

Αλγεβρικές Δομές II

Σύνολο ασκήσεων 5

Εβδομάδα 1.04.14-7.04.14

1. Έστω p πρώτος. Να δείξετε ότι στο σώμα \mathbb{Z}_p τα στοιχεία $\bar{1}$ και $\overline{p-1}$ είναι τα μόνα στοιχεία που είναι αντίστροφα του εαυτού τους. Να αποφασίσετε αν ισχύει ότι $x^p + a = (x + a)^p$ στο $\mathbb{Z}_p[x]$.
2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ με το $3x^2 + 2x - 3$ στο $\mathbb{Z}_7[x]$.
3. Έστω τα πολυώνυμα $x^5 - 1$, $x^6 - 1$, $x^7 - x$ στο $\mathbb{Z}_{14}[x]$. Να βρείτε τις ρίζες τους.
3. Έστω $I = (3, \sqrt{2})$, $J = (2, \sqrt{2})$ ιδεώδη στον $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Να βρείτε γεννήτορες για τα ιδεώδη $I + J$, IJ , $I \cap J$. Να αποδείξετε ότι αν $a + b\sqrt{2} \notin I$ τότε $I + (a + b\sqrt{2}) = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.