ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ, 2013
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΧΑΡΑ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΠΘ

1. Λημμα Κανονικοποίησης της Noether και Hilbert's Nullstellensatz

Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων και $a \in S$. Το σύνολο $R[a] = \{f(a) : f(x) \in R[x]\}$ είναι δακτύλιος. Γενικεύοντας αν $a_1, \ldots, a_n \in S$, γράφουμε $R[a_1, \ldots, a_n] := R[a_1, \ldots, a_{n-1}][a_n]$ και παρατηρούμε ότι

(1) $R[a_1, \ldots, a_n] = \{f(a_1, \ldots, a_n) : f(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n]\}$,
(2) $R[a_1, \ldots, a_n] \cong R[x_1, \ldots, x_n]/I$ όπου I είναι ο πυρήνας του ομομορφισμού

$$R[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R[a_1, \ldots, a_n], \quad f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n) .$$

Μία *πεπερασμένα παραγόμενη R-άλγεβρα* είναι ένας δακτύλιος της μορφής $R[a_1, \ldots, a_n]$. Αντίστροφα, αν I ιδεώδες του $R[x_1, \ldots, x_n]$ τότε $R[x_1, \ldots, x_n]/I$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη R-άλγεβρα αφού $R[x_1, \ldots, x_n]/I = R[a_1, \ldots, a_n]$ όπου $a_i = x_i + I$, $i = 1, \ldots, n$. Έστω τώρα $\Bbbk \subset K$ εγκλεισμός σωμάτων και έστω $a_1, \ldots, a_n \in K$. Τα $a_1, \ldots, a_n$ λέγονται *αλγεβρικά ανεξάρτητα* πάνω από το $\Bbbk$, αν δεν υπάρχει μη μηδενικό $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, τέτοιο ώστε $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Είναι φανερό ότι $a_1, \ldots, a_n$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\Bbbk$ αν και μόνο αν $\Bbbk[a_1, \ldots, a_n] \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Λέμε ότι $a_1, \ldots, a_n$ είναι *αλγεβρικά εξαρτημένα* πάνω από το $\Bbbk$ όταν δεν είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 1. *Έστω R, S δακτύλιοι, $R \subset S$ και $s \in S$. Λέμε ότι το s είναι ακέραιο (integral) πάνω από το R, αν ικανοποιεί μία σχέση της μορφής $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, όπου $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$. Με άλλα λόγια s είναι ακέραιο πάνω από το R αν $f(s) = 0$ για κάποιο μονικό πολυώνυμο $f(x) \in R[x]$. Αν όλα τα στοιχεία του S είναι ακέραια πάνω από το R, τότε λέμε ότι ο S είναι ακέραιος πάνω από τον R. Αν R είναι ακεραία περιοχή και Q το σώμα κλασμάτων του R, ($Q = S^{-1}R$ όπου $S = R \setminus \{0\}$) και τα μόνα ακέραια στοιχεία του Q πάνω από το R είναι τα στοιχεία του R τότε R λέγεται κανονικός (normal) δακτύλιος.*

Παραδείγματα 1.

(1) Ο δακτύλιος R είναι ακέραιος πάνω από τον R.
(2) Έστω $\Bbbk$ σώμα και $\Bbbk \subset R$. $r \in R$ είναι αλγεβρικό πάνω από το $\Bbbk$ αν και μόνο αν a είναι ακέραιο πάνω από το $\Bbbk$.
(3) Έστω $s = \sqrt{5}$. Παρατηρούμε ότι $s^2 - 5 = 0$ και $\sqrt{5}$ είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$.
(4) Έστω $\Bbbk \subset K$ εγκλεισμός σωμάτων. Ένα στοιχείο $r \in K$ είναι ακέραιο πάνω από το $\Bbbk$ αν και μόνο αν είναι αλγεβρικό πάνω από $\Bbbk$.

