Α , ΛΥΣΕΙΣ

Αλγεβρικές Δομές ΙΙ, **Πρόοδος 2**, Μαυρίστε τη σωστή απάντηση:

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

1. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2+2)$. Πόσα γνήσια ιδεώδη έχει ο δακτύλιος R;

(1) Κανένα
(2) 1
(3) 5
(4) 25
(5) Άπειρα

1. A) 1 **B)** Μόνο 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ο δακτύλιος R είναι σώμα: $(x^2+2) \subsetneqq (f(x)) \Rightarrow x^2+2 = f(x)p(x)$. Αφού x^2+2 δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_5$, το πολυώνυμο $f(x)$ δε μπορεί να έχει βαθμό 1 και άρα πρέπει να είναι σταθερά και επομένως $(f(x)) = \mathbb{Z}_5[x]$. Έπεται ότι στον R υπάρχει ένα μόνο γνήσιο ιδεώδες.

2. Σε ποιους από τους παρακάτω δακτυλίους ισχύει ότι κάθε ιδεώδες είναι κύριο;

(1) $\mathbb{Q}$
(2) $\mathbb{Z}_4[x]$
(3) $\mathbb{Z}_5[x]$

2. A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1, 3 **C)** Μόνο 1, 2 **D)** Μόνο 1 **E)** Μόνο 3

$\mathbb{Q}$ είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών αφού είναι σώμα και τα δύο ιδεώδη είναι κύρια: (0), (1). $\mathbb{Z}_5[x]$ είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών αφού $\mathbb{Z}_5$ είναι σώμα. $\mathbb{Z}_4[x]$ δεν είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών αφού $(x, 2)$ είναι γνήσιο (και μάλιστα μέγιστο) ιδεώδες.

3. Έστω $R = \mathbb{Z}_8[x]/(x^2)$. Για ποια ιδεώδη J του $\mathbb{Z}_8[x]$ προκύπτει ότι $J/(x^2)$ είναι μέγιστο;

(1) $J = (x, 4)$
(2) $J = (x, 2)$
(3) $J = (x, x+1)$

3. A) 1, 2, 3 **B)** Μόνο 1, 3 **C)** Μόνο 1, 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3
Σύμφωνα με το τρίτο θεώρημα ισομορφίας δακτυλίων ο δακτύλιος πηλίκο $R/\left(J/(x^2)\right)$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{Z}_8[x]/J$. Αφού $\mathbb{Z}_8[x]/(x,4) \cong \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8[x]/(x,2) \cong \mathbb{Z}_2$, ενώ $(x, x+1)$ δεν είναι γνήσιο, έπεται ότι το μόνο ιδεώδες J για το οποίο $J/(x^2)$ είναι μέγιστο, είναι το $J = (x, 2)$.

4. Έστω $I = (x, 4, 6)$. Αποφασίστε ποιός από τους παρακάτω δακτυλίους είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]/I$

(1) $\mathbb{Z}_2$.
(2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.
(3) $\mathbb{Z}$.
(4) $\mathbb{R}$.

4. A) Μόνο 1 **B)** Μόνο 2 **C)** Μόνο 3 **D)** Μόνο 4 **E)** Κανένας από αυτούς

Παρατηρούμε ότι $I = (x, 2)$. Έπεται ότι $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}_2$.

5. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $I = (3\sqrt{5})$, $J = (2\sqrt{5})$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) $I + J = (\sqrt{5})$
(2) $I + J = (5\sqrt{5})$
(3) $IJ = I \cap J$.

5.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 **D)** Μόνο 2 **E)** Καμμία
Παρατηρούμε ότι $\sqrt{5} = -2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{5}) \subset I + J$. Αντίστροφα, $I \subset (\sqrt{5})$, $J \subset (\sqrt{5})$ και επομένως $I + J = (\sqrt{5})$. Επίσης $(5\sqrt{5}) \subsetneqq (\sqrt{5})$. Τέλος $IJ = (30)$ ενώ $IJ = (6\sqrt{5})$.

