ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ, 2013
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

1. Προσαρτημενα πρωτα ιδεωδη

Έστω M ένα R-module.

Ορισμός 1. *Τα προσαρτημένα πρώτα ιδεώδη του M είναι τα στοιχεία του συνόλου* $\mathrm{Ass}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : \ R/P \hookrightarrow M\}$.

Είναι φανερό ότι

$$P \in \mathrm{Ass}(M) \Leftrightarrow \exists m \in M : \mathrm{ann}(m) = P \Leftrightarrow \exists M' : \ M' \text{ υπομodule του } M, \ R/P \ \cong M' .$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν P, m είναι όπως παραπάνω τότε $M' = Rm$. Επίσης αν $m' = rm \neq 0$ τότε $P = \mathrm{ann}(m')$. Πράγματι, $P \subset \mathrm{ann}(m')$ ενώ αν $s \in \mathrm{ann}(m')$ τότε $s(rm) = 0 \Rightarrow (sr)m = 0 \Rightarrow sr \in P \Rightarrow s \in P$ αφού $r \notin P$. Τέλος παρατηρούμε ότι $\mathrm{ann}(M) \subset P$ για κάθε $P \in \mathrm{Ass}(M)$.

Παραδείγματα 1.

(1) $R = \Bbbk[x, y]$. Τότε $\mathrm{Ass}(R) = \{(0)\}$.
(2) $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Τότε $\mathrm{Ass}(R/P) = \{P\}$.
(3) $R = \Bbbk[x, y]$, $M = R/I$ όπου $I = (x^3, x^2y)$. Τότε $P = (x, y) \in \mathrm{Ass}(M)$ αφού $P = \mathrm{ann}(x^2 + I)$. Επίσης $Q = (x) \in \mathrm{Ass}(M)$ αφού $Q = \mathrm{ann}(xy + I)$. Πράγματι $x \in \mathrm{ann}(xy)$. Εάν $f(x, y) = \sum a_i x^i y^j \in \mathrm{ann}(xy)$ τότε $a_i x^{i+1} y^{j+1} = x^2(r_1 x + r_2 y)$. Έπεται ότι $i \geq 1$ και άρα $f(x, y) \in (x)$.

Πρόταση 1. *Έστω ότι $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία από R-modules. Τότε* $\mathrm{Ass}(M_1) \subset \ \mathrm{Ass}(M_2) \ \subset \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M_3)$.

Απόδειξη. Αν $P \in \mathrm{Ass}(M_1)$ τότε $R/P \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow M$ επομένως $P \in \mathrm{Ass}(M_2)$. Έστω τώρα $P \in \mathrm{Ass}(M_2)$ ενώ $P \notin \mathrm{Ass}(M_1)$. Θέτουμε N το υπομodule του M έτσι ώστε $R/P \ \cong N$. Αν $m = f(m') \in f(M_1) \cap N$, τότε $P = \mathrm{ann}(m')$ αφού $m \in N$ και άρα $P \notin \mathrm{Ass}(M_1)$, άτοπο. Επομένως $f(M_1) \cap N = \{0\}$. Θα δείξουμε ότι $P = \mathrm{ann}(g(m)$. Πράγματι είναι άμεσο ότι $P \subset g(m)$. Αντίστροφα, αν $r \in \mathrm{ann}(g(m)$ τότε $0 = r(g(m)) = g(rm) \Rightarrow rm \in f(M_1) \Rightarrow rm = 0 \Rightarrow r \in P$. □

Πρόταση 2. *Έστω ότι $M = M_1 \oplus M_2$. Τότε* $\ \mathrm{Ass}(M) \ = \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M_3)$.

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από τη προηγούμενη πρόταση αφού $\mathrm{Ass}(M_1), \mathrm{Ass}(M_2) \subset \mathrm{Ass}(M)$. □

Έστω τώρα R δακτύλιος της Noether.

