Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Σύνολο ασκήσεων 10

1. Έστω $I = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $1 + I, x + 1, \ldots, x^3 + I$ είναι βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[x]/I$. Στη συνέχεια να βρείτε μία βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/5}]$.

Απάντηση Ένα τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{Q}[x]/I$ είναι της μορφής $f(x) + I$ όπου $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Διαιρούμε $f(x)$ με το $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Προκύπτει ότι το υπόλοιπο είναι της μορφής $r(x)$ όπου $r(x) = 0$ οπότε $f(x) + I = I$ ή $\deg r(x) \leq 3$. Έπεται ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{Q}[x]/I$ είναι της μορφής $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + I = a_0(1 + I) + a_1(x + I) + a_2(x^2 + I) + a_3(x^3 + I)$ και επομένως $1 + I, x + 1, \ldots, x^3 + I$ παράγουν τον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρου $\mathbb{Q}[x]/I$. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $a_0(1 + I) + a_1(x + I) + a_2(x^2 + I) + a_3(x^3 + I) = I \Rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + I = I \Rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in I \Rightarrow a_0 = \cdots = a_3 = 0$ αφού κάθε μη μηδενικό στοιχείο του I έχει βαθμό τουλάιστον 4.

Μία βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/5}]$ είναι $1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}$. (Βάσεις πηγαίνουν σε βάσεις μέσα από ισομορφισμούς διανυσματικών χώρων και τα παραπάνω είναι οι ομομορφικές εικόνες του προηγούμενου συνόλου).

2. Έστω $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[e^{2\pi i/5}]$, $f(x) \mapsto f(e^{2\pi i/5})$. Να αποδείξετε ότι $\ker\phi = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Απάντηση Έστω $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ τέτοιο ώστε $g(x) \in \ker\phi$. Αν $g(x) = cg'(x)$ όπου $g'(x)$ είναι πρωτόγονο, προκύπτει ότι $g'(x) \in \ker\phi$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $g(x) \in \ker\phi$ είναι πρωτόγονο, τότε $g(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)h(x)$ όπου $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Αφού $g(x) \in \ker\phi$, έπεται ότι $g(x) \in \ker\psi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[e^{2\pi i/5}]$ και άρα $g(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)p(x)$ όπου $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Διώχνοντας τους παρανομαστές προκύπτει ότι $dg(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)q(x)$ όπου $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Αν $q(x) = eq'(x)$ όπου $q'(x)$ είναι πρωτόγονο, προκύπτει ότιπροκύπτει ότι $dg(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)eq'(x)$. Άρα $d = \pm e$ και $g(x) = \pm(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)q'(x)$.

3. Εάν p είναι πρώτος, να βρείτε όλες τις πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$. Να γράφετε $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbb{R}[x]$ για $p = 7$. Όταν p δεν είναι πρώτος, είναι το κυκλοτομικό πολυώνυμο ανάγωγο;

Απάντηση Οι πραγματικές ρίζες προκύπτουν για εκείνα τα $1 \leq k \leq p - 1$ έτσι ώστε $2k\pi/p = \pi \Rightarrow 2k/p = 1$. Επομένως όταν $p = 2$ έχουμε μία πραγματική ρίζα, διαφορετικά δεν έχουμε καμία. Έστω $w = e^{2\pi i/7}$. Οι ανάγωγοι παράγοντες προκύπτουν από τα γινόμενα $(x - w)(x - w^6)q$, $(x - w^2)(x - w^5)$, $(x - w^3)(x - w^4)$. Όταν p είναι άρτιος $\neq 2$, τότε το κυκλοτομικό πολυώνυμο δεν είναι ανάγωγο αφού έχει τον παράγοντα $x + 1$. Γενικότερα, ελέγξτε αν ισχύει ότι όταν $q|m$ τότε $x^{q-1} + \cdots + 1$ διαιρεί $x^{m-1} + \cdots + 1$.

4. Να βρείτε όλα τα πρώτα και όλα τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$.

Απάντηση $\mathbb{Z}_5 \times (2)$ είναι πρώτο και μέγιστο. $(0) \times \mathbb{Z}_4$ είναι πρώτο και μέγιστο.

5. Να αποφασίσετε αν $x^{169} - 10$, $4x^{20} - 18x^5 + 12x + 6$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$ και στο $\mathbb{Z}[x]$.

Απάντηση $x^{169} - 10$ είναι ανάγωγο σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein για $p = 2$, άρα ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ και στο $\mathbb{Z}[x]$. $4x^{20} - 18x^5 + 12x + 6 = 2(2x^{20} - 9x^5 + 6x + 3)$ ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ (κριτήριο Eisenstein για το $2x^{20} - 9x^5 + 6x + 3$) αλλά όχι στο $\mathbb{Z}[x]$.

6. Να βρείτε δύο πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/(2x^2)$ που να μην είναι μέγιστα. Στη συνέχεια να βρείτε τρία διαφορετικά μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/(2x^2)$.

Απάντηση Έστω $I = (2x^2)$. Τότε $(x)/I$, $(2)/I$ είναι πρώτα ιδεώδη, μη μέγιστα. $(x, 2)/I$, $(x, 3)/I$, $(2, x + 1)/I$ είναι μέγιστα.

7. Να δείξετε ότι το σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}[i]$ είναι το $\mathbb{Q}[i]$.

Απάντηση Θα δείξουμε ότι $\mathbb{Q}[i]$ είναι το μικρότερο σώμα που περιέχει το $\mathbb{Z}[i]$. Πράγματι $\mathbb{Q}[i] (\cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1))$ είναι σώμα και περιέχει $\mathbb{Z}[i]$. Έστω K οποιοδήποτε άλλο σώμα που περιέχει το $\mathbb{Z}[i]$. Τότε θα περιέχει $m/n \forall m, n \in \mathbb{Z}$ όπως και $m/ni \forall m, n \in \mathbb{Z}$ και άρα θα περιέχει και $a + bi \forall a, b \in \mathbb{Z}$.