Αλγεβρικές Δομές ΙΙ
Ύλη 29.04.30

- Επανάληψη: πρώτο θεώρημα Ισομορφίας Δακτυλίων: $R/\ker\phi \;\cong\; \mathrm{Image}\phi$, $r+\ker\phi \mapsto \phi(r)$
- Επανάληψη: Τα ιδεώδη του R/I
- Επανάληψη: Αν $\mathbb{k}$ είναι σώμα, τότε κάθε ιδεώδες I του $\mathbb{k}[x]$ είναι κύριο και υπάρχει $f(x)\in\mathbb{k}[x]$ έτσι ώστε $I=(f(x))$.
- $\phi: R \longrightarrow S$ ομομορφισμός δακτυλίων, και $I=(a_1,\ldots,a_s)$. Τότε $\phi(I)=(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_s))$.
- Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφίας Δακτυλίων I,J ιδεώδη του R,τότε $I+J/I \;\cong\; J/I\cap J$ (αντίστοιχο διάγραμμα)
- Παράδειγμα $I=(2)$, $J=(3)$ στο $\mathbb{Z}$.
- Τρίτο Θεώρημα Ισομορφίας Δακτυλίων I,J ιδεώδη του R, $I\subset J$, τότε
$$(R/I)(J/I)\cong\; R/J$$
(αντίστοιχο διάγραμμα)
- Παράδειγμα $I=(2)$, $J=(2,x)$ στο $\mathbb{Z}[x]$. Τότε $\mathbb{Z}[x]/(2,x) \;\cong\; \mathbb{Z}[x]/(2) \;\cong\; (2,x)/(2) \cong\; \mathbb{Z}_2[x]/(x)\cong\mathbb{Z}_2$.
- Ορισμός μέγιστου ιδεώδους σε αντιμεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.
- Για να είναι ένα γνήσιο ιδεώδες I είναι μέγιστο αρκεί να δείξουμε ότι αν $f\notin I$ τότε $I+(f)=R$ δηλαδή ισοδύναμα ότι $1\in I+(f)$.
- Παράδειγμα: $(2,x)$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{Z}[x]$,
- Πρόταση: I μέγιστο στον R αν και μόνο αν R/I είναι σώμα.
- Παράδειγμα: $(2,x)$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{Z}[x]$