Αλγεβρικές Δομές ΙΙ
Ύλη 22.05.14

- Παράδειγμα: $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Πράγματι εξετάζουμε ότι στο $\mathbb{Q}[x]$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}$, άρα ούτε και στο $\mathbb{Q}$ και άρα δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων από τα οποία το ένα να έχει βαθμό 1. Επίσης δείχνουμε ότι δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πολυωνύμων στο $\mathbb{Z}[x]$ βαθμού 2.
- Θεώρημα του Eisenstein
- Παραδείγματα: $2x^5 - 8x^3 + 4x + 4$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Πράγματι $2x^5 - 8x^3 + 4x + 4 = 2(x^5 - 4x^3 + 2x + 2)$ και αρκεί να δείξουμε ότι $x^5 - 4x^3 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα του Eisenstein για $p = 2$.
- $x^{157} + 5$ είναι ανάγωγο σύμφωνα με Θεώρημα του Eisenstein για $p = 5$.
- Έστω $f(x) = x^{157} + 5$ και $I = (f(x))$ στο $\mathbb{R}[x]$. Τότε $\mathbb{R}[x]/I$ δεν είναι σώμα γιατί δεν είναι καν ακεραία περιοχή.
- Έστω $f(x) = x^{157} + 5$ και $I = (f(x))$ στο $\mathbb{Q}[x]$. Τότε $\mathbb{Q}[x]/I$ είναι σώμα.
- Έστω $f(x) = x^{157} + 5$ και $I = (f(x))$ στο $\mathbb{Z}[x]$. Τότε $\mathbb{Q}[x]/I$ δεν είναι σώμα γιατί I δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{Z}[x]$ αφού $I \subsetneqq (f(x), x) = (x, 5)$. Όμως $\mathbb{Z}[x]$ είναι ακεραία περιοχή. Πράγματι αν $(g_1(x) + I)(g_2(x) + I) = I \Leftrightarrow g_1(x)g_2(x) \in I$ τότε κοιτάζοντας την αντίστοιχη σχέση στο $\mathbb{Q}[x]/((f(x))$ προκύπτει ότι ένα από τα $g_i(x) = cf(x)$ (έστω $i = 1$) όπου $c \in \mathbb{Q}[x]$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $mg_1(x) = nf(x)$. Όμως αφού $f(x)$ είναι πρωτόγονο, έπεται τελικά ότι $g_1(x) \in I$.
- Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γενικευτεί σε κάθε ακεραία περιοχή για την οποία έχει νόημα να μιλάμε για μέγιστο κοινό διαιρέτη. Θα πρέπει να γενικεύσουμε τη ¨σχέση' ανάμεσα στο $\mathbb{Z}$ και στο $\mathbb{Q}$.
- Ένα ιδεώδες I ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου R είναι πρώτο ανν R/I είναι ακεραία περιοχή.
- Κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο. Το ιδεώδες (0) στο $\mathbb{Z}$ είναι πρώτο αλλά δεν είναι μέγιστο.