ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ, 2013
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

1. Θεωρηματα Going up, Going down

Έστω $\phi: R \to R'$ ομομορφισμός δακτυλίων. Ο δακτύλιος R' γίνεται R-module με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $r \cdot s = \phi(r)s$. Θυμίζουμε ότι αν I είναι ιδεώδες του R τότε IR', η *επέκταση* του I στο R', είναι το παρακάτω ιδεώδες του R': $IR' = \{\sum_{i=1}^{t} \phi(r_i)s_i : r_i \in I, s_i \in R', t \in \mathbb{N}\}$. Έχουμε δει ότι αν $I \in \operatorname{Spec} R$ τότε IR' δεν είναι κατάνάγκη πρώτο ιδεώδες του R': για παράδειγμα $I = 2\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ενώ $I\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \notin \operatorname{Spec}\mathbb{Q}$. Θυμίζουμε επίσης ότι αν J είναι ιδεώδες του R' τότε $J \cap R$, ο *περιορισμός* του J στο R, είναι το ιδεώδες $J \cap R = \{r : \phi(r) \in J\}$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι αν $J \in \operatorname{Spec} R'$ τότε $J \cap R \in \operatorname{Spec} R$. Οι εγκλεισμοί του επόμενου λήμματος αποδεικνύονται εύκολα.

Λήμμα 1. *Έστω $\phi: R \to R'$ ομομορφισμός δακτυλίων, I ιδεώδες του R και J ιδεώδες του R'. Τότε*

- $I \subset (IR') \cap R$
- $J \supset (J \cap R)R'$.

Η τοπικοποίηση έχει τη παρακάτω ιδιότητα ως προς τις επεκτάσεις και τους περιορισμούς:

Λήμμα 2. *Έστω U πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο του R, $\phi : R \to U^{-1}R$ ο κανονικός ομομορφισμός: $r \mapsto \frac{r}{1}$. Έστω $P \in \operatorname{Spec} R$ έτσι ώστε $P \cap U = \emptyset$. Τότε $P(U^{-1}R) \cap R = P$.*

Απόδειξη. Έστω $P' = P(U^{-1}R)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα ισχύει ο εγκλεισμός $P \subset P' \cap R$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $P' \cap R \subset P$. Έστω $r \in R$ έτσι ώστε $\phi(r) \in P'$. Επομένως $\frac{r}{1} = \frac{p}{s}$ όπου $p \in P$ και $s \in U$. Έπεται ότι υπάρχει $t \in U$ έτσι ώστε $tsr = tp$ και επομένως $(ts)r \in P$. Αφού $ts \notin P$ και $P \in \operatorname{Spec} R$, έπεται ότι $r \in P$. Επομένως $P' \cap R \subset P$. □

Έστω τώρα $\phi: R \to R'$ μονομορφισμός. Θα λέμε ότι ο δακτύλιος R' είναι **ακέραιος** πάνω από τον R αν κάθε στοιχείο του R' είναι ακέραιο πάνω από τον $\phi(R)$:

$$\forall s \in R',\ \exists n \in \mathbb{N}, r_0, \ldots, r_{n-1} \in R :\ s^n + \phi(r_{n-1})s^{n-1} + \cdots + \phi(r_0) = 0\ .$$

Όταν $R \subset R'$ και $\phi: R \to R'$ είναι ο κανονικός εγκλεισμός, ($\phi(r) = r$), τότε έχουμε το συνήθη ορισμό.

Λήμμα 3. *Έστω $R \subset R'$ και R' ακέραιος πάνω από τον R. Αν $Q \in \operatorname{Spec} R'$ και $P = Q \cap R$ τότε $\phi : R/P \longrightarrow R'/Q$, $r + P \mapsto r + Q$ είναι μονομορφισμός και R'/Q είναι ακέραιο πάνω από τον R/P.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση ϕ είναι καλά ορισμένη αφού αν $r \in P$ τότε $r \in Q$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ϕ είναι ομομορφισμός. Επίσης ϕ είναι μονομορφισμός γιατί αν $r \in Q$ τότε $r \in P$. Έστω $s + Q \in R'/Q$. Αφού s ακέραιο πάνω από το R υπάρχουν $r_i \in R$, $i = 0, \ldots, n-1$ έτσι ώστε $s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_0 = 0$. Τότε $(s+Q)^n + (r_{n-1}+Q)(s+Q)^{n-1} + \cdots + (r_0+Q) = (s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_0) + Q = 0 + Q$. □

Έστω $R \subset R'$ και U πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Τότε U είναι επίσης πολλαπλασιαστικά κλειστό στο R'.

