Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Σύνολο ασκήσεων 6

Εβδομάδα 8.04.14-10.04.14

1. Να βρείτε όλα τα ιδεώδη $J/(\overline{10})$ του $\mathbb{Z}_{20}/(\overline{10})$.

Απόδειξη Τα ιδεώδη J του $\mathbb{Z}_{20}$ είναι κύρια. Θέλουμε να βρούμε όλα τα $m \in \mathbb{Z}$ $0 \leq m \leq 20$ έτσι ώστε $(\overline{10}) \subset (\overline{m})$. Ισοδύναμα $\overline{10} = \overline{km}$. Επομένως $10 = km \mod 20$ και άρα $10 - km = 20t$ όπου $k, t \in \mathbb{Z}$. Άρα $10 = km + 20t \Leftrightarrow (m, 20)|10$. Αφού ο μέγιστος κοινός διαρέτης των $m, 20$ πρέπει να διαιρεί το 10 έπεται ότι έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για $J = (\overline{m})$.
– $(m, 20) = 1 \Rightarrow J/(\overline{10}) = \mathbb{Z}_{20}/(\overline{10})$ (μη γνήσιο ιδεώδες).
– $(m, 20) = 2 \Rightarrow J/(\overline{10}) = (\overline{2})/(\overline{10})$
– $(m, 20) = 5 \Rightarrow J/(\overline{10}) = (\overline{5})/(\overline{10})$
– $(m, 20) = 10 \Rightarrow J/(\overline{10}) = (\overline{10})/(\overline{10})$ (το μηδενικό ιδεώδες).

2. Να αποδείξετε ότι το ιδεώδες $(x^2 + 4)$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{R}[x]$: αν $I \subsetneqq J$ όπου J ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$ τότε $J = \mathbb{R}[x]$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 4) \simeq \mathbb{C}$.

Απόδειξη Έστω $p(x) = x^2 + 4$, $I = (p(x))$. Έστω $f(x) \notin I$. Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο Διαίρεσης $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ όπου $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) = 0$ ή 1. Τα παρακάτω ιδεώδη είναι ίσα:

$$(f(x), p(x)) = (p(x), r(x))$$

Παρατηρούμε ότι $r(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in I$, άτοπο. Άρα $\deg r(x) = 0$ ή 1. Αν $r(x) = c$ τότε $(p(x), c) = \mathbb{R}[x]$.

Αν $r(x) = ax + b$ τότε $p(x) = r(x)q'(x) + r'(x)$ όπου είτε $r'(x) = 0$ είτε $\deg r'(x) = 0$. Όμως

$$(f(x), p(x)) = (p(x), r(x)) = (r(x), r'(x))$$

και άρα αν $r'(x) = c \neq 0$ τότε $(f(x), p(x)) = \mathbb{R}[x]$. Μένει να αποκλείσουμε τη περίπτωση $r'(x) = 0$. Έστω ότι $p(x) = r(x)q'(x)$. Τότε $p(-b/a) = r(-b/a)q'(-b/a) = 0q'(-b/a) = 0$, άτοπο γιατί το $p(x)$ έχει μόνο μιγαδικές ρίζες.

Έστω $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f(x) \mapsto f(2i)$. Τότε ϕ είναι ομομορφισμός και είναι και επιμορφισμός. Είναι άμεσο ότι $x^2 + 4 \in \ker \phi$ και άρα $(x^2 + 4) \subset \ker \phi$. Έστω τώρα ότι $f(x) \in \ker \phi$. Από τον αλγόριθμο διαίρεσης προκύπτει ότι $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ όπου $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) = 0$ ή 1. Αφού $r(x)$ ανήκει αναγκαστικά στον $\ker \phi$ και κανένα πολυώνυμο βαθμού 1 ή 0 με πραγματικού συντελεστές δε μηδενίζεται στο $2i$ έπεται ότι $r(x) = 0$.

3. Να βρείτε τη πληθυκότητα του $R = \mathbb{Z}_6[x]/(x^2 + 4)$. Είναι ο δακτύλιος R σώμα; Είναι ο δακτύλιος R ακεραία περιοχή; Να βρείτε όλα τα ιδεώδη του $R = \mathbb{Z}_6[x]/(x^2 + 4)$.

Απόδειξη Έστω $J = (x^2 + 4)$. Από τον αλγόριθμο διαίρεσης προκύπτει ότι τα στοιχεία του R είναι της μορφής $f(x) + J$ όπου $f(x) = 0$ ή $\deg f(x) = 0$ ή

1. Άρα θέλουμε να μετρήσουμε πόσα πολυώνυμα υπάρχουν της μορφής $ax + b$ όπου $a, b \in \mathbb{Z}_6$. Υπάρχουν ακριβώς 36 τέτοια πολυώνυμα και η πληθυκότητα του R είναι 36. Αφού η πληθυκότητα του R δεν είναι δύναμη πρώτου αριθμού, ο R δε μπορεί να είναι σώμα και δεν είναι και ακεραία περιοχή.

