτικά. Αφού

$$\left(Q^{(1)} + (f)\right) / (f) \ \supset \left(Q^{(2)} + (f)\right) / (f) \ \supset \cdots$$

είναι φθίνουσα ακολουθία, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να γίνει στατική. Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $Q^{(n)} + (f) = Q^{(n+1)} + (f)$ και επομένως $Q^{(n)} \subset (f) + Q^{(n+1)}$. Θα δείξουμε ότι $Q^{(n)} = (f)Q^{(n)} + Q^{(n+1)}$.

Πράγματι, ο ένας εγκλεισμός $f)Q^{(n)} + Q^{(n+1)} \subset Q^{(n)}$ είναι προφανής. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι αφού $Q^{(n)} \subset (f) + Q^{(n+1)}$ έπεται ότι $\forall x \in Q^{(n)}$, $x = af + g$ όπου $g \in Q^{(n+1)}$. Επομένως $af = x - g \in Q^{(n)}$ και άρα υπάρχει $y \notin Q$ έτσι ώστε $afy \in Q^n$. Όμως ούτε $f \notin Q$ και άρα $yf \notin Q$. Έπεται ότι $a \in Q^{(n)}$ και άρα $x \in (f)Q^{(n)} + Q^{(n+1)}$ όπως ήταν το ζητούμενο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$. Πράγματι

$$(f)\left(Q^{(n)}/Q^{(n+1)}\right) = \left((f)Q^{(n)} + Q^{(n+1)}\right) / Q^{(n+1)} = Q^{(n)}/Q^{(n+1)}$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα του Nakayama.

Τέλος θα δείξουμε ότι $Q^n R_Q = 0$. Πράγματι $Q^n R_Q = Q^{(n)} R_Q = Q^{(n+1)} R_Q = Q^{n+1} R_Q$ δηλαδή $Q^n R_Q = Q^{n+1} R_Q$, οπότε και πάλι από το Λήμμα του Nakayama έπεται ότι $Q^{(n)} R_Q = 0$. Αφού λοιπόν το μέγιστο ιδεώδες στο δακτύλιο $R_Q$ είναι μηδενοδύναμο, έπεται ότι $\operatorname{Ass}(R_Q) = \{QR_Q\}$ και άρα $\dim R_Q = 0$. □

Για $n \geq 1$ ισχύει η παρακάτω γενίκευση:

**Θεώρημα 5.** *Έστω* $P \in \operatorname{Spec} R$, $f_1, \ldots, f_n \in R$ *και* $(f_1, \ldots, f_n) \subset P$ *ελαχιστοτικά, τότε* $\dim R_P \leq n$.

*Απόδειξη.* Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(R, P)$ είναι τοπικός δακτύλιος. Θα κάνουμε επαγωγή στο $n$: το επαγωγικό βήμα $n = 1$ είναι το Θεώρημα 4. Έστω λοιπόν $n > 1$. Αν $\dim R = 0$ δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\dim R \geq 1$. Έστω $P_1 \subsetneq P$ ελαχιστοτικά, όπου $P_1 \in \operatorname{Spec} R$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\operatorname{ht} P_1 \leq n - 1$. Για να το κάνουμε αυτό θα δείξουμε ότι $P_1$ περιέχει ελαχιστοτικά ένα ιδεώδες που παράγεται από $n - 1$ στοιχεία και θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της επαγωγής.

Αφού $(f_1, \ldots, f_n) \subset P$ ελαχιστοτικά έπεται ότι υπάρχει φυσικός $t$ έτσι ώστε $P^t \subset (f_1, \ldots, f_n)$ ενώ παράλληλα $(f_1, \ldots, f_n) \not\subset P_1$. Έστω $f_1 \notin P_1$. Αφού $P_1 \subsetneq P$ ελαχιστοτικά, έπεται ότι $(P_1, f_1) \subset P$ ελαχιστοτικά και άρα υπάρχει $m$ έτσι ώστε $P^m \subset (P_1, f_1)$. Άρα για $i = 2, \ldots n$ ισχύει ότι $f_i^m = y_i + a_i f_1$ όπου $y_i \in P_1$. Επομένως για $r \gg 0$ (για παράδειγμα $r \geq \binom{m}{n-1}$) προκύπτει ότι

$$P^{rt} = (P^t)^r \subset (f_1, \ldots, f_n)^r \subset (f_1, y_2, \ldots, y_n) .$$

Άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P^k \subset (f_1, y_2, \ldots, y_n)$. Έστω $S = R/(y_2, \ldots, y_n)$. Τότε $S$ είναι τοπικός δακτύλιος, το μέγιστο ιδεώδες του $S$ είναι $P/(y_2, \ldots, y_n)$. Επίσης ισχύει ότι

$$(P/(y_2, \ldots, y_n))^k = \left(P^k + (y_2, \ldots, y_n)\right) /(y_2, \ldots, y_n) \subset (f_1, y_2, \ldots, y_n) / (y_2, \ldots, y_n) = (f_1) + (y_2, \ldots, y_n) / (y_2, \ldots, y_n) .$$

Άρα ο εγκλεισμός $(f_1) + (y_2, \ldots, y_n) / (y_2, \ldots, y_n) \subset P/(y_2, \ldots, y_n)$ είναι ελαχιστοτικός. Από το Θεώρημα 4 ότι $\operatorname{ht} P/(y_2, \ldots, y_n) \leq 1$. Όμως $P_1/(y_2, \ldots, y_n) \subsetneq P/(y_2, \ldots, y_n)$, επομένως $\operatorname{ht} P/(y_2, \ldots, y_n) = 1$ και κατά συνέπεια $\operatorname{ht} P_1/(y_2, \ldots, y_n)$ είναι 0. Αυτό σημαίνει ότι $(y_2, \ldots, y_n) \subset P_1$ ελαχιστοτικά, και επομένως $\operatorname{ht} P_1 \leq n - 1$ σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. □

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την αντίστροφη κατεύθυνση του Θεωρήματος 5.

**Θεώρημα 6.** *Έστω* $P \in \operatorname{Spec} R$, $\operatorname{ht} P = 1$. *Τότε υπάρχει* $f \in R$ *έτσι ώστε* $(f) \subset P$ *ελαχιστοτικά.*

*Απόδειξη.* Έστω $A = \{P : P \in \operatorname{Spec} R, (0) \subset P$ ελαχιστοτικά.$\}$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\operatorname{Ass}(R)$ και άρα είναι πεπερασμένο. Έστω $A = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Σημειώνουμε ότι $\operatorname{ht} P_i = 0$ για $i = 1, \ldots, r$. Αφού $P \notin A$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Αποφυγής Πρώτων Ιδεωδών, έπεται ότι $P \not\subset P_1 \cup \cdots \cup P_r$. Άρα υπάρχει $f \in P$ έτσι ώστε $f \notin P_i$ για $i = 1, \ldots, r$. Αφού $f \in P \Rightarrow (f) \subset P$. Αν ο εγκλεισμός δεν ήταν ελαχιστοτικός, τότε $\exists Q \in \operatorname{Spec} R$ έτσι ώστε $(f) \subset Q \subsetneq P$. Όμως $Q \notin A$ αφού $f \in Q$ και άρα $\operatorname{ht} Q \geq 1$. Επομένως $\operatorname{ht} P \geq 2$, άτοπο. □

**Πόρισμα 1.** *Έστω* $P \in \operatorname{Spec} R$, $\operatorname{ht} P = n \geq 1$. *Τότε υπάρχουν* $f_1, \ldots, f_n \in R$ *έτσι ώστε* $(f_1, \ldots, f_n) \subset P$ *ελαχιστοτικά.*

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $n$, το επαγωγικό βήμα είναι το Θεώρημα 6. Αφού $\operatorname{ht} P = n$ υπάρχει μία ακολουθία $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$. Έστω $f_1, \ldots, f_{n-1}$ έτσι ώστε $(f_1, \ldots, f_{n-1}) \subset P_{n-1}$ ελαχιστοτικά. Τότε στον δακτύλιο $R/(f_1, \ldots, f_{n-1})$, θεωρούμε το ιδεώδες $P' = P/(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Παρατηρούμε ότι $\operatorname{ht} P' = 1$. Άρα υπάρχει $f_n + (f_1, \ldots, f_{n-1})$ έτσι ώστε $(f_1, \ldots, f_n) / (f_1, \ldots, f_{n-1}) \subset P/(f_1, \ldots, f_{n-1})$ ελαχιστοτικά και επομένως $(f_1, \ldots, f_n) \subset P$ ελαχιστοτικά. □

Το Πόρισμα 1 είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον στη τοπική περίπτωση.