Λήμμα 4. *Έστω $R \subset R'$, R' ακέραιος πάνω από τον R, U πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Τότε $U^{-1}R'$ είναι ακέραιος πάνω από τον $U^{-1}R$.*

Απόδειξη. Πράγματι έστω $x = \frac{s}{u}$ τυχαίο στοιχείο του $U^{-1}R'$. Αφού s είναι ακέραιο πάνω από το R, υπάρχουν $r_i \in R$ για $i = 0, \ldots, n-1$ έτσι ώστε $s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_0 = 0$. Τότε

$$x^n + \frac{r_{n-1}}{u}\, x^{n-1} + \cdots + \frac{r_0}{u^n} = \frac{s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_0}{u^n} = \frac{0}{u^n}$$

και x είναι ακέραιο πάνω από τον R_P. □

Το επόμενο θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος της Επικάθησης (Lying Over) σε τοπικούς δακτυλίους.

Θεώρημα 1. *Έστω (R, P) τοπικός δακτύλιος, $R \subset S$ και S ακέραιος πάνω από τον R. Τότε υπάρχει $Q \in \mathrm{Spec}(S)$, έτσι ώστε $Q \cap R = P$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι $PS \neq S$. Έστω ότι $PS = S$. Αφού $1 \in PS$, υπάρχουν $s_i \in S$, $p_i \in P$ για $i = 1, \ldots, t$ έτσι ώστε $1 = \sum_{i=1}^{t} p_i s_i$. Τα s_i είναι ακέραια πάνω από το R, άρα η πεπερασμένα παραγόμενη R-άλγεβρα $M = R[s_1, \ldots, s_t]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Αφού $1 \in PM \Rightarrow M \subset PM \Rightarrow M = PM$ και από το λήμμα του Nakayama προκύπτει ότι $M = 0$, άτοπο. Άρα $PS \neq S$. Επομένως, υπάρχει $Q \in \mathrm{maxSpec}(S)$, έτσι ώστε $PS \subset Q$. Παρατηρούμε ότι $P \subset PS \cap R \subset Q \cap R \subset P$ (ο τελευταίος εγκλεισμός ισχύει αφού P είναι το μέγιστο ιδεώδες του R). Έπεται ότι $P = PS \cap R = Q \cap R$. □

Το θεώρημα ισχύει και όταν R δεν είναι τοπικός δακτύλιος.

Θεώρημα 2. (Lying Over) *Έστω R, S δακτύλιοι, με $R \subset S$ και S ακέραιος πάνω από τον R. Έστω $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Υπάρχει $Q \in \mathrm{Spec}(S)$, έτσι ώστε $Q \cap R = P$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $U = R \backslash P$ είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Σύμφωνα με το Λήμμα 4 $U^{-1}S$ είναι ακέραιος πάνω από τον R_P. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 υπάρχει $Q' \in \mathrm{Spec}(U^{-1}S)$, έτσι ώστε $Q' \cap R_P = PR_P$. Έστω $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ έτσι ώστε $Q \cap U = \emptyset$ και $Q' = Q(U^{-1}S)$. Θα αποδείξουμε ότι $Q \cap R = P$. Πράγματι έστω $r \in Q \cap R$. Τότε αν θεωρήσουμε τον κανονονικό ομομορφισμό $R \longrightarrow U^{-1}R$ παρατηρούμε ότι $\frac{r}{1} \in Q(U^{-1}S) \cap R_P$, δηλαδή $\frac{r}{1} \in Q' \cap R_P = PR_P$. Άρα $r \in P$. Αντιστρέφοντας τους συλλογισμούς προκύπτει ότι αν $r \in P \Rightarrow r \in Q \cap R$. Άρα $Q \cap R = P$. □

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως το Θεώρημα *ανάβασης* (Going Up).