Πρόταση 3. *Έστω $M \neq 0$ ένα R-module. Τότε* $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω $S = \{\mathrm{ann}(m) : \ m \in M, m \neq 0\}$. Τότε S είναι μη κενό υποσύνολο ιδεωδών του R άρα έχει μέγιστο στοιχείο, έστω I. Θα δείξουμε ότι $I \in \mathrm{Spec}(R)$. Έστω $I = \mathrm{ann}(m)$, $rs \in I$, $s \notin I$. Αφού $I \subset \mathrm{ann}(sm)$ και $r \in \mathrm{ann}(sm)$ έπεται ότι $r \in I$ για να μην καταλήξουμε σε άτοπο, αφού I είναι μέγιστο στο S. □

Θα λέμε ότι $0 \neq r$ είναι διαιρέτης του μηδενός του M αν $\exists m \in M$, $m \neq 0$ έτσι ώστε $rm = 0$. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $P \in \mathrm{Ass}(M)$ τότε όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του P είναι διαιρέτες του μηδενός του M. Αντίστροφα, κάθε διαιρέτης του μηδενός θα περιέχεται στο σύνολο S της παραπάνω απόδειξης, άρα και σε ένα μέγιστο στοιχείο του S. Η προηγούμενη όμως δείχνει ότι κάθε μέγιστο στοιχείο του S ανήκει στους $\mathrm{Ass}(M)$. Επομένως έχουμε το παρακάτω:

Πρόταση 4. *Έστω $M \neq 0$ ένα R-module και I το σύνολο των διαιρετων του μηδενός του M. Τότε*
$$\bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}(M)} Q = I \cup \{0\}$$

Πρόταση 5. *Έστω $M \neq 0$ ένα R-module και S πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο του R. Τότε*
$$\mathrm{Ass}(S^{-1}M) = \{PS^{-1}R : \ P \in \mathrm{Ass}(M), P \cap S = \emptyset\}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $P \in \mathrm{Ass}(M)$ και ότι $P \cap S = \emptyset$. Από το τελευταίο έπεται ότι $S^{-1}P \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$. Αφού $P \in \mathrm{Ass}(M)$ έπεται ότι $R/P \hookrightarrow M$ και αφού οι μονομορφισμοί διατηρούνται μετά το πέρασμα στη τοπικοποίηση έπεται ότι $S^{-1}(R/P) \hookrightarrow S^{-1}M$ και αφού $S^{-1}R/S^{-1}P \cong S^{-1}R/S^{-1}P$ προκύπτει ότι $\{PS^{-1}R : \ P \in \mathrm{Ass}(M), P \cap S = \emptyset\} \subset \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό έστω ότι $PS^{-1}R \in \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$, όπου $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $P \cap S = \emptyset$. Θα δείξουμε ότι $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Έστω ότι $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ με την ιδιότητα $PS^{-1}R = \mathrm{ann}(\frac{m}{s})$. Αφού R είναι δακτύλιος της Noether, $P = (r_1, \ldots, r_n)$. Άρα για $i = 1, \ldots, n$, ισχύει ότι $\frac{r_i}{1}\frac{m}{s} = 0 \Rightarrow t_i r_i m = 0 \Rightarrow r_i(t_i m) = 0$ για κάποιο $t_i \in S$. Παρατηρούμε ότι $t_i m \neq 0$, διαφορετικά $\frac{m}{s} = 0$, άτοπο. Έπεται ότι $P \subset \mathrm{ann}(t_1 \cdots t_n m)$. Επίσης έστω ότι $r \in \mathrm{ann}(t_1 \cdots t_n m)$. Τότε $\frac{r}{1} \in \mathrm{ann}(\frac{m}{1}) = PS^{-1}R$ και άρα $tr \in P$ για κάποιο $t \in S$. Αφού $t \notin P$ έπεται ότι $r \in P$ και επομένως $P \subset \mathrm{ann}(t_1 \cdots t_n m)$. Άρα $P = \mathrm{ann}(t_1 \cdots t_n m)$ και $P \in \mathrm{Ass}(M)$. □

