Αλγεβρικές Δομές ΙΙ
Συνοπτική Ύλη 08.05.14

- Το ιδεώδες $I = (x, y)$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{k}[x, y]$ όπου $\mathbb{k}$ σώμα.
$$\mathbb{k}[x,y]/(x,y) \;\cong\; \mathbb{k}[x,y]/(y) \;/\; (x,y)/(y) \;\cong\; \mathbb{k}[x]/(x) \cong \mathbb{k}$$
- Για το παραπάνω χρησιμοποιήθηκε ότι αν $\phi : \mathbb{k}[x, y] \to \mathbb{k}[x]$, $f(x, y) \mapsto f(x, 0)$ τότε $\ker \phi = (y)$.
- Αν $\phi : \mathbb{k}[x, y] \to \mathbb{k}[x]$, $f(x, y) \mapsto f(x, a)$ τότε $\ker \phi = (y - a)$
- Αν $\phi : \mathbb{k}[x, y] \to \mathbb{k}[x]$, $f(x, y) \mapsto f(b, a)$ τότε $\ker \phi = (x - b, y - a)$
- Το ιδεώδες $J = (x, y)$ δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{k}[x, y, z]$ παρόλο που $I \subsetneq J$.
- Τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{C}[x]$ είναι της μορφής $(x - a)$ όπου $a \in \mathbb{C}$, (με πλήρη απόδειξη).
- Τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{C}[x, y]$ είναι της μορφής $(x - a, y - b)$ όπου $a, b \in \mathbb{C}$. Έχουμε ήδη δείξει την μία κατεύθυνση. Η άλλη κατεύθυνση είναι το περίφημο θεώρημα του Hilbert, (Nullstellensatz).
- $(x-a)$ όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$, όπως και το ιδεώδες (x^2+1). Το ιδεώδες $I = (x^2 - 3x + 2)$ δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{R}[x]$ αφού $x - 2 + I$ είναι διαιρέτης του μηδενός στο $\mathbb{R}[x]/I$
- Το ιδεώδες $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ είναι μέγιστο στον $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.