

## Αλγεβρικές Δομές II

### Σύνολο ασκήσεων 3

Εβδομάδα 24.03.14-27.03.14

1. Έστω  $I = (x^2 + 1)$  στο δακτύλιο  $R = \mathbb{Z}_2[x]$ . Να αποδείξετε ότι στο δακτύλιο  $R/I$  ισχύει ότι  $x^n + I$  είναι ίσο είτε με  $x + I$  είτε με  $1 + I$ . Να συμπεράνετε ότι  $R/I = \{I, 1 + I, x + I, x + 1 + I\}$ . Να βρείτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του  $R/I$ .
2. Έστω  $J = (x^2 + x + 1)$  στο δακτύλιο  $R = \mathbb{Z}_2[x]$ . Να αποδείξετε ότι  $R/J = \{J, 1 + J, x + J, x + 1 + J\}$ . Να βρείτε τους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του  $R/J$ . Να συμπεράνετε ότι  $R/J$  είναι σώμα.
3. Έστω  $\phi : R[x] \rightarrow R[a]$  ο ομομορφισμός εκτίμησης δακτυλίων, όπου  $f(x) \mapsto f(a)$ . Να βρείτε το πυρήνα του  $\phi$  σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:  
α)  $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[i]$ , β)  $\phi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[i]$ , γ)  $\phi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[0]$ .