

## Αλγεβρικές Δομές II

### Σύνολο ασκήσεων 2

Εβδομάδα 17.03.14-23.03.14

1. Έστω  $I = (100)$  ιδεώδες του  $\mathbb{Z}$ . Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη  $J$  του  $\mathbb{Z}$  έτσι ώστε  $I \subset J$ . Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη  $K$  του  $\mathbb{Z}$  έτσι ώστε  $K \subset J$ .
2. Έστω  $R$  αντιμεταθετικός δακτύλιος και  $I$  ιδεώδες του  $R$ . Να δείξετε ότι το σύνολο  $\text{Rad } I = \{r \in R : r^{n_r} \in I, \text{ για κάποιο } n_r \in \mathbb{N}\}$  είναι ιδεώδες του  $R$  και ότι  $I \subset \text{Rad } I$ . Στον δακτύλιο  $\mathbb{Z}$  να υπολογίσετε  $\text{Rad } (3)$ ,  $\text{Rad } (27)$ ,  $\text{Rad } (36)$ .
3. Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη του  $\mathbb{Z}_{20}$ .
4. Στο δακτύλιο  $R = \mathbb{Z}[x]$  να δείξετε ότι  $(x^2 + 3x + 1, x)$  είναι μη γνήσιο και ισούται με  $R$ , ενώ  $(x^2 + x + 1, x^2 + 3x + 2) = (x + 1)$ .
5.
  - (1) Να υπολογίσετε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων από τον  $\mathbb{Z}$  στον  $\mathbb{Z}$ . Για κάθε έναν από αυτούς να βρείτε και τον πυρήνα.
  - (2) Έστω  $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , ο δακτύλιος με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη. Να βρείτε όλους ομομορφισμούς δακτυλίων από τον  $R$  στον  $\mathbb{Z}$ . Για κάθε έναν από αυτούς να βρείτε και τον πυρήνα.
6. Να βρείτε όλα τα αριστερά ιδεώδη του  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_2)$ .