Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Σύνολο ασκήσεων 9

1. Έστω $f(x,y) = x^4 + 2$. Να γράψετε το $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων παραγόντων στο $\mathbb{Z}[x,y]$, $\mathbb{Q}[x,y]$,$\mathbb{R}[x,y]$,$\mathbb{C}[x,y]$. Είναι το ιδεώδες $(f(x,y))$ μέγιστο στους αντίστοιχους δακτυλίους;

Έστω ότι $f(x,y) = f_1(x,y)f_2(x,y)$ τότε (κοιτάζοντας τον μεγαλύτερο βαθμό του y και στα δύο πολυώνυμα και στη συνέχεια στο γινόμενο f) προκύπτει ότι το y δεν εμφανίζεαι στα πολυώνυμα f_1, f_2. Άρα για να απαντήσουμε Θα θεωρήσουμε το πολυώνυμο $g(x) = x^4 + 2 \in \mathbb{Z}$. Για αυτό μπορούμε να δούμε ότι $\pm 1, \pm 2$ δεν είναι ρίζες του $g(x)$ και σύμφωνα με το θεώρημα που κάναμε προκύπτει ότι $g(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$. Θα δούμε τώρα αν μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές βαθμού 2 το καθένα . Έστω $g_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Έπεται ότι $a_2b_2 = 1 \Rightarrow a_2 = b_2 = \pm 1$. Επίσης $a_0b_0 = 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_0 = \pm 2$ ενώ $b_0 = \pm 1$. Αφού $a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \Rightarrow 1 + a_1b_1 + 2 = 0 \Rightarrow a_1b_1 = -3$. Τέλος $a_1b_0 + b_1a_0 = 0 \Rightarrow a_1 + 2b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -2b_1$. Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο αφού αντικαθιστώντας έχουμε: $(-2b_1)b_1 = -3$ που δεν έχει λύση στους ακεραίους. Άρα $g(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ και κατά συνέπεια και στο $\mathbb{Q}[x]$ και αντίστοιχα και το πολυώνυμο $f(x,y)$ στους δακτυλίους $\mathbb{Z}[x,y]$ και $\mathbb{Q}[x,y]$. (Πολύ πιο γρήγορα θα μπορούσε να καταλήξει κανείς στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Eisenstein).

Παρατηρούμε ότι $x^4 + 2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i)$ στο $\mathbb{C}[x]$ και αφού οι τετραγωνικές ρίζες του i είναι $\pm e^{i\pi/4}$ (δείτε τον μοναδιαίο κύκλο) έπεται ότι οι ρίζες του $x^4 + 2$ στο $\mathbb{C}$ είναι: $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ και $\pm\sqrt{2}e^{3\pi/4}$. Επίσης $\overline{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = -\sqrt{2}e^{3\pi/4}$. Τελικά οι δύο παράγοντες του $x^4 + 2$ στο $\mathbb{R}[x,y]$ προκύπτουν από τα γινόμενα $(x - z)(x - \overline{z})$ όπου z είναι ρίζα του $x^4 + 2$ και είναι ίσοι με $x^2 - 2x + 2$ και $x^2 + 2x + 2$.

Στο $\mathbb{C}[x,y]$ το $f(x,y) = (x - e^{i\pi/4})(x + e^{i\pi/4})(x - e^{3i\pi/4})(x + e^{3i\pi/4})$. Το ιδεώδες $(f(x,y))$ ΔΕΝ είναι μέγιστο σε κανέναν από τους δακτυλίους αφού ισχύει $(f(x,y)) \subset (f(x,y),y)$.

2. Να γράψετε το $x^3 - y^3$ ως γινόμενο αναγώγων στο $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{C}[x,y]$.

Ισχύει ότι $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Το πολυώνυμο $x - y$ είναι ανάγωγο αφού έχει βαθμό 1 στο x αλλά και y. Θα ελέγξουμε αν $x^2 + xy + y^2$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x,y]$. Έστω ότι $x^2+xy+y^2 = (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$. Έπεται ότι $a_1a_2 = 1$, $a_1b_2 + a_2b_1 = 1$, $a_1c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$, $b_1c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$, $b_1b_2 = 1$. Προκύπτει ότι $(a_1b_2)^2 - (a_1b_2) + 1 = 0$ που δεν έχει λύση στους πραγματικούς. Άρα $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ είναι η ανάλυση σε ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x,y]$.

Αφού $a_1b_2 = 1 + i\sqrt{3}/2$ είναι λύση της εξίσωσης $(a_1b_2)^2 - (a_1b_2) + 1 = 0$ μπορούμε να θέσουμε $a_1 = 1$ και $b_2 = 1 + i\sqrt{3}/2$. Άρα $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{2}{1+i\sqrt{3}}y)(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}y)$.

3. Να αποφασίσετε αν $k[x,y]/(x^2-6x+5)$ είναι σώμα όταν $k=\mathbb{Q},\mathbb{R}$. Ομοίως για τον δακτύλιο $k[x,y]/(x^2-6x+6)$.

Ο δακτύλιος πηλίκο θα είναι σώμα αν και μόνο αν το πολυώνυμο είναι ανάγωγο στον δακτύλιο των πολυωνύμων. Και τα δύο πολυώνυμα έχουν πραγματικές ρίζες, άρα δεν είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$. Ο δεύτερος δακτύλιος πηλίκο είναι σώμα.

4. Να αποφασίσετε αν x^3+3x^2-8, x^4-22x^2+1 είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$.

Για το πρώτο πολυώνυμο, αρκεί να ελέγξουμε αν έχει ρίζα από το σύνολο των διαιρετών του 8: $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$.

Για το δεύτερο πολυώνυμο παρατηρούμε ότι ±1 δεν είναι ρίζα. Αρκεί λοιπόν να βεβαιωθούμε ότι $f(x)=x^4-22x^2+1$ δε γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 2.

5. Να βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 3 στο $\mathbb{Z}_3[x]$.

Θα θεωρήσουμε όλα τα πολυώνυμα βαθμού 3 στο $\mathbb{Z}_3[x]$ ($2\times3\times3\times3$ τέτοια πολυώνυμα) και θα κρατήσουμε μόνο εκείνα που δεν έχουν ρίζα στο $\mathbb{Z}_3$. Μπορούμε λοιπόν να αγνοήσουμε όλα εκείνα με σταθερό όρο 0 και μας μένει να εξετάσουμε ($2\times3\times3\times2$ περιπτώσεις.)

6. Έστω $f(x)=x^3+5x+122$. Να βρείτε p έτσι ώστε $x^3+\overline{5}x+\overline{122}$ να είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Να συμπεράνετε ότι $f(x)$ είναι αναγκαστικά ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Είναι $f(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$;

Όταν $p=3$, $x^3+\overline{5}x+\overline{122}=x^3+2x+2$ και δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_3$ άρα είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_3[x]$. Αν $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ τότε στο $\mathbb{Z}[x]$ θα ισχύει ότι $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ όπου $f_1(x),f_2(x)$ έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Ο αρχικός τους όρος είνι ±1 και άρα περνώντας στο $\mathbb{Z}_3[x]$ θα πάρουμε μία ανάλυση και για το x^5+x+2, άτοπο. Το $f(x)$ ΔΕΝ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ αφού έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2.