Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Σύνολο ασκήσεων 2

Εβδομάδα 17.03.14-23.03.14

1. Έστω $I = (100)$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη J του $\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $I \subset J$. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη K του $\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $K \subset I$.

Απάντηση Έστω $I \subset J$. Όλα τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ είναι κύρια. Άρα $J = m\mathbb{Z}$ όπου $m \in \mathbb{N}$. Αφού $I \subset J$ έπεται ότι $100 \in m\mathbb{Z} \Rightarrow 100 = mk$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως m πρέπει να είναι διαιρέτης του 100.

Αντίστροφα, αν $K = s\mathbb{Z} \subset I$ τότε $s = s \cdot 1 \in I$ και $s = 100l$, $l \in \mathbb{Z}$.

2. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και I ιδεώδες του R. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathrm{Rad\ I} = \{\mathrm{r} \in \mathrm{R} : \ \mathrm{r}^{\mathrm{n_r}} \in \mathrm{I}, \text{ για κάποιο } \mathrm{n_r} \in \mathbb{N}\}$ είναι ιδεώδες του R και ότι $I \subset \mathrm{Rad\ I}$. Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ να υπολογίσετε $\mathrm{Rad}\ (3)$, $\mathrm{Rad}\ (27)$, $\mathrm{Rad}\ (36)$.

Απάντηση Έστω $r, s \in \mathrm{RadI}$, $f \in R$. Τότε $(r-s)^{n_r+n_s} \in I$ και έτσι $r - s \in \mathrm{RadI}$. Πράγματι στο δυωνυμικό ανάπτυγμα ο όρος $r^k s^{(n_r+n_s)-k} \in I$ όταν $k \geq n_r$. Επίσης όταν $k < n_r$ τότε $(n_r + n_s) - k > n_s$ και άρα και πάλι $r^k s^{(n_r+n_s)-k} \in I$. Επίσης, $(fr)^{n_r} = f^{n_r} r^{n_r} \in I$ και επομένως $fr \in \mathrm{RadI}$. Έστω τώρα $g \in I$. Τότε $g \in \mathrm{Rad\ I}$ με $n_g = 1$.

$\mathrm{Rad}\ (3) = (3)$: αν $r^n \in (3)$ τότε $r^n = 3m$ και αφού 3 πρώτος, έπεται ότι 3 διαιρεί το r, δηλαδή $r \in (3)$.

$\mathrm{Rad}(27) = (3)$: αν $r^n \in (27) = (3^3)$ τότε $r^n = 3^3 m$ και αφού 3 πρώτος, έπεται ότι 3 διαιρεί το r, δηλαδή $r \in (3)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι $(3m)^3 \in (27)$.

$\mathrm{Rad}\ (36) = (6)$: αν $r^n \in (36) = (2^2 3^2)$ τότε $r^n = 2^2 3^2 m$ και αφού $2, 3$ πρώτοι, έπεται ότι $3, 2$ διαιρούν το r, δηλαδή $r \in (6)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι $(6m)^2 \in (36)$.

3. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{20}$.

Απάντηση Γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ είναι κυκλική ομάδα. Έστω I ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{20}$. Το I είναι υποομάδα της $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ άρα είναι κυκλική. Επομένως $I = (\overline{m}) = m\mathbb{Z}_{20}$ για κάποιο ακέραιο $0 \leq m \leq 19$. Στο $\mathbb{Z}_{20}$ τα αντιστρέψιμα στοιχεία είναι τα $\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}$. Έπεται ότι αν m ανήκει στο $A = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ τότε $I = (\overline{m})$ είναι μη γνήσιο και ίσο με τον $\mathbb{Z}_{20}$.

Έστω λοιπόν ότι J είναι γνήσιο ιδεώδες διάφορο του μηδενός. Επίσης $m = km'$ όπου $k \in A$ αν και μόνο αν $(\overline{m}) = (\overline{m'})$ (ελέγξτε το!).

