A , ONOMA

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ, **Πρόοδος 3**, Μαυρίστε τη σωστή απάντηση:

1. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής στον R:

(1) 2 είναι πρώτο στοιχείο του R.
(2) $\sqrt{2}$ είναι ανάγωγο στοιχείο του R.
(3) $(\sqrt{2})$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R.

1. A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** 2 και 3 **D)** και οι τρεις **E)** καμία από τις τρεις **Απάντηση** $2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$ δεν είναι ανάγωγο και δε μπορείνα είναι πρώτο. Ισχύει ότι $R/(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Z}_2$ και άρα $(\sqrt{2})$ είναι μέγιστο, και πρώτο ιδεώδες του R και ότι $\sqrt{2}$ είναι πρώτο και άρα ανάγωγο. Η σωστή απάντηση είναι **C**.

Πως προκύπτει ο παραπάνω ισομορφισμός: Έστω $I = (x^2 - 2)$. Τότε αν $\phi : \mathbb{Z}[x] \to R$, $f(x) \mapsto f(\sqrt{2}$, έπεται ότι $\ker\phi = I$. Επομένως $R \cong \mathbb{Z}[x]/I, a + b\sqrt{2} \mapsto (a+bx)+I$ και μάλιστα $\sqrt{2} \mapsto x + I$. Έτσι

$$R/(\sqrt{2}) \cong (\mathbb{Z}[x]/I) \;/\; ((x){+}I/\;I) \;\cong \mathbb{Z}[x]/(x){+}I = \mathbb{Z}[x]/(x, x^2{-}2) \cong \mathbb{Z}[x]/(x, 2) \cong \mathbb{Z}_2$$

(Μπορείτε να βρείτε ομομορφισμό $R \to \mathbb{Z}_2$ με πυρήνα $(\sqrt{2})$;)

2. Έστω $f(x) = 3x^6 + 27x^2 + 9$. Σε ποιον από τους παρακάτω δακτυλίους, το αντίστοιχο κύριο ιδεώδες με γεννήτορα το $f(x)$ είναι μέγιστο;

(1) $\mathbb{Q}[x]$
(2) $\mathbb{Z}[x]$
(3) $\mathbb{C}[x]$

2. A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** Μόνο 3 **D)** Μόνο 1 και 2 **E)** σε κανέναν **Απάντηση** $f(x) = 3(x^6 + 9x^2 + 3)$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein το πολυώνυμο $g(x) = x^6 + 9x^2 + 3$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ και άρα $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Έπεται ότι $(f(x))$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{Q}[x]$. Το πολυώνυμο $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ και άρα $\mathbb{Z}[x]/(f(x))$ δεν είναι ακεραία περιοχή, ούτε βέβαια και σώμα. Στο $\mathbb{Z}[x]$ το ιδεώδες $(f(x))$ δεν είναι μέγιστο. Στο $\mathbb{C}[x]$ το πολυώνυμο $(f(x))$ έχει βαθμό μεγαλύτερο του 1 και άρα δεν είναι ανάγωγο. Το ιδεώδες $(f(x))$ δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{C}[x]$. Η σωστή απάντηση είναι **A**.

3. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής στον R:

(1) Το στοιχείο $2 + \sqrt{6}$ είναι πρώτο αφού $10 = (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6})$.
(2) Ο δακτύλιος R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.
(3) $\mathbb{Z} \subset R$ και επομένως R περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

3. A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** 2 και 3 **D)** και οι τρεις **E)** καμία **Απάντηση**

$2 \cdot 5 = 10 = (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6})$. Από τη πολλαπλασιαστική ιδιότητα της νόρμας προκύπτει ότι το στοιχείο $2 + \sqrt{-6}$ με νόρμα 10 ΔΕΝ διαιρεί ούτε το 2 ούτε το 5. Άρα $2 + \sqrt{6}$ δεν είναι πρώτο. Αντίστοιχα, το 2 με νόρμα 4 δεν διαιρεί ούτε το $2 + \sqrt{-6}$ ούτε το $2 - \sqrt{-6}$, άρα δεν είναι πρώτο. Είναι εύκολο να δούμε (πάλι με νόρμες) ότι είναι ανάγωγο. Αφού στον R υπάρχουν ανάγωγα που δεν είναι πρώτα, έπεται ότι ο R

δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, ούτε και περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. Η σωστή απάντηση είναι **E**.

4. Έστω $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το ίδιο το R.
(2) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{C}$.
(3) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Q}[i]$.
(4) Το σώμα κλασμάτων του R είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Q}[1/x]/[x^{-2}+1]$.

4. A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** Μόνο 3 **D)** Μόνο 4 **E)** Κανένας από τα παραπάνω

Απάντηση $R \cong \mathbb{Z}[i]$. Ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ είναι σώμα και είναι το μικρότερο σώμα που περιέχει το R. Η σωστή απάντηση είναι ῝.

5. Έστω $\omega = e^{2\pi i/7}$ και $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\omega]$, $f(x) \mapsto f(\omega)$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) $\mathbb{Z}[\omega] \cong \mathbb{Z}[x]$,
(2) $\ker \phi = (x^7 - 1)$
(3) $\ker \phi = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
(4) $\ker \phi$ είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.