Θα λέμε ότι $P \in \mathrm{Spec}(R)$ περιέχει το ιδεώδες J ελαχιστοτικά στο $\mathrm{Spec}(R)$ εννοώντας ότι δεν υπάρχει $Q \subsetneqq P$ στο $\mathrm{Spec}(R)$ έτσι ώστε $J \subset Q$. Θα αξιοποιήσουμε τη τεχνική της τοπικοποίησης για να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6. *Έστω $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $\mathrm{ann}(M) \subset P$ ελαχιστοτικά, τότε $P \in \mathrm{Ass}(M)$.*

Απόδειξη. Αφού $\mathrm{ann}(M) \subset P \Rightarrow \ M_P \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{Ass}(M_P) \neq \emptyset$. Έστω $QR_P \in \mathrm{Ass}(M_P)$. Τότε $Q \subset P$ αφού PR_P είναι το μέγιστο ιδεώδες του R_P ενώ $Q \in \mathrm{Ass}(M)$ εξαιτίας της προηγούμενης πρότασης. Άρα αναγκαστικά $\mathrm{ann}(M) \subset Q$ και επομένως $Q = P$ αφού δεν υπάρχει μικρότερο ιδεώδες του Q που να περιέχει $\mathrm{ann}(M)$. □

Για τη συνέχεια αυτής της ενότητας R είναι δακτύλιος της Noether και $0 \neq M$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Προκύπτει ότι M είναι R-module της Noether.

Πρόταση 7. *Έστω $M \neq 0$ ένα R-module. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και μία πεπερασμένη ακολουθία*
$$0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$
έτσι ώστε $M_i/M_{i-1} \cong R/P_i$ για κάποια $P_i \in \mathrm{Spec}(R)$ και $\mathrm{Ass}(M) \subset \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Απόδειξη. Έστω $P \in \mathrm{Ass}(M)$, M_1 το υποmodule του M έτσι ώστε $R/P \cong M_1$. Αν $M_1 = M$ τότε η πρόταση έχει αποδειχθεί. Διαφορετικά $M/M_1 \neq 0$ και υπάρχει $P_2 \in \mathrm{Ass}(M/M_1)$ και M_2/M_1 υποmodule του M/M_1 έτσι ώστε $R/P \cong M_2/M_1$. Έτσι ξεκινά η ακολουθία μας: $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$. Σε κάθε βήμα i αν $M_i \neq M$ τότε βρίσκουμε M_{i+1} έτσι ώστε $R/P_{i+1} \cong M_{i+1}/M_i$ για κάποιο $P_i \in \mathrm{Ass}(M/M_{i-1}$. Αφού M είναι R-module της Noether η ακολουθία αυτή θα γίνει στατική: ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό είναι $M = M_n$ για κάποιο n. Παρατηρούμε επίσης ότι από την βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to M_{n-1} \to M \to M/M_{n-1} \to 0$ προκύπτει ότι $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M_{n-1}) \cup \{P_n\}$. Επίσης από την βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$ για $i = n-1, \ldots, 1$ προκύπτει ότι $\mathrm{Ass}(M_i) \subset \mathrm{Ass}(M_{i-1}) \cup \mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1})$. Όμως $\mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1}) = \{P_i\}$. Έτσι αντικαθιστώντας για κάθε i, προκύπτει ότι $\mathrm{Ass}(M) \subset \{P_1, \ldots, P_n\}$. □

Πρόταση 8. $\mathrm{Ass}(M)$ *είναι πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης. □

Ορισμός 2. *Θα λέμε ότι το R-υποmodule N του M είναι P-πρωταρχικό αν* $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$.

