

Αλγεβρικές Δομές II

Σύνολο ασκήσεων 9

1. Έστω $f(x) = x^4 + 2$. Να γράψετε το $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων παραγόντων στο $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$, $\mathbb{C}[x, y]$. Είναι το ιδεώδες $(f(x, y))$ μέγιστο στους αντίστοιχους δακτυλίους;
2. Να γράψετε το $x^3 - y^3$ ως γινόμενο αναγώγων στο $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{C}[x, y]$.
3. Να αποφασίσετε αν $k[x, y]/(x^2 - 6x + 5)$ είναι σώμα όταν $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Ομοίως για τον δακτύλιο $k[x, y]/(x^2 - 6x + 6)$.
4. Να αποφασίσετε αν $x^3 + 3x^2 - 8$, $x^4 - 22x^2 + 1$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$.
5. Να βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 3 στο $\mathbb{Z}_3[x]$.
6. Έστω $f(x) = x^3 + 5x + 122$. Να βρείτε p έτσι ώστε $x^3 + 5x + 122$ να είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Να συμπεράνετε ότι $f(x)$ είναι αναγκαστικά ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Είναι $f(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$;