

# Z , ΟΝΟΜΑ

Αλγεβρικές Δομές II, Πρόοδος 1, Μαυρίστε τη σωστή απάντηση:

1.  A  B  C  D  E

2.  A  B  C  D  E

3.  A  B  C  D  E

4.  A  B  C  D  E

5.  A  B  C  D  E

6.  A  B  C  D  E

7.  A  B  C  D  E

8.  A  B  C  D  E

9.  A  B  C  D  E

10.  A  B  C  D  E

1. Έστω  $R = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$ . Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Ο δακτύλιος  $R$  είναι ακεραία περιοχή.
- (2) Το στοιχείο  $2 + (x^2)$  είναι αντιστρέψιμο και το αντίστροφό του είναι το  $2 + (x^2)$ .
- (3) Το στοιχείο  $x + 1 + (x^2)$  είναι αντιστρέψιμο και το αντίστροφό του είναι το  $x + 2 + (x^2)$ .

1.A) Μόνο 2, 3    B) Μόνο 1 και 3    C) Μόνο 1 και 2    D) Μόνο 2    E) Μόνο 3

2. Έστω  $K$ , σώμα,  $|K| = 16$ . Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Υπάρχει  $a \in K^*$ ,  $a \neq 1$  έτσι ώστε  $a^2 = 1$ .
- (2) Αν  $a \in K$  τότε  $4a = 0$ .
- (3) Αν  $a \in K^*$  τότε  $a^{15} = 1$ .

2.A) Μόνο 2, 3    B) Μόνο 1 και 3    C) Μόνο 1 και 2    D) Μόνο 2    E) Μόνο 3

3. Αποφασίστε ποιο από τα παρακάτω είναι υπόσωμα του  $\mathbb{C}$ .

- (1)  $A_1 = \{a + 2bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (2)  $A_2 = \{a + bi : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$
- (3)  $A_3 = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$

3.A) Μόνο 2, 3    B) Μόνο 1 και 3    C) Μόνο 1 και 2    D) Μόνο 2    E) Μόνο 3

4. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1)  $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$ .  
 (2)  $\mathbb{R}[\sqrt{5}] = \mathbb{R}$ .  
 (3) Αν  $\phi : R[x] \rightarrow R$ ,  $\phi(f(x)) = f(1)$  τότε  $\phi$  είναι επιμορφισμός.

4. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1,3    **C)** Μόνο 1,2    **D)** Μόνο 2    **E)** 1,2,3

5. Έστω  $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Ο δακτύλιος  $R$  είναι ακεραία περιοχή.  
 (2) Ο δακτύλιος  $R$  έχει ακριβώς 3 στοιχεία που είναι αντιστρέψιμα.  
 (3) Ο δακτύλιος  $R$  έχει ακριβώς 4 στοιχεία που είναι διαιρέτες του μηδενός.

5. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1 και 3    **C)** Μόνο 1 και 2    **D)** Μόνο 2    **E)** Μόνο 3

6. Έστω  $R$  ο δακτύλιος των  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{C}$  και έστω  $A = (a_{ij})$  το σύνολο των πινάκων όπου  $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ . Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Το σύνολο  $A$  είναι ιδεώδες του  $R$ .  
 (2) Το σύνολο  $A$  είναι υποδακτύλιος του  $R$ .  
 (3) Το σύνολο  $A$  είναι σώμα.

6. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1 και 3    **C)** Μόνο 1 και 2    **D)** Μόνο 2    **E)** Μόνο 3

7. Έστω  $I = (3, x^3 + 4x + 10)$  στον  $\mathbb{Z}[x]$ . Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1)  $6x^5 + 3 \in I$   
 (2)  $x^3 + 4x + 13 \in I$   
 (3)  $x^2 + 3 \in I$

7. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1 και 3    **C)** Μόνο 1 και 2    **D)** Μόνο 2    **E)** Μόνο 3

8. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Έστω  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  ομομορφισμός προσθετικών ομάδων. Τότε  $\phi$  είναι και ομομορφισμός δακτυλίων.  
 (2) Υπάρχει  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε  $\ker \phi = \mathbb{Z}$ .  
 (3) Υπάρχει ισομορφισμός  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

8. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1, 3    **C)** Μόνο 1, 2    **D)** Μόνο 2    **E)** Μόνο 3

9. Έστω  $a$  είναι αντιστρέψιμο στον  $R$ . Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Όλες οι θετικές δυνάμεις του  $a$  είναι αντιστρέψιμες.  
 (2) Αν  $ab = 0$  τότε  $b = 0$ .  
 (3) Αν  $\phi : R \rightarrow S$  ομομορφισμός δακτυλίων και  $a \in \ker \phi$  τότε  $\phi(r) = r, \forall r \in R$ .

9. **A)** 1, 2, 3    **B)** Μόνο 1, 3    **C)** Μόνο 1, 2    **D)** Μόνο 2    **E)** Μόνο 1

10. Αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

- (1) Κάθε σώμα με 3 στοιχεία είναι ισόμορφο με το  $\mathbb{Z}_3$ .  
 (2)  $\mathbb{Z}_4$  είναι σώμα.  
 (3) Κάθε δακτύλιος με 5 στοιχεία είναι σώμα.

10. **A)** Μόνο 2, 3    **B)** Μόνο 1, 3    **C)** Μόνο 1,2    **D)** Μόνο 1    **E)** Μόνο 3