(5) Έστω $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Έχουμε $2s = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow 2s - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4s^2 - 4s + 4 = 5 \Rightarrow s^2 - s - 1 = 0$, άρα s είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$. Το s είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{Q}$.
(6) Έστω $s = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}$. Τότε $2s^2 - 2s - 1 = 0$ και s είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{Q}$. Αφού s είναι ρίζα του $g(x) = 2x^2 - 2x - 1$, έπεται ότι δεν υπάρχει μονικό πολυώνυμο με ρίζα s, άρα s δεν είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$.
(7) $\mathbb{Z}$ είναι κανονικός. Πράγματι έστω ότι $\frac{m}{r}$ είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$ όπου $(m, r) = 1$. Τότε $(\frac{m}{r})^n + a_{n-1}(\frac{m}{r})^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, όπου $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ και άρα $m^n = r(-a_{n-1} - \cdots - a_0 r^{n-1})$. Επομένως r διαιρεί το m^n. Αφού $(m, r) = 1$ έπεται ότι $r = 1$.

Θεώρημα 1. *Έστω R δακτύλιος, K σώμα, $R \subset K$ και K ακέραιο πάνω από το R. Τότε R είναι σώμα.*

Απόδειξη. Έστω $a \in R, a \neq 0$. Αφού $a \in K$, $a^{-1} \in K$, a^{-1} ακέραιο πάνω από το R, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(a^{-1})^m + r_{m-1}(a^{-1})^{m-1} + \cdots + r_0 = 0$, $r_0, \ldots, r_{m-1} \in R$. Πολλαπλασιάζουμε τη παραπάνω σχέση με a^{m-1} και βρίσκουμε ότι $a^{-1} + r_{m-1} \cdot 1 + r_{m-1}a + \cdots + r_0 a^{m-1} = 0 \Rightarrow a^{-1} = -(r_{m-1} + r_{m-1}a + \cdots + r_0 a^{m-1}) \in R$. □

Λήμμα 1. *Έστω $\mathbb{k}$ ένα άπειρο σώμα, $a_1, \ldots, a_n \in K$ αλγεβρικά εξαρτημένα πάνω από το $\mathbb{k}$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε a_n να είναι ακέραιο πάνω από τον δακτύλιο $\mathbb{k}[a'_1, \ldots, a'_{n-1}]$ όπου $a'_1 = a_1 - \lambda a_n, \ldots, a'_{n-1} = a_{n-1} - \lambda a_{n-1}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ όπου $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ και ότι ο βαθμός του $f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι m. Το πολυώνυμο $f(x)$ είναι το πεπερασμένο άθροισμα μονωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{k}$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \ a_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathbb{k} \ .$$

Έστω ότι $\lambda \in \mathbb{k}$ και $a'_1 = a_1 - \lambda a_n, \ldots, a'_{n-1} = a_{n-1} - \lambda a_{n-1}$. Ορίζουμε $g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1 + \lambda x_n, \ldots, x_{n-1} + \lambda x_n, x_n)$. Τότε $g(a'_1, \ldots, a'_{n-1}, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ενώ

$$g(a'_1, \ldots, a'_{n-1}, x_n) = \sum_{j=0}^{m-1} (b_j(a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda) \cdot x_n^j + h(\lambda) x_n^m$$

όπου $b_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_{n-1}, y]$, $h(z) \in \mathbb{k}[z]$. Αφού το σώμα $\mathbb{k}$ είναι άπειρο, προκύπτει ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε $h(\lambda) \neq 0$, και διαιρώντας $g(a'_1, \ldots, a'_{n-1}, x_n)$ με αυτό το $h(\lambda)$ προκύπτει ένα μονικό πολυώνυμο στον δακτύλιο $\mathbb{k}[a'_1, \ldots, a'_{n-1}][x_n]$ με ρίζα το a_n. □

Παράδειγμα 1. Έστω $I = \langle -x^2y + 2xy^2 + 2 \rangle$ και $R = \mathbb{C}[x, y]/I = \mathbb{C}[a_1, a_2]$ όπου $a_1 = x + I, a_2 = y + I$. Τότε $-a_1^2 a_2 + 2a_1 a_2^2 + 2 = 0$, δηλαδή a_1, a_2 είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + 2$ και άρα a_1, a_2 είναι αλγεβρικά εξαρτημένα. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = f(x_1 + \lambda x_2, x_2) &= -({x_1}' + \lambda x_2)^2 x_2 + 2({x_1}' + \lambda a_2){x_2}^2 + 2 = \\ &-({x_1}')^2 x_2 - 2\lambda {x_1}' {x_2}^2 - \lambda^2 {x_2}^3 + 2{x_1}'{x_2}^2 - ({x_1}')^2 x_2 + 2 = \\ &(-\lambda^2 + 2\lambda){x_2}^3 + (-2\lambda {x_1}' + 2{x_1}'){x_2}^2 - ({x_1}')^2 x_2 + 2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Έστω $a'_1 = a_1 - \lambda a_2$. Τότε $g(a'_1, a_2) = f(a'_1 + \lambda a_2, a_2) = f(a_1, a_2) = 0$. Θέτοντας $\lambda = 1$, βλέπουμε ότι a_2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $x_2^3 - ({a_1}')^2 x_2 - a_1^2 a_2 + 2 \in \mathbb{C}[a'_1]$.