**Πόρισμα 2.** *Έστω $(R, P)$ τοπικός δακτύλιος της Noether. Τότε $\dim R$ είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός $d$ έτσι ώστε να υπάρχουν $f_1, \ldots, f_d \in P$ με την ιδιότητα $P^n \subset (f_1, \ldots, f_d)$ για $n \gg 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω $d = \operatorname{ht} P = \dim R$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1 υπάρχουν $f_1, \ldots, f_d \in R$ έτσι ώστε $(f_1, \ldots, f_d) \subset P$ ελαχιστοτικά. Επομένως, αφού $(R, P)$ είναι τοπικός, έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P^n \subset (f_1, \ldots, f_d)$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν $f_1, \ldots, f_s \in P$ με την ιδιότητα $P^n \subset (f_1, \ldots, f_s)$ για $n \gg 0$. Αυτό σημαίνει ότι $(f_1, \ldots, f_s) \subset P$ ελαχιστοτικά και επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έπεται ότι $d = \operatorname{ht} P \leq s$. □

Το προηγούμενο πόρισμα μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.** *Έστω $(R, P)$ τοπικός δακτύλιος της Noether. Ένα ιδεώδες $q$ λέγεται παραμετρικό αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P^n \subset q$. Η ακολουθία $f_1, \ldots, f_d$ λέγεται σύστημα παραμέτρων αν $d = \dim R$ και $(f_1, \ldots, f_d)$ είναι παραμετρικό ιδεώδες.*

Απομονώνουμε ένα ιδιαίτερο συμπέρασμα του Πορίσματος 2.

**Πόρισμα 3.** *Έστω $(R, P)$ τοπικός δακτύλιος της Noether. Τότε $\dim R$ είναι το πολύ ίση με τον ελάχιστο αριθμό γεννητόρων του $P$ και έτσι $\dim R < \infty$.*

Έστω $(R, \mathfrak{m})$ ένας τοπικός δακτύλιος και έστω $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}$. Το $R$-module $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ είναι $\mathbb{k}$-module μέσω του πολλαπλασιασμού $(f+\mathfrak{m})\cdot(r+\mathfrak{m}^{n+1}) = rf+\mathfrak{m}^{n+1}$, (να ελεγχθεί ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη). Δηλαδή $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ είναι $\mathbb{k}$-διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση του Hilbert είναι η συνάρτηση

$$H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ H(n) = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})\ .$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι η συνάρτηση του Hilbert είναι πολυωνυμική: όταν $n >> 0$, υπάρχει πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, τέτοιο ώστε $H(n) = p(n)$. Το πολυώνυμο αυτό καλείται πολυώνυμο του Hilbert. Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε το παρακάτω που αποτελεί και αυτό ένα από τα βασικά θεωρήματα της Αντιμεταθετικής Άλγεβρας σχετικά με τη διάσταση. Θέτουμε τον βαθμό του μηδενικού πολυωνύμου ίσο με $-1$.

**Θεώρημα 7.** *Έστω $(R, \mathfrak{m})$ δακτύλιος της Noether και $p(x)$ το πολυώνυμο του Hilbert. Τότε $\dim R = 1 + \deg p(x)$.*

**Παραδείγματα 1.**

(1) Έστω $\mathbb{k}$ σώμα. Γνωρίζουμε ότι $\dim \mathbb{k} = 0$. Το μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{k}$ είναι $\mathfrak{m} = (0)$. Αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = 0$ έπεται $H(n) = p(x) = 0$ και $1 + \deg 0 = 0 = \dim \mathbb{k}$.

(2) Έστω $R = \mathbb{k}[x]_{(x)}$. Το μέγιστο ιδεώδες του $R$ είναι $\mathfrak{m} = \langle x \rangle$. Γνωρίζουμε ότι $\dim R = 1$. Αφού $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = \langle x^n \rangle / \langle x^{n+1} \rangle \cong \mathbb{k}x^n$. έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $H(n) = p(x) = 1$ και άρα $\deg p(x) = 0$, ενώ όντως $1 + \deg p(x) = \dim R$.

(3) Έστω $R = \mathbb{k}[x][x_1, x_2]_{(x_1, x_2)}$ με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2 \rangle$. Γνωρίζουμε ότι $\dim R = 2$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong \mathbb{k}x_1^n + \mathbb{k}x_1^{n-1}x_2 + \cdots + \mathbb{k}x_2^n$$

και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $H(n) = n + 1$, επομένως $\deg p(x) = 1$. Όντως $\dim R = 1 + \deg p(x)$.