Βασική Άλγεβρα, 8.11.2011, 10.11.2011

- Έστω R ένας δακτύλιος. Η αβελιανή ομάδα M μαζί με τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$ είναι ένα *αριστερό* R-module εάν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες
  - $1 \cdot m = m$,
  - $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$,
  - $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,
  - $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$.

  Αντίστοιχος ορισμος για δεξιό R-module.

- Τα $\mathbb{Z}$-modules είναι απλά οι αβελιανές ομάδες.

- Έστω $\mathbb{k}$ ένα σώμα. Τα $\mathbb{k}$-modules είναι οι $\mathbb{k}$-διανυσματικοί χώροι.

- Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε $M = R$ είναι ένα αριστερό R-module με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $r \cdot s = rs$.

- Τα υποσύνολα M του R που είναι αριστερά R-modules με εξωτερικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό του δακτυλίου είναι τα ιδεώδη του R, αφού $R \times M \to M$.

- Εάν J είναι αμφίπλευρο ιδεώδες του R τότε R/J είναι ένα R-module όπου $r \cdot (f + J) = (rf) + J$, $\forall r \in R$. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι πράξη *καλά ορισμένη*. Έστω $f_1 + J = f_2 + J$, δηλαδή $f_1 - f_2 = j \in J$. Τότε $r \cdot (f_1 + J) = rf_1 + J = (rf_2 + rj) + J = rf_2 + J$, αφού $rj \in J$. Εύκολα ελέγχονται και οι άλλες ιδιότητες.

- Αν M είναι αριστερό R-module, $N \subseteq M$ και N είναι αριστερό R-module με τις ίδιες πράξεις όπως M, το N θα λέγεται υπο-modules του M. Σε αυτή τη περίπτωση M/N είναι επίσης αριστερό R-module με πολλαπλασιασμό $r \cdot (m + N) = r \cdot m + N$.

- Το σύνολο $S = \{m_1, m_2, \ldots\}$ λέγεται σύνολο γεννητόρων για το αριστερό R-module M, $M = \langle S \rangle$, αν κάθε στοιχείο του M γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S: $M = \{r_1 m_1 + \cdots + r_s m_s : \ r_i \in R, m_i \in S, s \in \mathbb{N}\}$. Όταν το S είναι πεπερασμένο σύνολο λέμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Το M λέγεται κυκλικό R-module εάν $M = \langle \{m_1\} \rangle$.

- Το $R = \langle 1 \rangle$ είναι κυκλικό R-module. Έστω I αριστερό ιδεώδες του R. Το $R/I = \langle 1 + I \rangle$ είναι κυκλικό R-module.

- Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-module.

- Έστω M_1, M_2 δύο αριστερά R-modules. Το ευθύ άθροισμα $M_1 \oplus M_2$ είναι αριστερό R-module με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $r \cdot (m_1, m_2) = (r \cdot m_1, r \cdot m_2)$.

- Έστω $R = \Bbbk[x]$ όπου $\Bbbk$ σώμα και M ένα R-module. Αφού $\Bbbk$ είναι υποδακτύλιος του R είναι εύκολο να δει κανείς ότι M είναι $\Bbbk$-module, δηλαδή $\Bbbk$-διανυσματικός χώρος. Έστω $T : M \to M$, $T(m) = x \cdot m$. θα δείξουμε ότι η συνάρτηση T είναι γραμμική συνάρτηση. Πράγματι έστω $m_1, m_2 \in M$. Τότε αφού M είναι R-module έπεται ότι $T(m_1 + m_2) = x \cdot (m_1 + m_2) = x \cdot m_1 + x \cdot m_2 = T(m_1) + T(m_2)$. Επίσης αν $c \in Bbbk$, τότε $T(cm) = x \cdot (cm) = (xc) \cdot m = (cx) \cdot m = c \cdot (xm) = cT(m)$.

- Αντίστροφα έστω ότι $\Bbbk$ σώμα, M ένας $\Bbbk$-διανυσματικός χώρος και $T : M \to M$ μία γραμμική συνάρτηση του M. Θυμίζουμε ότι $T^i = T \circ \cdots \circ T$ είναι η σύνθεση της συνάρτησης T με τον εαυτό της i-φορές. Τότε M γίνεται ένα $R = \Bbbk$-module με εξωτερικό πολλαπλασιασμό
$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \cdot m = \sum_{i=0}^{n} c_i T^i(m) \ .$$

- Ο δακτύλιος $R = \Bbbk[x]$ είναι ένας $\Bbbk$-διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης. Μία βάση του R υπεράνω του $\Bbbk$ είναι το σύνολο $\{1, x, x^2, \dots\}$. Η γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο κυκλικό R-module R είναι η συνάρτηση T, $T(x^i) = x \cdot x^i = x^{i+1}$. Έτσι $T(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{i+1}$.

- Έστω το ιδεώδες $I = (x^4)$ του $R = \Bbbk[x]$. Μία βάση του $M = R/I$ υπεράνω του $\Bbbk$ είναι το σύνολο $SS = \{1 + I, x + I, x^2 + I, x^3 + I\}$. Πράγματι έστω $f = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i + \sum_{i=4}^{n} c_i x^i$. Τότε $f + I = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i + I = c_0(1 + I) + c_1(x + I) + c_2(x^2 + I) + c_3(x^3 + I)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν
$$k_0(1 + I) + k_1(x + I) + k_2(x^2 + I) + k_3(x^3 + I) = \mathbf{0}$$
τότε
$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 \in I \Rightarrow k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 = x^4 g(x) \ .$$
Έστω ότι $g(x) \neq 0$. Τότε $\deg x^4 g(x) \geq 4$ και αφού ο βαθμός του $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$ είναι το πολύ 3 καταλήγουμε σε άτοπο. Έπεται ότι $g(x) = 0$, άρα $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 = 0$ και $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Η γραμμική συνάρτηση T που αντιστοιχεί στο R-module R/I δρα ως εξής στα στοιχεία του S: $T(1 + I) = x + I$, $T(x + I) = x^2 + I$, $T(x^2 + I) = x^3 + I$, $T(x^3 + I) = I$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική συνάρτηση T ως προς τη βάση S είναι
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

- Έστω $V = \Bbbk^2$ και $T : V \to V$, $T(a,b) = (b, a+b)$. Τότε V γίνεται ένα $R = \Bbbk[x]$-module όπου $x \cdot (a,b) = (b, a+b)$, $x^2(a,b) = (a+b, a+2b)$, κ.λ.π.

- **Άσκηση** Να βρείτε μία $\Bbbk$-βάση του $\Bbbk[x]$-module $\Bbbk[x]/(x^4+x^2)$. Να δώσετε τον πίνακα της γραμμικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στο $\Bbbk[x]/(x^4+x^2)$ ως προς αυτήν τη βάση.