Έτσι προκύπτουν τα παρακάτω διαφορετικά γνήσια μη μηδενικά ιδεώδη:

– $(\overline{2}) = (\overline{6}) = (\overline{14}) = (\overline{18})$

– $(\overline{4}) = (\overline{12}) = (\overline{8}) = (\overline{16})$

– $(\overline{5}) = (\overline{15})$

– $(\overline{10})$

4. Στο δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[x]$ να δείξετε ότι $(x^2 + 3x + 1, x)$ είναι μη γνήσιο και ισούται με R, ενώ $(x^2 + 2x + 1, x^2 + 3x + 2) = (x + 1)$.

Απάντηση $1 = x^2 + 3x + 1 - x(x+3) \in (x^2+3x+1, x)$ και άρα $(x^2 + 3x + 1, x) = R$.

Έστω $J = (x^2+2x+1, x^2+3x+2)$, $I = (x+1)$. Τότε $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \in I$, $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) \in I$. Επομένως ένα τυχαίο στοιχείο του J, $f(x)(x^2+2x+1)+g(x)x^2+3x+2 \in I$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι $x+1 = (x^2+3x+2)-(x^2+2x+1) \in J$.

5.

(1) Να υπολογίσετε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων από τον $\mathbb{Z}$ στον $\mathbb{Z}$. Για κάθε έναν από αυτούς να βρείτε και τον πυρήνα.
(2) Έστω $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ο δακτύλιος με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Να βρείτε όλους ομομορφισμούς δακτυλίων από τον R στον $\mathbb{Z}$. Για κάθε έναν από αυτούς να βρείτε και τον πυρήνα.

Απάντηση

(1) Έστω $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ομομορφισμός δακτυλίων, και έστω ότι $\phi(1) = m$. Τότε $\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = m^2$. Επομένως $m^2 = m$ και άρα $m = 1, 0$. Στη πρώτη περίπτωση έπεται ότι $\phi(a) = a$ και $\ker \phi = (0)$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση $\phi(a) = 0$ και $\ker \phi = \mathbb{Z}$.
(2) Έστω $\phi(1,0) = m$. Όπως προηγουμένως έπεται ότι $m = 1, 0$. Επίσης το ίδιο και για $\phi(0,1)$. Έστω ότι $\phi(1,0) = 1$, $\phi(0,1) = 1$. Τότε $\phi(1,1) = \phi(1,0)+\phi(0,1) = 2$ ενώ $\phi(1,1) = \phi((1,1)\cdot(1,1)) = 2^2$, άτοπο. Μένουμε λοιπόν με τις παρακάτω περιπτώσεις: $\phi_1(a,b) = 0$ ($\ker \phi_1 = R$, $\phi_2(a,b) = a$, $\ker \phi_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$, $\phi_3(a,b) = b$, $\ker \phi_3 = \mathbb{Z} \times \{0\}$.

6. Να βρεθούν τα αριστερά ιδεώδη του $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$

Το αριστερό ιδεώδες $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)A = \{BA : B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)\}$ είναι μη γνήσιο αν και μόνο αν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, δηλ. $\det A \neq 0$.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν υπολογίζοντας τα αριστερά μη μηδενικά ιδεώδη της μορφής $J = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)A$ όπου $\det A = 0$ (και $A = (a_{ij}) \neq 0$).

Έστω ότι η δεύτερη στήλη του A είναι μηδενική, ενώ $a_{11} = 1$. Τότε αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά με τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και στη συνέχεια με πράξεις γραμμών, μπορούμε να δείξουμε ότι οι πίνακες

$$J = \{0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

Αντίστοιχα αν η πρώτη στήλη του A είναι μηδενική.

Τέλος και στις τρεις περιπτώσεις που ο μη αντιστρέψιμος πίνακας A έχει μη μηδενικό στοιχείο και στις δύο στήλες, προκύπτει ότι

$$J = \{0, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$$