Αλγεβρικές Δομές ΙΙ
Ύλη 06.05.14

- Το ιδεώδες $I = (x^2+5)$ δεν είναι μέγιστο στο $\mathbb{C}[x]$ αφού $I \subsetneqq (x-\sqrt{5}i)$. Επίσης στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x]/I$ το στοιχείο $x-\sqrt{5}i+I$ είναι διαιρέτης του μηδενός και άρα $\mathbb{C}[x]/I$ δεν είναι ακεραία περιοχή και δε μπορεί να είναι σώμα. Τέλος $I+(x-\sqrt{5}i) = (x-\sqrt{5}i) \neq \mathbb{C}[x]$. Επαληθεύσαμε ότι $I = (x^2+5)$ δεν πληροί (όπως είναι φυσικό) κανέναν από τους (ισοδύναμους) χαρακτηρισμούς για να είναι μέγιστο.
- Το ιδεώδες $J = (x^2+5)$ είναι μέγιστο στο $\mathbb{R}[x]$. Πράγματι έστω ότι $f(x) \notin J$. Θα δείξουμε ότι $J+(f(x)) = \mathbb{R}[x]$. Πράγματι χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διαίρεσης προκύπτει ότι $f(x) = (x^2+5)p(x)+r(x)$ όπου $r(x) \neq 0$ και $\deg r(x)$ είναι 0 ή 1. Επίσης $r(x) \in J+(f(x))$ ενώ $J+(f(x)) = (x^2+5, f(x)) = (x^2+5, r(x))$. Στη περίπτωση που $\deg r(x) = 0$, τότε $r(x)$ είναι αντιστρέψιμη σταθερά και $J+(f(x)) = \mathbb{R}[x]$. Στη περίπτωση που $\deg r(x) = 1$ τότε επαναλαμβάνοντας προκύπτει ότι $x^2+5 = r(x)p'(x)+r'(x)$ όπου $r'(x) = 0$ ή $\deg r'(x)$ είναι 0 και επίσης $J+(f(x)) = (x^2+5, r(x)) = (r(x), r'(x))$. Αν $r'(x) = 0$ τότε $x^2+5 = r(x)p'(x)$ και η ρίζα του $r(x)$ θα ήταν ρίζα του x^2+5. Όμως x^2+5 δεν έχει πραγματική ρίζα. Άρα $\deg r'(x) = 0$ και $J+(f(x)) = (r(x), r'(x)) = \mathbb{R}[x]$
- Εναλλακτικά $\phi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f(x) \mapsto f(\sqrt{5}i)$ είναι επιμορφισμός και $\ker\phi = (x^2+5)$. (Επιμορφισμός: $a+b/\sqrt{5}x \mapsto a+bi$. Για να δείξουμε ότι $\ker\phi = (x^2+5)$ χρησιμοποιούμε και πάλι τον αλγόριθμο διαίρεσης: έστω ότι $\ker\phi = (g(x))$. Τότε $g(x) = (x^2+5)p(x)+r(x)$ όπου $r(x) = 0$ ή $\deg r(x)$ είναι 0 ή 1. Δείχνουμε ότι $r(x) \in \ker\phi$. Έτσι αποκλείουμε τη περίπτωση που $\deg r(x) = 1$ αφού $r(x)$ θα είχε μία πραγματική ρίζα, όπως επίσης και τη περίπτωση που $\deg r(x) = 0$) .
- Προσοχή: $I \neq J$. Ισχύει ότι $J \subsetneqq I$, όμως το J δεν είναι ιδεώδες του $\mathbb{C}[x]$.
- Θα βρούμε τον αντίστροφο του $x+J$ στον $\mathbb{R}[x]/J$. Ισχύει ότι $(x^2+5, x) = (1)$. Με τον αλγόριθμο διαίρεσης προκύπτει ότι
$$\frac{1}{5}(x^2+5) - \frac{x}{5}\cdot x = 1$$
άρα
$$(x+J)\cdot(-\frac{x}{5}+J) = 1_J$$
Δηλαδή $(x+J)^{-1} = -\frac{x}{5}+J$.
- Έστω $K = (x^2+5)$ στον $\mathbb{Z}_9[x]$. Έστω $p(x) = x^2+5$. Παρατηρούμε ότι $p(2) = 0$. Επομένως $x-2$ διαιρεί x^2+5 και $(x^2+5) \subsetneqq (x-2)$. Άρα K δεν είναι μέγιστο. Όμως ούτε $(x-2)$ δεν είναι μέγιστο αφού $\mathbb{Z}_9[x]/(x-2) \cong \mathbb{Z}_9$. Ισοδύναμα $(x-2) \subsetneqq (x-2, 3) \neq \mathbb{Z}_9[x]$. Παρατηρείστε ότι $(x-2, 2) = \mathbb{Z}_9[x]$.