6. Αποφασίστε αν $(x-3, y+4)$ είναι μέγιστο ιδεώδες στους δακτυλίους

(1) $\mathbb{Z}[x, y]$
(2) $\mathbb{Z}_{11}[x, y]$
(3) $\mathbb{Q}[x, y, z]\}$

6.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 και 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 1

$\mathbb{Z}[x, y]/(x-3, y+4) \cong \mathbb{Z}$ και άρα $(x-3, y+4)$ δεν είναι μέγιστο. $\mathbb{Z}_{11}[x, y]/(x-3, y+4) \cong \mathbb{Z}_{11}$ και άρα $(x-3, y+4)$ είναι μέγιστο. $\mathbb{Q}[x, y, z]/(x-3, y+4) \cong \mathbb{Q}[z]$ και άρα $(x-3, y+4)$ δεν είναι μέγιστο.

7. Έστω $R = \mathbb{Z}_5[x]$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) $(x^3, 2x^2) = (x^2)$.
(2) $(x^3, 2x^2 + 3x) = (x)$
(3) $(x^3, 2x^2 + 1) = \mathbb{Z}_5[x]$

7.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 και 2 **D)** Καμμία **E)** Όλες

$(x^3, 2x^2) \subset (x^2)$ αφού $x^3 \in (x^2)$ και $2x^2 \subset x^2$. Επίσης $x^2 = 3 \cdot 2x^2 \Rightarrow (x^2) \subset (x^3, 2x^2)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Διαίρεσης $x^3 = (2x^2 + 3x)(3x + 2) + 4x \Rightarrow (x^3, 2x^2 + 3x) = (2x^2 + 3x, 4x) = (x)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Διαίρεσης $x^3 = (2x^2 + 1)(3x + 2) + 2x \Rightarrow (x^3, 2x^2 + 1) = (2x^2 + 1, 2x) = (2x, -x + 1) = (1)$.

8. Έστω $f(x) = x^{11} - 1$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 10 ρίζες στο $\mathbb{Z}_{11}$.
(2) Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.
(3) Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 11 ρίζες στο $\mathbb{C}$.

8.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 και 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3 Οι

ρίζες του $f(x)$ στο $\mathbb{Z}_{11}$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία και η τάξη τους διαιρεί το 11. Όμως η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Z}_{11}^*$ έχει 10 στοιχεία, και άρα η τάξη των στοιχείων της διαιρεί το 10. Υπάρχει μόνο ένα στοιχείο που ικανοποιεί τις δύο συνθήκες, η μονάδα, άρα το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 1 ρίζες στο $\mathbb{Z}_{11}$ Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, $f(x)$ έχει ακριβώς 11 ρίζες στο $\mathbb{C}$ που προκύπτουν από τον τύπο $z = e^{2k\pi i/11}$. Από τον μοναδιαίο κύκλο, προκύπτει ότι το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς 1 πραγματική ρίζα.

9. Έστω $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(1) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ είναι μέγιστο.
(2) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (0)$ είναι μέγιστο.
(3) Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι μέγιστο.

9.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 και 2 **D)** Μόνο 2 **E)** Μόνο 3

$R/\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, άρα το ιδεώδες δεν είναι μέγιστο. $R/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (0) \cong \mathbb{Z}$ άρα το ιδεώδες δεν είναι μέγιστο. $R/\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ άρα το ιδεώδες είναι μέγιστο

10. Ποιος από τους παρακάτω δακτυλίους είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{C}$:

(1) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 8)$
(2) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2)$
(3) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 2)$

10.A) Μόνο 2, 3 **B)** Μόνο 1 και 3 **C)** Μόνο 1 και 2 **D)** Μόνο 1 **E)** Μόνο 3

$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 8) \cong \mathbb{R}[\sqrt{8}i] = \mathbb{C}$. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{8}i] \neq \mathbb{C}$ αφού για παράδειγμα $\pi \notin \mathbb{Q}[\sqrt{8}i]$. $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 2) \cong \mathbb{R}[\sqrt{2}i] = \mathbb{C}$