Θεώρημα 3. (Going Up) *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων κι S είναι ακέραιος πάνω από τον R. Έστω $P_1 \in \mathrm{Spec}\, R$, $Q_1 \in \mathrm{Spec}\, S$ έτσι ώστε $Q_1 \cap R = P_1$. Έστω επίσης $P_2 \in \mathrm{Spec}\, R$ έτσι ώστε $P_1 \subset P_2$. Τότε, υπάρχει $Q_2 \in \mathrm{Spec}\, S$, έτσι ώστε $Q_2 \cap R = P_2$ και $Q_1 \subset Q_2$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 3, ο δακτύλιος S/Q_1 είναι ακέραιος πάνω από τον R/P_1. Θεωρούμε το πρώτο ιδεώδες $P_2/P_1 \in \mathrm{Spec}\, R/P_1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα

2 υπάρχει $Q_2/Q_1 \in \operatorname{Spec} S/Q_1$, έτσι ώστε $Q_2/Q_1 \cap R/P_1 = P_2/P_1$. Θα δείξουμε ότι $Q_2 \cap R = P_2$. Πράγματι

$$r \in Q_2 \cap R \Leftrightarrow r + P_1 \in (Q_2/Q_1 \cap R/P_1) = P_2/P_1 \Leftrightarrow r \in P_2$$

□

Το επόμενο θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος της *Μη Συγκρισιμότητας* (Incomparability).

Θεώρημα 4. *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός ακεραίων περιοχών με S ακέραιο πάνω από τον R, $Q \in \operatorname{Spec} S$ έτσι ώστε $Q \cap R = (0)$. Τότε, $Q = (0)$.*

Απόδειξη. Έστω $0 \neq s \in Q$ και έστω $s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_0 = 0$ η σχέση μικρότερου βαθμού n που ικανοποιείται από το s με τα $r_i \in R$, για $i = 0, \dots, n-1$. Αν $r_0 = 0$ τότε $s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s = 0 \Rightarrow s(s^{n-1} + r_{n-1}s^{n-2} + \cdots r_1) = 0 \Rightarrow s^{n-1} + r_{n-1}s^{n-2} + \cdots r_1 = 0$ (αφού S ακεραία περιοχή), άτοπο ως προς την επιλογή του n. Άρα $r_0 \neq 0$. Επομένως $-r_0 = s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s \in Q \cap R$, και πάλι άτοπο αφού $Q \cap R = 0$. Έπεται ότι $Q = (0)$. □

Η γενική περίπτωση είναι το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5. (Incomparability) *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων, S ακέραιος πάνω από τον R, $P \in \operatorname{Spec} R$, και $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Spec} S$ έτσι ώστε $Q_1 \cap R = P$ και $Q_2 \cap R = P$. Τότε, $Q_1 \not\subseteq Q_2$ και $Q_2 \not\subseteq Q_1$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $Q_1 \subset Q_2$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3, S/Q_1 ακέραιος πάνω από τον R/P. Σύμφωνα με την υπόθεση $Q_2/Q_1 \cap R/P = P$, άτοπο από το Θεώρημα 4. □

Η συνθήκη S ακέραιος πάνω από τον R είναι αναγκαία για να ισχύει το Θεώρημα της μη Συγκρισιμότητας. Για παράδειγμα αν $R = \Bbbk[x_1, x_2]$ όπου $\Bbbk$ σώμα τότε $\langle x_1 \rangle \Bbbk = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \Bbbk = 0$.

2. Διασταση του Krull

Λέμε ότι το *μήκος* της αυστηράς αύξουσας ακολουθίας πρώτων ιδεωδών του R

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

είναι n.

Ορισμός 1. Η *διάσταση του Krull του R*, συμβολίζεται με $\dim R$ και είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των μηκών αυστηρά αξουσών ακολουθιών πρώτων ιδεωδών του R. Έτσι $\dim R$ είτε είναι φυσικός αριθμός ≥ 0 είτε είναι ∞.

Παραδείγματα 1.

(1) Έστω $\Bbbk$ σώμα. Τότε $\dim \Bbbk = 0$. Παρατηρούμε ότι η διάσταση του $\Bbbk$ ως $\Bbbk$-διανυσματικός χώρος είναι 1: $\dim_{\Bbbk} \Bbbk = 1$.
(2) Έστω $\Bbbk$ σώμα. Ο δακτύλιος $R = \Bbbk[x]$ είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών και κάθε αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του R έχει μήκος 0 ή 1. Μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία με μέγιστο μήκος είναι της μορφής $0 \subsetneq \langle f(x) \rangle$ όπου $f(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο. Έπεται ότι $\dim R = 1$. Παρατηρούμε ότι η διάσταση του R ως $\Bbbk$-διανυσματικός χώρος είναι ∞: $\dim_{\Bbbk} R = \infty$.
(3) $\dim \mathbb{Z} = 1$.
(4) Τα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/(6)$ αντιστοιχούν σε πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ που περιέχουν το 6: δηλαδή το $\langle 2 \rangle$ και το $\langle 3 \rangle$. Έπεται ότι $\dim \mathbb{Z}_6 = 0$.

