Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Σύνολο ασκήσεων 3

Εβδομάδα 24.03.14-27.03.14

1. Έστω $I = (x^2+1)$ στο δακτύλιο $R = \mathbb{Z}_2[x]$. Να αποδείξετε ότι στο δακτύλιο R/I ισχύει ότι $x^n + I$ είναι ίσο είτε με $x + I$ είτε με $1 + I$. Να συμπεράνετε ότι $R/I = \{I, 1+I, x+I, x+1+I$. Να βρείτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του R/I.

Απάντηση Αν $n = 2k$, θα δείξουμε με επαγωγή στο k ότι $x^n + I = 1 + I$. Πράγματι, η πρόταση ισχύει για $k = 0$. Έστω αληθής για k. Τότε $x^{2(k+1)} + I = x^{2k}x^2 + I = (1+I)*(1+I) = 1+I$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι αν $n = 2k+1$ τότε $x^{2k+1} = x + I$. Έπεται ότι αν $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{Z}_2$, τότε $f(x) + I = b_1 x + b_0 + I$ όπου $b_i \in \mathbb{Z}_2$.

$+$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$0+I$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$1+I$	$1+I$	0	$(x+1)+I$	$x+I$
$x+I$	$x+I$	$(x+1)+I$	0	$1+I$
$(x+1)+I$	$(x+1)+I$	$x+I$	$1+I$	0

$.$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$0+I$	$0+I$	$0+I$	$0+I$	$0+I$
$1+I$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$x+I$	$0+I$	$x+I$	$1+I$	$(x+1)+I$
$(x+1)+I$	$0+I$	$(x+1)+I$	$(x+1)+I$	$0+I$

2. Έστω $J = (x^2+x+1)$ στο δακτύλιο $R = \mathbb{Z}_2[x]$. Να αποδείξετε ότι $R/J = \{J, 1+J, x+J, x+1+J$. Να βρείτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του R/J. Να συμπεράνετε ότι R/J είναι σώμα.

Απάντηση Έχουμε ότι $x^2+I = (x+1)+I$ ενώ $x^3+I = (x^2+x)+I = 1+I$ και $x^4 + I = x + I$. Άρα $x^n + I \in \{1+I, x+I, (x+1)+I\}$. Όπως και προηγουμένως αν $f(x) = a_n x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{Z}_2$, τότε $f(x) + I = b_1 x + b_0 + I$ όπου $b_i \in \mathbb{Z}_2$.

$+$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$0+I$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$1+I$	$1+I$	0	$(x+1)+I$	$x+I$
$x+I$	$x+I$	$(x+1)+I$	0	$1+I$
$(x+1)+I$	$(x+1)+I$	$x+I$	$1+I$	0

$\cdot$	$0+I$	$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$1+I$		$1+I$	$x+I$	$(x+1)+I$
$x+I$		$x+I$	$(x+1)+I$	$1+I$
$(x+1)+I$		$(x+1)+I$	$1+I$	$x+I$

3. Έστω $\phi: \ R[x] \longrightarrow R[a]$ ο ομομορφισμός εκτίμησης δακτυλίων, όπου $f(x) \mapsto f(a)$. Να βρείτε το πυρήνα του ϕ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις: α) $\phi: \ \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$, β) $\phi: \ \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[i]$, ς) $\phi: \ \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[0]$.

Απάντηση

α) Είναι φανερό ότι κανένα (μη μηδενικό) πολυώνυμο βαθμού 0 ή 1 δεν ανήκει στον $\ker\phi$. Επίσης $x^2+1 \in \ker\phi$. Έστω τώρα $f(x) \in \ker\phi$ βαθμού ≥ 2. Από τον Ευκλείδιο αλγόριθμο διαίρεσης δύο πολυωνύμων, έπεται ότι αν $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ τότε $f(x) = (x^2+1)p(x) + r(x)$ όπου $\deg r(x)$ είναι 0 ή 1. Άρα $\phi(f(x)) = \phi(x^2+1)\phi(p(x)) + \phi(r(x)) = 0$. Επομένως $r(x) \in \ker\phi$. Για να αποφύγουμε το άτοπο, $r(x) = 0$ και $f(x) = (x^2+1)p(x)$, άρα $\ker\phi = (x^2+1)$.

β) Είναι φανερό ότι κανένα (μη μηδενικό) πολυώνυμο βαθμού 0 δεν ανήκει στον $\ker\phi$. Επίσης $x - i \in \ker\phi$. Έστω τώρα $f(x) \in \ker\phi$ βαθμού ≥ 1. Από τον Ευκλείδιο αλγόριθμο διαίρεσης δύο πολυωνύμων, έπεται ότι αν $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ τότε $f(x) = (x-i)p(x) + r(x)$ όπου $\deg r(x)$ είναι 0. Άρα $\phi(f(x)) = \phi(x-i)\phi(p(x)) + \phi(r(x)) = 0$. Επομένως $r(x) \in \ker\phi$. Για να αποφύγουμε το άτοπο, $r(x) = 0$ και $f(x) = (x-i)p(x)$, άρα $\ker\phi = (x-i)$.

γ) $\ker\phi = (x)$.