Πρόταση 1. *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων, $s \in S$. Αν $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module τότε κάθε στοιχείο του $R[s]$ είναι ακέραιο πάνω από το R.*

Απόδειξη. Έστω ότι $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module: $R[s] = Rs_1 + \cdots + Rs_n$ και ότι $h \in R[s]$. Τότε $h \cdot s_i = \sum a_{ij}s_j$ και όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Nakayama προκύπτει ότι υπάρχουν $a_i \in R$ έτσι ώστε $h^n + a_{n-1}h^{n-1} + \cdots + a_0 \in \operatorname{ann} R[s]$. Αφού $1 \in R[s]$ έπεται ότι $(h^n + a_{n-1}h^{n-1} + \cdots + a_0) \cdot 1 = 0$ και άρα $h^n + a_{n-1}h^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. □

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αντίστροφο της Πρότασης 1 δεν ισχύει. Ένας δακτύλιος που όλα του τα στοιχεία είναι ακέραια πάνω από το R, δεν είναι κατάνάγκη πεπερασμένα παραγόμενο R-module, (Κατασκευάστε ένα τέτοιο παράδειγμα!)

Πρόταση 2. *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων, $s \in S$. $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module αν και μόνο αν s είναι ακέραιο πάνω από το R.*

Απόδειξη. Αν $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module τότε από τη Πρόταση 1 προκύπτει ότι s είναι ακέραιο πάνω από το R.

Για το αντίστροφο έστω ότι s είναι ακέραιο πάνω από το R και ικανοποιεί τη σχέση $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ με $a_i \in R$, $i = 0, \ldots, n-1$. Θα δείξουμε ότι $R[s]$ παράγεται ως R-module από τα στοιχεία $1, s, \ldots, s^{n-1}$. Έστω $S' = R + Rs + \cdots + Rs^{n-1}$. Θα δείξουμε ότι $s^m \in S'$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι προφανές για $0 \le m \le n-1$. Επίσης $s^n = -(a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0) \in S'$ ενώ $s^{n+1} = -a_{n-1}s^n - \cdots - a_o s \in S'$. Με τον ίδιο τρόπο, επαγωγικά, προκύπτει ότι $s^{n+l} \in S'$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Άρα $R[s] \subset S' \subset R[s]$ και $R[s] = S'$. □

Πόρισμα 1. *Έστω R δακτύλιος της Noether, $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων και S πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Τότε S είναι ακέραιο πάνω από το R.*

Απόδειξη. Έστω $s \in S$. Αφού $R[s] \subset S$ έπεται ότι $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Το συμπέρασμα έπεται από τη προηγούμενη πρόταση. □

Πρόταση 3. *Έστω $R \subset S \subset T$ εγκλεισμός δακτυλίων, όπου S πεπερασμένα παραγόμενο R-module και T πεπερασμένα παραγόμενο S-module. Τότε T είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module.*

Απόδειξη. Αφού S είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module, υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in S$, έτσι ώστε $S = Rs_1 + \cdots + Rs_n$. Ομοίως υπάρχουν $t_1, \ldots, t_m \in T$ έτσι ώστε $T = St_1 + \cdots + St_m$. Θα δείξουμε ότι $\{s_1t_1, s_1t_2, \ldots, s_nt_m\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του T ως R-module, δηλαδή ότι $T = Rs_1t_1 + \ldots + Rs_nt_m$. Πράγματι, έστω $t \in T$. Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in S$, ώστε $t = a_1t_1 + \ldots + a_mt_m$. Για $i = 1, \ldots, m$, υπάρχουν $b_{ij} \in R$ έτσι ώστε $a_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}s_j$. Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι $t \in Rs_1t_1 + \ldots + Rs_nt_m$. □