Θα δούμε πότε το $\mathbf{0}$ είναι P-πρωταρχικό στο M. Θυμίζουμε ότι με I συμβολίζουμε το σύνολο των διαιρετών του μηδενός του M. Θυμίζουμε επίσης ότι αν J ιδεώδες του R τότε

$$\mathrm{rad}(J) = \{r : r^n \in J, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}\, R \\ I \subset P}} P\,.$$

Πρόταση 9. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathrm{Ass}(M) = \{P\}$.
(2) P *περιέχει* $\mathrm{ann}(M)$ *ελαχιστοτικά στο* $\mathrm{Spec}(R)$ *και* $I \subset P$.
(3) $P^n \subset \mathrm{ann}(M)$ *και* $I \subset P$.

Απόδειξη. $1 \Rightarrow 2$: Γνωρίζουμε ότι όλα τα πρώτα ιδεώδη που περιέχουν ελαχιστοτικά $\mathrm{ann}(M)$ ανήκουν στο $\mathrm{Ass}(M)$. Αφού $\mathrm{Ass}(M) = \{P\}$ έπεται ότι P είναι το μόνο πρώτο ιδεώδες που περιέχει ελαχιστοτικά $\mathrm{ann}(M)$. Από τη Πρόταση 4 προκύπτει ότι $I \subset P$.

$2 \Rightarrow 3$: Αφού P περιέχει $\mathrm{ann}(M)$ ελαχιστοτικά στο $\mathrm{Spec}(R)$ έπεται ότι PR_P περιέχει $\mathrm{ann}(M_P)$ ελαχιστοτικά στο $\mathrm{Spec}(R_P)$. Άρα $\mathrm{rad}(\mathrm{ann}(M_P)) = PR_P$. Αφού P και άρα PR_P είναι πεπερασμένα παραγόμενα (R είναι δακτύλιος της Noether) έπεται ότι υπάρχει κάποιο n έτσι ώστε $(PR_P)^n = P^n R_P \subset \mathrm{ann}(M_P)$. Έστω $r \in P^n$. Τότε $\frac{r}{1}\frac{m}{s} = 0$ για κάθε $m \in M, s \in S$. Επομένως $trm = 0$ για κάποιο $t \in S$ (που εξαρτάται από το m) για κάθε $m \in M$. Όμως $I \subset P$ και επειδή δε μπορεί να υπάρχει διαιρέτης του μηδενός στο S, έπεται ότι $rm = 0$ δηλαδή $r \in \mathrm{ann}(M)$. Επομένως $P^n \subset \mathrm{ann}(M)$.

$2 \Rightarrow 3$: Έστω ότι $P^n \subset \mathrm{ann}(M)$, $I \subset P$ και έστω $Q \in \mathrm{Ass}(M)$. Τότε $\mathrm{ann}(M) \subset Q$ δηλαδή $P^n \subset Q$. Αφού Q πρώτο ιδεώδες έπεται ότι $P \subset Q$. Άρα P περιέχει $\mathrm{ann}(M)$ ελαχιστοτικά στο $\mathrm{Spec}(R)$ και αναγκαστικά $P \in \mathrm{Ass}(M)$ σύμφωνα με την Πρόταση 6. Επίσης εάν $Q \neq P$ τότε υπάρχει $r \in Q \setminus P$. Τότε όμως $r \notin I$ και άρα r δεν είναι διαιρέτης του μηδενός, άτοπο. □

Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το $\mathbf{0}$ μπορεί να γραφεί ως η τομή πρωταρχικών υποmodules του M που καθορίζουνε το συνόλουν $\mathrm{Ass}(M)$. Πρώτα θα δείξουμε ότι $\mathbf{0}$ μπορεί να γραφεί ως η τομή αναγώγων υποmodules του M, μία έννοια που ορίζουμα αμέσως μετά.