5.A) Μόνο 2, 4 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 3 και 4 **D)** Μόνο 4 **E)** Καμμία

Απάντηση Αφού $\mathbb{Z}[\omega] \cong \mathbb{Z}[x]/\ker \phi$ και $\mathbb{Z}[\omega]$ ακεραία περιοχή, έπεται ότι $\ker \phi$ είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$. Το ω είναι η έβδομη πρωταρχική ρίζα της μονάδας και είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^7 - 1$. Οι 7 ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^7 = 1$. Αφού $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ έπεται ότι ω είναι ρίζα του κυκλοτομικού πολυωνύμου $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Έχουμε δείξει ότι το πολυώνυμο αυτό είναι ανάγωγο. Έπεται ότι $\ker \phi = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Η σωστή απάντηση είναι ῝.

6. Έστω $f(x) = 4x^{10000} + 6$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$
(2) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$
(3) $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

6.A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** Μόνο 3 **D)** Μόνο 2 και 3 **E)** καμμία

Απάντηση $f(x) = 2(2x^{10000} + 3)$ και $2x^{10000} + 3$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein. Έπεται ότι $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ ενώ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Επίσης αφού $\deg f(x) > 2$ $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$. Η σωστή απάντηση είναι **B**.

7. Έστω $R = \Bbbk[x, y]$, $I = (x + y)$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής, (όπου $\Bbbk$ σώμα):

(1) I είναι πρώτο ιδεώδες.
(2) $R/I \cong \Bbbk[x]$
(3) I είναι μέγιστο ιδεώδες

7.A) Μόνο 1, 3 **B)** Μόνο 1 και 2 **C)** Μόνο 2 και 3 **D)** Καμμία **E)** Όλες

Απάντηση Το πολυώνυμο $x + y$ είναι συνολικού βαθμού 1 και άρα είναι ανάγωγο και πρώτο στο R που είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\phi : \mathbb{k}[x, y] \to \mathbb{k}[x]$, $f(x, y) \mapsto f(x, -x)$. Αφού $x + y \in \ker \phi$, έπεται ότι $\ker \phi = (x + y)$. Ο δακτύλιος $\mathbb{k}[x]$ δεν είναι σώμα άρα I δεν είναι μέγιστο ιδεώδες. Η σωστή απάντηση είναι **B**. **8.** Έστω $R = \mathbb{Z}_2[x]$, $I = (x^3 + x^2 + 1)$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) R/I είναι σώμα.
(2) R/I είναι ακεραία περιοχή αλλά όχι σώμα.
(3) R/I έχει ακριβώς 6 στοιχεία.

8.A) Μόνο 1 **B)** μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 2 και 3 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3 **Απάντηση** Το πολυώνυμο $x^3 + x^2 + 1$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_2$ άρα είναι ανάγωγο.

Έπεται ότι R/I είναι σώμα. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διαίρεσης προκύπτει ότι κάθε στοιχείο του R/I μπορεί να γραφεί ως $a_0 + a_1x + a_2x^2 + I$ όπου $a_i \in \mathbb{Z}_2$ για όλα τα i. Έπεται ότι R/I έχει ακριβώς 8 στοιχεία. Η σωστή απάντηση είναι **A**.

9. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) $f(x)$ είναι ανάγωγο στον R.
(2) Οι ανάγωγοι παράγοντες του $f(x)$ είναι $(2x + 2)$ και $3x + 3$.
(3) Οι ανάγωγοι παράγοντες του $f(x)$ είναι $6(x + 1)$ και $x + 1$.

9.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 **C)** Μόνο 2 **D)** Μόνο 3 **E)** καμμία

Απάντηση Η σωστή απάντηση είναι **A**.

10. Έστω S ένας δακτύλιος που περιέχει τον $\mathbb{Z}$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) S είναι ακεραία περιοχή.
(2) Αν $p \in \mathbb{Z}$ είναι πρώτος στον $\mathbb{Z}$ τότε p πρώτος στον S.
(3) Αν p ανάγωγο στον $\mathbb{Z}$ και δεν είναι αντιστρέψιμος στον S τότε p ανάγωγο στον S.

10.A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** Μόνο 3 **D)** όλες **E)** καμία

Απάντηση Η σωστή απάντηση είναι **E**. Ο ομομορφισμός $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $m \mapsto (m, 0)$ είναι μονομορφισμός και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ περιέχει τον $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ο δακτύλιος S δεν είναι ακεραία περιοχή. Το 2 είναι πρώτο στο $\mathbb{Z}$ όμως $(2, 0)$ δεν είναι πρώτο αφού $S/((2, 0)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. Επίσης $(2, 0) = (2, 1)(1, 0)$ και $(2, 1)$ δεν είναι αντιστρέψιμο, ούτε όμως και $(1, 0)$ είναι αντιστρέψιμο αφού είναι διαιρέτης του μηδενός. Άρα $(2, 0)$ δεν είναι ανάγωγο.