Θεώρημα 2. *Έστω $R \subset S$ εγκλεισμός δακτυλίων και $s_1, \ldots, s_n \in S$ ακέραια πάνω από το R. Τότε $R[s_1, \ldots, s_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Η περίπτωση $n = 1$ προκύπτει από τη Πρόταση 2. Θεωρούμε λοιπόν ότι ή πρόταση είναι αληθής για τα ακέραια στοιχεία $s_1, \ldots, s_{n-1}$ και ότι $R' = R[s_1, \ldots, s_{n-1}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Αν s_n είναι ακέραιο πάνω από το R τότε είναι ακέραιο και πάνω από το R'. Άρα $R[s_1, \ldots, s_n] = R'[s_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R'-module. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει από τη Πρόταση 3. □

Πόρισμα 2. *Αν $s_1, s_2 \in S$, είναι ακέραια πάνω από το R, τότε $s_1 + s_2$ και $s_1 \cdot s_2$ είναι ακέραια πάνω από το R.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, $R[s_1, s_2]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.1, τα στοιχεία $s_1 + s_2, s_1 \cdot s_2$ του $R[s_1, s_2]$ είναι ακέραια πάνω από το R. □

Πρόταση 4. *Έστω $R \subset S \subset T$ εγκλεισμός δακτυλίων, S ακέραιος πάνω από τον R και T ακέραιος πάνω από το S. Τότε ο δακτύλιος T είναι ακέραιος πάνω από το R.*

Απόδειξη. Έστω $t \in T$. Τότε $t^n + s_{n-1}t^{n-1} + \cdots + s_0 = 0$, όπου $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο δακτύλιος $R' = R[s_1, \ldots, s_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Είναι φανερό ότι t είναι ακέραιο πάνω από το R', άρα $R'[t]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R'-module, σύμφωνα με τη Πρόταση 2. Από τη Πρόταση 3 έπεται ότι $R'[t]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module και άρα $t \in R'[t]$ είναι ακέραιο πάνω από το R, πάλι σύμφωνα με τη Πρόταση 2. □

Θεώρημα 3. *(**Λήμμα Κανονικοποίησης της Noether**) Έστω $\mathbb{k}$ άπειρο σώμα, $R = \mathbb{k}[a_1, \ldots, a_n]$. Τότε υπάρχει ακέραιος $0 \le m \le n$ και στοιχεία $b_1, \ldots, b_m \in R$ έτσι ώστε $b_1, \ldots, b_m$ να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{k}$ και R να είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{k}[b_1, \ldots, b_m]$-module.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Έστω $R = \mathbb{k}[a_1]$. Αν a_1 είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{k}$ τότε $m = 0$ και R είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{k}$-module σύμφωνα με τη Πρόταση 2. Αν a_1 είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο πάνω από το $\mathbb{k}$ τότε το συμπέρασμα προκύπτει αυτόματα με $m = 1$, $b_1 = a_1$. Έστω τώρα ότι $R = \mathbb{k}[a_1, \ldots, a_n]$ όπου $n > 1$. Αν $a_1, \ldots, a_n$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{k}$ τότε το συμπέρασμα προκύπτει με $m = n$, $b_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Αν $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα τότε σύμφωνα με το Λήμμα 1 υπάρχει $\lambda \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε a_n να είναι ακέραιο πάνω από τον δακτύλιο $R' = \mathbb{k}[a'_1, \ldots, a'_{n-1}]$ όπου $a'_1 = a_1 - \lambda a_n, \ldots, a'_{n-1} = a_{n-1} - \lambda a_{n-1}$. Έπεται ότι $R = \mathbb{k}[a_1, \ldots][a_n] = R'[a_n]$ πεπερασμένα παραγόμενο R'-module σύμφωνα με τη Πρόταση 2. Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει $0 \le m \le n-1$ έτσι ώστε $b_1, \ldots, b_m$ να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{k}$ και R' να είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{k}[b_1, \ldots, b_m]$-module. Σύμφωνα με τη Πρόταση 3, R είναι και αυτό πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{k}[b_1, \ldots, b_m]$-module και το συμπέρασμα έπεται. □

Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας όλα τα θεωρητικά εργαλεία για να αποδείξουμε το ισχυρό θεώρημα των μηδενικών του Hilbert.