(5) Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, x_2]/\langle {x_1}^2, {x_2}^2, x_1x_2\rangle$ όπου $\mathbb{k}$ σώμα. Τα πρώτα ιδεώδη του R αντιστοιχούν σε πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{k}[x_1, x_2]$ που περιέχουν το $I = \langle {x_1}^2, {x_2}^2, x_1x_2\rangle$. Αν $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2\rangle$, τότε $\mathfrak{m}^2 = I$ και άρα I είναι $\mathfrak{m}$-πρωταρχικό. Το μοναδικό πρώτο ιδεώδες του R είναι το $\mathfrak{m}/I$. Άρα $\dim R = 0$.

(6) Έστω $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος. Τότε $\dim(R/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$.

(7) Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, x_2]$ όπου $\mathbb{k}$ σώμα. Αφού $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq \langle x_1, x_2\rangle$ έπεται ότι $\dim R \geq 2$

(8) Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, x_2, \ldots]$ όπου $\mathbb{k}$ σώμα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\dim R = \infty$. Ο δακτύλιος R δεν είναι δακτύλιος της Noether.

(9) Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, x_2, \ldots]$ όπου $\mathbb{k}$ σώμα. Έστω $P_1 = \langle x_1\rangle$,$P_2 = \langle x_2, x_3\rangle$,$P_3 = \langle x_4, x_5, x_6\rangle$ και ούτω καθεξής.Έστω $U = R \setminus \cup P_i$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι U είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο του R. (Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα το U, ας ελέγξει ο αναγνώστης αν κάποια συγκεκριμένα στοιχεία του R ανήκουν στο U. Για παράδειγμα $x_1 \notin U$, ενώ $x_1 + x_2 \in U$). Αν $Q \in \operatorname{Spec} R$ και $Q \cap U = \emptyset$, υπάρχει κάποιο $i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $Q \subset P_i$. Έστω λοιπόν $S = U^{-1}R$. Σύμφωνα με τα παραπάνω $\operatorname{Spec}(S) = \{PS : \ P \subset P_i, i \in \mathbb{N}\}$. Είναι φανερό ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του S με μήκος i. Για παράδειγμα για $i = 3$ έχουμε την ακολουία
$$0 \subsetneq x_4S \subsetneq \langle x_4, x_5\rangle S \subsetneq P_3S\,.$$
Έπεται ότι $\dim S = \infty$. Μπορεί να δείξει κανείς με τεχνικές τοπικοποίησης, ότι κάθε ιδεώδες του S είναι πεπερασμένα παραγόμενο και άρα S είναι δακτύλιος της Noether.

(10) Είδαμε προηγουμένως ότι υπάρχουν δακτύλιοι της Noether με άπειρη διάσταση του Krull. Θα δούμε ότι αν (R, P) είναι τοπικός δακτύλιος της Noether, τότε $\dim R < \infty$.

Έστω $P \in \operatorname{Spec} R$. Ονομάζουμε *ύψος* (height) του P και συμβολίζουμε με $\operatorname{ht} P$, τον αριθμό $\dim R_P$. Έστω
$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$$
μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του R που καταλήγει στο P. Είναι φανερό ότι $\dim R_P = \operatorname{ht} P \geq n$. Έτσι είναι φανερό ότι

Πρόταση 1.
$$\dim R = \sup_{P \in \operatorname{Spec} R} \dim R_P$$

Το επόμενο θεώρημα θα δείξει ότι αν ένας δακτύλιος είναι ακέραιος πάνω από κάποιον άλλον, τότε οι διαστάσεις τους είναι ίδιες.

Θεώρημα 6. *Αν $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων και ο S είναι ακέραιος πάνω από τον R, τότε* $\dim R = \dim S$.

Απόδειξη. Έστω $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$, μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του R. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα Θεωρήματα Επικάθησης και Ανάβασης βρίσκουμε ιδεώδη $Q_0, \ldots, Q_n \in \operatorname{Spec}(S)$ έτσι ώστε $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$. Άρα $\dim R \leq \dim S$.

Έστω τώρα $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του S. Από το Θεώρημα Μη Συγκρισιμότητας έπεται ότι για $i = 0, \ldots, n-1$, $Q_i \cap R \subsetneq Q_{i+1} \cap R$. Άρα $(Q_0 \cap R) \subsetneq (Q_1 \cap R) \subsetneq \cdots \subsetneq (Q_n \cap R)$, είναι αυστηρά αύξουσα ακολουθία πρώτων ιδεωδών του R και $\dim S \leq \dim R$. Το ζητούμενο έπεται. □