Αλγεβρικές Δομές ΙΙ
Σύνολο ασκήσεων 10

1. Έστω $I = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $1 + I, x + 1, \ldots, x^3 + I$ είναι βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[x]/I$. Στη συνέχεια να βρείτε μία βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/5}]$.

2. Έστω $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[e^{2\pi i/5}]$, $f(x) \mapsto f(e^{2\pi i/5})$.
Να αποδείξετε ότι $\ker \phi = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

3. Εάν p είναι πρώτος, να βρείτε όλες τις πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$. Να γράψετε $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbb{R}[x]$ για $p = 7$. Όταν p δεν είναι πρώτος, είναι το κυκλοτομικό πολυώνυμο ανάγωγο;

4. Να βρείτε όλα τα πρώτα και όλα τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$.

5. Να αποφασίσετε αν $x^{169} - 10$, $4x^{20} - 18x^5 + 12x + 6$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$ και στο $\mathbb{Z}[x]$.

6. Να βρείτε δύο πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/(2x^2)$ που να μην είναι μέγιστα. Στη συνέχεια να βρείτε τρία διαφορετικά μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]/(2x^2)$.

7. Να δείξετε ότι το σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}[i]$ είναι το $\mathbb{Q}[i]$.