Θεώρημα 4. *(**Hilbert's Nullstellensatz**) Έστω $\mathbb{k}$ αλγεβρικά κλειστό και $R = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε $\mathrm{maxSpec}(R) = \{\langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n\rangle :\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{k}\}$.*

Απόδειξη. Για $n = 1$ το συμπέρασμα προκύπτει αφού $\mathbb{k}[x_1]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, κάθε πρώτο ιδεώδες παράγεται από ανάγωγο πολυώνυμο και $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ υποχρεώνει τα ανάγωγα πολυώνυμα να έχουν βαθμό 1.

Έστω $a \in \mathbb{k}$ και $\phi :\ \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_s] \to \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ ο ομομορφισμός $\phi(f(x_1, \ldots, x_s)) = f(x_1, \ldots, x_{s-1}, a)$. Τότε $\ker \phi = (x_s - a)$. Έπεται ότι αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{k}$ και I είναι το ιδεώδες $\langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n\rangle$, τότε

$$R/I \cong R/\langle x_n - a_n\rangle \ / \ I/\langle x_n - a_n\rangle \cong \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_{n-1}]/\langle x_1 - a_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1}\rangle \ .$$

Με επαγωγή στο n συμπεραίνουμε ότι I ανήκει στο $\mathrm{maxSpec}(R)$.

Έστω τώρα ότι $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R. Έπεται ότι $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} = K$, όπου K είναι σώμα. Παρατηρούμε ότι $i :\ \mathbb{k} \longrightarrow K$, $c \mapsto c + \mathfrak{m}$ είναι μονομορφισμός δακτυλίων: το γνήσιο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ δεν περιέχει μη μηδενικές σταθερές. Έστω $\mathbb{k}_1 = i(\mathbb{k})$, (άρα $\mathbb{k}_1 \cong \mathbb{k}$ και $\mathbb{k}_1 = \overline{\mathbb{k}_1}$) και $c_1 = x_1 + \mathfrak{m}, \ldots, c_n = x_n + \mathfrak{m} \in K$. Τότε $K = \mathbb{k}_1[c_1, \ldots, c_n]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Κανονικοποίησης της Noether, υπάρχει $0 \le m \le n$, έτσι ώστε $b_1, \ldots, b_m \in K$ να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{k}_1$ και K να είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{k}_1[b_1, \ldots, b_m]$-module. Αν $m \neq 0$ τότε, σύμφωνα με το Πόρισμα 1, το σώμα K είναι ακέραιο πάνω $\mathbb{k}_1[b_1, \ldots, b_m]$ και κατά συνέπεια, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, ο δακτύλιος $\mathbb{k}_1[b_1, \ldots, b_m]$ πρέπει να είναι σώμα, άτοπο αφού $\mathbb{k}_1[b_1, \ldots, b_m]$ είναι ισόμορφος με δακτύλιο πολυωνύμων σε m μεταβλητές. Έπεται ότι $m = 0$. Επομένως κάθε στοιχείο του K είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{k}_1$. Αφού $\mathbb{k}_1$ είναι αλγεβρικά κλεστό έπεται ότι $K = \mathbb{k}_1$. Άρα για $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν $a_i \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε $c_i = x_i + \mathfrak{m} = a_i + \mathfrak{m}$. Επομένως $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$ για κάθε i και $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subset \mathfrak{m}$. Αφού $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες έπεται ότι $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$. □

Πρόταση 5. *Έστω $\mathbb{k}$ αλγεβρικά κλειστό σώμα. Αν για το ιδεώδες I ισχύει $I \neq \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, τότε $Z(I) \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχουν $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{k}^n$, έτσι ώστε $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, για κάθε $f \in I$.*

Απόδειξη. Αφού $I \neq \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, τότε υπάρχει $\mathfrak{m}$ μέγιστο, ώστε $I \subset \mathfrak{m}$. Άρα υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n$, ώστε $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Έστω $f \in I$, τότε υπάρχουν $g_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, για $i = 1, \ldots, n$ έτσι ώστε $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum g_i(x_1, \ldots, x_n)(x_i - a_i)$. Επομένως $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum g_i(a_1, \ldots, a_n) \cdot 0 = 0 \Rightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in Z(I)$. □