Αλγεβρικές Δομές ΙΙ, Σύνολο ασκήσεων 1

Εβδομάδα 10.03.14-16.03.14

1. Έστω S μη κενό σύνολο και ορίζουμε στο δυναμοσύνολο $R = P(S)$ του S τις πράξεις $+$ και $\cdot$ ως εξής:

$$A + B = \{x : \ x \in A \text{ ή } x \in B \text{ αλλά } x \notin (A \cap B)\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

για κάθε $A, B \in R$.

(1) Να γράψετε τα 4 στοιχεία του R όταν $S = \{a, b\}$ και να δώσετε τους πίνακες για τις πράξεις $+$ και $\cdot$ του R.

(2) Να αποδείξετε ότι R είναι δακτύλιος. Έχει μοναδιαίο στοιχείο; Είναι αντιμεταθετικός;

(3) Να αποδείξετε ότι για κάθε στοιχεία $A \in R$ ισχύει ότι $A^2 = A$.

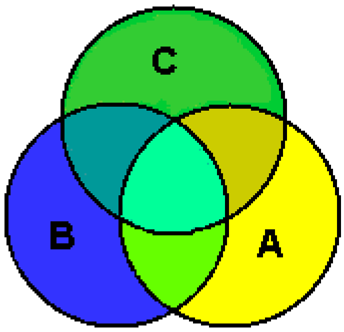
Απάντηση:

(1)

$+$	S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
S	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	S
$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	S	$\{a\}$,
$\{b\}$	$\{a\}$	S	$\emptyset$	$\{b\}$
$\emptyset$	S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$

$\cdot$	S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
S	S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

(2) Η πράξη της πρόσθεσης είναι προσεταιριστική (και αντιμεταθετική), (να το δείξετε με το παρακάτω διάγραμμα του Venn).



Το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης είναι το σύνολο $\emptyset$, ενώ το αντίθετο του $A \subset S$ είναι το A.

Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, αντιμεταθετικός: $A \cap B = B \cap A$. Τέλος ισχύει ότι $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, (χρησιμοποιήστε και πάλι το διάγραμμα Venn) Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το S.

2. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$F = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι σώμα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι F είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{C}$.

Απάντηση: Το F είναι υποσύνολο του δακτυλίου των 2×2 πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$. Άρα για να είναι F δακτύλιος, αρκεί να δείξουμε όταν $M_1, M_2 \in F$ τότε 1) $M_1 - M_2 \in F$ και 2) $M_1 \cdot M_2 \in F$, (ρουτίνα—να γίνουν οι πράξεις). Παρατηρούμε επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός. Έστω τώρα ότι $M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \neq 0$. Έπεται ότι $a \neq 0$ ή $b \neq 0$. Επομένως $\det M \neq 0$ και ο M είναι αντιστρέψιμος ως 2×2 πίνακας. Για να συμπεράνουμε όμως ότι ο F είναι σώμα πρέπει να δείξουμε ότι ο αντίστροφος είναι στοιχείο του F(!), (ρουτίνα, να το δείξετε).

Έστω

$$\phi : F \longrightarrow \mathbb{C}, \ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mapsto a + ib \ .$$

Να ελεγχθεί ότι ϕ ως συνάρτηση είναι αμφιμονότιμη και επί, και ότι είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

3.

(1) Να δείξετε ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.
(2) Έστω $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Να δείξετε γενικότερα ότι αν n είναι πρώτος, τότε είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.
(3) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{27}]$ υπόσωμα του $\mathbb{R}$;
(4) Είναι τα σώματα $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ισόμορφα;

Απάντηση:

(1)

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) - (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}],$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3ab_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

Επίσης έστω $a + b\sqrt{3} \neq 0$. Τότε $a^2 - b^2 3 \neq 0$ (αφού $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$) και

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} \in \ \mathbb{Q}[\sqrt{3}].$$

Έπεται ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

(2) Ομοίως για το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ όταν n είναι πρώτος.
(3) (σκεφτείτε το)—έχει καμία σχέση ο $\mathbb{Q}[\sqrt{27}]$ με τον $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$;
(4) Έστω $\phi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ισομορφισμός. Τότε $\phi(1) = 1$. Πράγματι, $\phi(a) = \phi(a \cdot 1) = \phi(a)\phi(1)$ και επομένως $\phi(1) = 1$. Έπεται έτσι ότι $\phi(a) = \phi(1 + \cdots 1) = 1 + \cdots + 1 = a$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$ και επομένως $\phi(a) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$. Επίσης $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$. Άρα $\phi(a) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{Q}$. Αφού ϕ είναι αμφιμονότιμη και επί, έπεται ότι $\phi(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{2}$ όπου $b \neq 0$. Επομένως $3 = \sqrt{3}\sqrt{3} \mapsto a^2 + b^2 2 + ab\sqrt{2}$ και άρα $a^2 + 2b^2 + ab\sqrt{2} = 3$. Όμως $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Έτσι αναγκαστικά $ab\sqrt{2} = 0$ και αφού $b \neq 0$ καταλήγουμε ότι $a = 0$. Τότε όμως $3 = 2b^2$, άτοπο.

4.

(1) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σώμα με 6 στοιχεία.
(2) Να βρείτε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για ένα σώμα με 8 στοιχεία (αν υπάρχουν).

Απάντηση:

(1) Η χαρακτηριστική ενός σώματος είναι πρώτος αριθμός και άρα θα είναι 2 ή 3. Όμως υπάρχει μόνο μία αβελιανή ομάδα τάξης 6, και στην ομάδα αυτή υπάρχει στοιχείο με τάξη 6, άτοπο αφού η τάξη κάθε στοιχείου είναι διαιρεί την χαρακτηριστική.
(2) Έστω K το σώμα με 8 στοιχεία. Η χαρακτηριστική του θα είναι 2. Επίσης έστω ότι a_1 τυχαίο στοιχείο του σώματος $\neq 0, 1$. Γράφουμε $a_2 = 1 + a_1$. Προκύπτει ότι $1 + a_2 = 1 + (1 + a_1) = a_1$, ενώ $a_1 + a_2 = a_1 + (1 + a_1) = 1$. Έστω $a_3 \in K \setminus \{0, 1, a_1, a_2\}$ και $a_4 = 1 + a_3$. Τέλος θέτουμε a_5 να είναι το αποτέλεσμα του αθροίσματος $a_1 + a_3$. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα της πρόσθεσης.

$+$	0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	0						
a_1			0					
a_2				0				
a_3					0			
a_4						0		
a_5							0	
a_6								0

Για τον πίνακα του πολλαπλασιασμού γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία τοϑ K^* είναι ισόμορφα με τη $\mathbb{Z}_7$ και έχουν τάξη όλα 7. Έτσι για να εξετάσουμε τι θα μπορούσε να είναι το a_1^2. Αν $a_1^2 = a_2 \Rightarrow a_1^2 = 1 + a_1 \Rightarrow a_1^3 = a_1 + (a + a_1) = 1$, άτοπο. Εξετάζουμε αν $a_1^2 = a_3$ και με αυτόν το τρόπο συμπληρώνουμε και τον πίνακα πολλαπλασιασμού.

$\cdot$	0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0								
1								
a_1								
a_2								
a_3								
a_4								
a_5								
a_6								

(Οι πίνακες μπορεί να συμπληρωθούν και αργότερα, όταν μιλήσουμε για δακτυλίους πηλίκα, όποιος τους συμπληρώσει μπορεί να μου τους φέρει.)