Ορισμός 3. *N λέγεται* **ανάγωγο** *αν το N δε μπορεί να γραφεί ως η τομή $N = N_1 \cap N_2$, όπου $N \neq N_1$ και $N \neq N_2$.*

Πρόταση 10. *Κάθε υποmodule του M μπορεί να γραφεί ως η πεπερασμένη τομή αναγώγων υποmodules του M.*

Απόδειξη. Έστω Σ το σύνολο των υποmodules του M για τα οποία δεν ισχύει η πρόταση. Έστω ότι $\Sigma \neq \emptyset$. Αφού M είναι module της Noether, Σ έχει μέγιστο στοιχείο, έστω N. Το N δεν είναι ανάγωγο, άρα $N = N_1 \cap N_2, N \subsetneq N_1, N_2$. Άρα $N_1, N_2 \notin \Sigma$ και επομένως $N_1 = N_{11} \cap \cdots \cap N_{1r}$ και $N_2 = N_{21} \cap \cdots \cap N_{2t}$, όπου N_{ij} ανάγωγα, για όλα τα i, j. Επομένως $I = N_{11} \cap \cdots \cap N_{1r} \cap N_{21} \cap \cdots \cap N_{2t} \notin \Sigma$, άτοπο. $\square$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ανάγωγο υποmodule του M είναι και P-πρωταρχικό για κάποιο $P \in \operatorname{Spec}(R)$.

Πρόταση 11. *Έστω N ανάγωγο υποmodule του M. Τότε $\operatorname{Ass}(M/N) = \{P\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $P_1, P_2 \in \operatorname{Ass}(M/N)$ έτσι ώστε $P_1 \neq P_2$. Έστω M_1, M_2 υποmodules του M έτσι ώστε $R/P_1 \cong M_1/N$, $R/P_2 \cong M_2/N$. Είναι φανερό ότι $M_1/N \ \cap \ M_2/N = (M_1 \cap M_2)/N$. Αν $M_1 \cap M_2 \neq N$ και $n + N \in (M_1 \cap M_2)/N$ τότε $\operatorname{ann}(n + N) = P_1$ αφού $n+N \in \ M_1/N$ και $\operatorname{ann}(n+N) = P_2$ αφού $n+N \in \ M_2/N$, άτοπο. Άρα $M_1 \cap M_2 = N$ και άρα $M_1 = N$ ή $M_2 = N$ αφού N ανάγωγο. Σε κάθε περίπτωση αυτό είναι άτοπο αφού $M_i/N \neq \mathbf{0}$. Τελικά ο μόνος τρόπος για να αποφύγουμε το άτοπο είναι να δεχτούμε ότι δεν υπάρχουν $P_1, P_2 \in \operatorname{Ass}(M/N)$ έτσι ώστε $P_1 \neq P_2$. $\square$

Ορισμός 4. *$\mathbf{0} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ λέγεται πρωταρχική ανάλυση του $\mathbf{0}$ αν $\operatorname{Ass}(M/M_i) = \{P_i\}$ για $i = 1, \ldots, n$. Η πρωταρχική ανάλυση $\mathbf{0} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ δεν έχει κανέναν περιττό όρο αν $\cap_{i \neq j} M_i \neq \mathbf{0}$ για $j = 1, \ldots, n$. Η πρωταρχική ανάλυση $\mathbf{0} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ λέγεται ελάχιστη αν δεν υπάρχει άλλη πρωταρχική ανάλυση του $\mathbf{0}$ που να έχει μικρότερο αριθμό όρων.*

Πρόταση 12. *Αν $\mathbf{0} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ είναι πρωταρχική ανάλυση του $\mathbf{0}$ τότε $\operatorname{Ass}(M) \subset \{P_1, \ldots, P_n\}$ όπου $\{P_i\} = \operatorname{Ass}(M_i)$. Όταν η ανάλυση δεν έχει κανέναν περιττό όρο τότε $\operatorname{Ass}(M) = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Όταν η ανάλυση είναι ελάχιστη και $\operatorname{ann}(M) \subset P_j$ ελαχιστοτικά, τότε $M_j = \operatorname{Ker}(M \to M_{P_j})$, $(m \mapsto \frac{m}{1})$.*