(Το τελευταίο μέρος αυτής της άσκησης μένει ως extra credit).

Σύνολο ασκήσεων 7

1. Έστω $R = \mathbb{C}[x, y]$ και έστω $I = (x - i, y - 2)$. Να αποδείξετε με τη χρήση του τρίτου θεωρήματος ισομορφίας δακτυλίων ότι I είναι μέγιστο.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x,y]/(x-i,y-2) \;&\cong\; (\mathbb{C}[x,y]/(y-2)) \;/\; ((x-i,y-2)/(y-2)) \\ &\cong\; \mathbb{C}[x]/(x-i) \;\cong\; \mathbb{C}\end{aligned}$$

Παρατηρείστε τους ισομορφισμούς

- $\mathbb{C}[x]/(x-i) \cong \mathbb{C}$ που προκύπτει από τη χρήση του πρώτου Θεωρήματος ισομορφίας και τον επιμορφισμό $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, $f(x) \mapsto f(i)$
- $\mathbb{C}[x,y]/(y-2) \cong \mathbb{C}[x]$ που προκύπτει από τη χρήση του πρώτου Θεωρήματος ισομορφίας και τον επιμορφισμό $\mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x]$, $f(x,y) \mapsto f(x,2)$. Έτσι ο ισομορφισμός ορίζεται ως εξής: $f(x,y) + (y-2) \mapsto f(x,2)$.
- Σύμφωνα με τον παραπάνω ισομορφισμό προκύπτει ότι $\mathrm{Im}((\mathrm{x-i,y-2})/(\mathrm{y}-2)) = (\mathrm{x-i},0) = (\mathrm{x-i})$

2. Να βρείτε όλα τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/(6, x^2 + 7x + 12)$.

Απόδειξη Έστω $I = (6, x^2+7x+12) = (6, x^2+x+6(x+2)) = (6, x^2+x)$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x]/(6,x^2+7x+12) \;&\cong\; \mathbb{Z}[x]/(6) \;/\; (6,x^2+x)/(6) \\ &\cong\; \mathbb{Z}_6[x]/(x^2+x)\end{aligned}$$

Θα βρούμε λοιπόν πρώτα τα μέγιστα ιδεώδη στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6[x]/(x^2+x)$. Αυτά είναι ιδεώδη της μορφής $J/(x^2+x)$ όπου J ιδεώδες του $\mathbb{Z}_6[x]$ και $x^2+x \in J$. Αφού

$$(\mathbb{Z}_6[x]/(x^2+x)) \;/\; (J/(x^2+x)) \;\cong\; \mathbb{Z}_6[x]/J$$

είναι σώμα, έπεται ότι J είναι μέγιστο στον $\mathbb{Z}_6[x]$. Επίσης αφού $(x+J)(x+1+J) = J$ έπεται ότι $x + J = J \Rightarrow x \in J$ ή $x+1+J = J \Rightarrow x+1 \in J$. Σημειώνουμε ότι δεν είναι δυνατόν το J να περιέχει ταυτόχρονα και το x και το $x+1$: σε αυτή τη περίπτωση δε θα ήταν γνήσιο ιδεώδες. Έστω τώρα ότι $x \in J$. Αφού (x) δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{Z}_6[x]$ έπεται ότι υπάρχει $g(x) \in J \setminus (x)$. Άρα $g(x) = xq(x) + c$ όπου c δεν είναι αντιστρέψιμο στο $\mathbb{Z}_6$. Αυτό σημαίνει ότι $c = 2, 3$, ή 4. Παρατηρούμε ότι $4 \in J \Leftrightarrow 2 \in J$. Επίσης

$$\mathbb{Z}_6[x]/(x,2) \;\cong \mathbb{Z}_6[x]/(x)/(x,2)/(x) \cong \mathbb{Z}_6/(2) \cong \mathbb{Z}_3$$

σώμα, και άρα $(x,2)/(x^2+x)$ μέγιστο. Ομοίως $(x,3)/(x^2+x)$ μέγιστο, και αντίστοιχα για τη περίπτωση που $x+1 \in J$.

Τέλος αν γυρίσουμε πίσω στον ισομορφισμό

$$\mathbb{Z}[x]/(6, x^2+7x+12) \cong \mathbb{Z}_6[x]/(x^2+x)$$

προκύπτει ότι τα ιδεώδες $(2, x) + I$ είναι μέγιστο και αντίστοιχα για τις άλλες περιπτώσεις.